Les appareils générateurs de houle en laboratoire

Laboratory wave generating apparatus

PAR F. BIÉSEL ET F. SUQUET

ET UN GROUPE D'INGÉNIEURS AU LABORATOIRE DAUPHINOIS D'HYDRAULIQUE (Neyrpic, Grenoble).

English synopsis, p. 106.

Nous commençons aujourd'hui la publication d'une série d'articles sur les appareils générateurs de houle en laboratoire.

Ces articles sont centrés sur une étude théorique de M. BIÉSEL concernant un type simple d'appareil producteur de houle. Cet exposé théorique est précédé par un examen des qualités que doit posséder un appareil à houle, et par une présentation des principaux types utilisés à l'heure actuelle. Il est illustré par une série de fiches indiquant, pour chaque batteur, ses caractéristiques principales et ses avantages ainsi que sa position par rapport à la théorie.

Pour l'établissement de ces fiches, nous avons fait appel à de nombreux Laboratoires d'Hydraulique qui ont bien voulu nous fournir des renseignements à propos des appareils qu'ils utilisent, ainsi que des schémas et des photographies. Que tous soient remerciés bien vivement pour nous avoir procuré ces documents et nous avoir autorisés à les publier.

Il nous a paru enfin intéressant d'indiquer,

dans un article qui fait suite à ces exposés, le point de vue de l'ingénieur qui a chaque jour à les utiliser sur des canaux ou bassins à houle; nous verrons ainsi comment sont résolus les divers problèmes pratiques, dans quelle mesure les théories exposées plus haut sont vérifiées, enfin les directions vers lesquelles il faut pousser les recherches pour produire une houle artificielle permettant d'étudier, de façon de plus en plus serrée, les phénomènes réels. En ce qui concerne ce dernier article, nous avons jugé plus sage de nous limiter à notre propre expérience, et c'est pourquoi nous ne parlerons que des appareils en usage au Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique Neyrpic.

Nous n'avons pas la prétention d'être complets; aussi accueillerons-nous avec reconnaissance les remarques que voudront bien nous faire nos lecteurs ainsi que les compléments qu'ils apporteront à notre texte.

F. BIÉSEL ET F. SUQUET.

CARACTÉRISTIQUES ET ESSAI DE CLASSIFICATION DES APPAREILS GÉNÉRATEURS DE HOULE

THE CHARACTERISTICS OF WAVE MACHINES AND AN ENDEAVOUR TO CLASSIFY THEM

PAR F. SUQUET

Les appareils générateurs de houle, utilisés dans les Laboratoires d'Hydraulique pour les études sur modèles, doivent satisfaire à un certain nombre de conditions qui peuvent se classer un peu artificiellement en deux catégories :
— Conditions imposées par la loi du mouvement à donner à l'organe producteur de houle,

— Conditions de construction (économie de construction, simplicité et sécurité de fonctionnement, etc...),

Elles sont souvent contradictoires, ce qui explique en partie la diversité des appareils actuellement en service, chaque type ayant été la plu-

part du temps étudié en vue d'un cas particulier.

Nous allons examiner brièvement les différents problèmes que l'on rencontre en essayant de satisfaire à ces conditions; nous esquisserons ensuite une classification des différents appareils.

PROBLÈMES DE MOUVEMENT

Rappelons tout d'abord rapidement quelques propriétés élémentaires du mouvement de la houle.

Une particule d'eau participant au mouvement de la houle décrit une orbite que l'on peut considérer comme fermée en première approximation.

Envisageons d'abord le cas d'une profondeur grande par rapport à la longueur d'onde. Les

Fig. 1

orbites sont (toujours en première approximation) des cercles décrits d'un mouvement uniforme et dont le rayon diminue exponentiellement avec la profondeur : pratiquement, le mouvement devient assez vite insensible. Les particules qui, au repos, étaient situées sur une même verticale, sont, à un instant donné du mouvement, répartis sur une exponentielle (fig. 1).

Dans le cas d'une profondeur faible par rapport à la longueur d'onde, le mouvement ressemble au précédent, mais les orbites sont des ellipses : la grandeur de leurs axes diminue également avec la profondeur, mais dans le cas où cette dernière est suffisamment petite, le mouvement est encore sensible au fond : l'ellipse s'y réduit à un segment de droite parcouru d'un mouvement alternatif par la particule d'eau (fig. 2).

Nous examinerons plus loin dans quelle me-

Fig. 2

sure il est nécessaire d'adapter le mouvement du batteur à celui de la houle, mais, dès à présent, nous voyons qu'il est indispensable de conserver à ce mouvement une période constante.

PROBLÈMES DE CONSTRUCTION

La construction proprement dite des appareils producteurs de houle pose à son tour un certain nombre de problèmes.

1° Inertie :

Il est indispensable d'arriver à donner aux batteurs à houle une inertie peu importante tout en leur assurant la solidité et la rigidité indispensables. On conçoit en effet que si l'inertie de l'appareil générateur de houle, quelle que soit sa nature, est considérable, les efforts imposés au mécanisme peuvent être très grands, car la fréquence des houles en laboratoire peut aller jusqu'à deux ou trois cycles par seconde. Pour que les organes puissent résister à ces efforts, il est nécessaire d'augmenter leurs dimensions, donc leur masse, et par suite leur inertie. Cette augmentation entraîne deux effets nuisibles : d'une part la puissance à donner au moteur pour vaincre les résistances passives et les forces d'inertie est plus considérable, d'autre part le mouvement est plus irrégulier du fait de l'importance de ces dernières forces.

2° Entretien.

L'entretien de l'appareil pose également des problèmes aux constructeurs : il faut éviter le plus possible d'avoir dans l'eau des organes sensibles, articulations, paliers, galets ou engrenages; outre le danger de corrosion, il ne faut pas oublier que l'eau contient souvent du sable provenant soit des maquettes d'ouvrages, soit tout simplement de ce que le modèle comporte un fond mobile.

3° Réflexion.

Les inconvénients des réflexions qui peuvent se produire sur les batteurs ont été exposés dans un article de M. BIÉSEL (1) consacré à la description du filtre Neyrpic.

En mer, les houles réfléchies par un ouvrage repartent vers le large où elles vont se perdre. Sur un modèle, elles reviennent vers le batteur; or, la théorie, pour laquelle nous renverrons à l'article de M. BIÉSEL qui fait suite à cet exposé, ainsi que l'expérience, montre que la plupart des batteurs sont très réfléchissants.

(1) F. BIÉSEL : « Le filtre à houle système Neyrpic ». *La Houille Blanche*, mai-juin 1948, n° 3.

A cet inconvénient, il existe, semble-t-il, deux remèdes :

- soit employer un « filtre » : l'article de M. BIÉSEL précité indique leur principe et l'un des modes de réalisation possibles parmi ceux qui sont employés au Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique Neyrpic;
- soit utiliser des procédés spéciaux ou des batteurs peu réfléchissants. Il en existe quelques types que nous rencontrerons au cours des pages suivantes. Parmi les procédés « spéciaux », citons dès à présent celui utilisé dans un double but, au Laboratoire de Delft, qui consiste à accélérer et à augmenter les dimensions des houles au moyen d'un courant d'air suffisamment énergétique; ainsi, les houles arrivant sur le modèle sont renforcées, tandis que celles qui sont réfléchies s'amortissent à cause du vent qui souffle en sens inverse de celui de leur propagation.

4° Facilité de réglage :

La plupart du temps, sur un canal ou un bassin, il sera nécessaire de réaliser plusieurs sortes de houles, par exemple afin d'étudier l'action sur un ouvrage de tempêtes de caractéristiques différentes. Pour des raisons évidentes d'économie et de facilité d'exploitation, ce réglage devra pouvoir être fait commodément et rapidement.

5° Mobilité :

Ce problème se pose sur les bassins à trois dimensions où il est souvent nécessaire de représenter des houles venant de directions différentes, dans l'étude d'un port par exemple.

Indiquons rapidement quelques solutions employées pour faire varier cette direction. La plus simple consiste à déplacer l'appareil : pour cela, on est quelquefois conduit à monter le volet sur une poutre supportant tous les organes y compris le moteur; on peut également remplacer la poutre par un caisson qu'un dispositif approprié (injection d'air comprimé) permet de rendre flottant et qu'il est possible de manœuvrer ainsi plus facilement. Une autre solution consiste enfin à fractionner l'appareil en plusieurs éléments dont il sera alors nécessaire de synchroniser le mouvement.

Il existe également — et nous en verrons un exemple plus loin — des appareils qui, tout en restant fixes, permettent de réaliser des houles de directions de propagation variables.

6° Etanchéité et frottement :

Le défaut d'étanchéité à la base du batteur et sur les bords a, entre autres inconvénients, celui de diminuer l'amplitude de la houle produite; mais, d'autre part, certains dispositifs d'étanchéité, que l'on serait tenté d'employer, augmentent considérablement les frottements avec comme conséquence une perte de rendement. Un compromis est souvent à trouver.

On conçoit sans peine que la reproduction fidèle du mouvement orbitaire de la houle soit difficilement compatible avec la simplicité qu'exigent une construction robuste et peu coûteuse et les diverses servitudes auxquelles peut être soumis le batteur.

Les premiers appareils, tels que celui de BERTIN et CALIGNY, ou celui de HAGEN étaient très simples et s'occupaient uniquement de réaliser un mouvement périodique, à l'aide d'un baquet plongeant dans l'eau dans le premier cas ou d'une palette dans le second. Ils ont permis pourtant de faire des études intéressantes. Au fur et à mesure qu'on a voulu perfectionner les appareils pour effectuer des études plus poussées, on a tenté — la plupart du temps au prix d'une complication mécanique — de rapprocher le mouvement du batteur de celui de la houle. On peut se demander si cet effort était nécessaire et pour cela il est bon de voir d'un peu plus près comment se pose le problème du mouvement du batteur.

L'article de M. BIÉSEL, dont une première partie est publiée dans ce même numéro, montre qu'en fait le problème est double.

L'élément producteur de houle peut, du fait des liaisons géométriques auxquelles il est soumis, occuper dans l'espace un certain nombre de positions; appelons « loi du mouvement dans l'espace » l'ensemble des positions par lesquelles l'élément producteur de houle passe successivement. Appelons d'autre part « loi de vitesse » ou « loi de mouvement dans le temps » la relation espace-temps qui règle le passage d'une position à l'autre.

M. BIÉSEL étudie pour un type particulier correspondant aux batteurs les plus usuels l'importance relative de ces deux lois.

Il montre qu'il n'est pas essentiel que le batteur ait une loi de mouvement dans l'espace rigoureuse, pour peu que l'on puisse disposer d'une longueur relativement faible devant le batteur; en effet, les imperfections introduites par la non-observation de la loi de mouvement dans l'espace disparaissent très rapidement lorsqu'on s'éloigne de l'appareil producteur. Il conclut en particulier que le remède aux défauts persistant à une grande distance du batteur doit être

recherché dans une amélioration de la loi de mouvement dans le temps (1).

Cependant, pour des raisons d'ordre différent (existence de pression d'inertie, possibilités de cavitation, etc...), M. BRÉSEL conclut que, quoiqu'il ne soit pas essentiel d'avoir une loi de mouvement dans l'espace très étudiée, il est souhaitable de ne pas s'éloigner inutilement de celle correspondant au mouvement naturel de la houle.

En fait, jusqu'à présent, la plupart des constructeurs se sont attachés à s'approcher le plus possible de cette loi de mouvement. Il semble d'ailleurs que l'on soit ainsi arrivé à des résultats assez satisfaisants.

**

Nous sommes maintenant à même d'esquisser une classification des appareils producteurs de houle qui sera illustrée par la suite au moyen de schémas ou de photographies représentant des batteurs en service ou ayant effectivement fonctionné.

I. — VOLET SOUPLE

Nous avons vu plus haut que, dans une masse liquide indéfinie où se propage une houle, les particules d'eau situées au repos sur une même section droite se trouvaient pendant le mouvement réparties sur une certaine surface : cette dernière oscille en se déformant autour du plan vertical correspondant à la position de repos. Le « volet souple » consiste essentiellement en une paroi flexible matérialisant une telle surface déformable.

L'avantage de ce dispositif est que la houle ainsi produite est très pure à toute distance du batteur. On peut ainsi produire un mouvement de houle s'étendant sur un nombre restreint de longueurs d'onde ou même une fraction de longueur d'onde, à condition que l'autre extrémité soit munie d'une autre membrane flexible animée d'un mouvement approprié ou d'un amortisseur convenable.

Les inconvénients sont que la transmission de l'énergie motrice à la paroi se fait au moyen d'un système d'arbres et de manivelles assez compliqué et délicat.

On doit modifier la longueur de toutes ces dernières lorsqu'on désire changer les caractéristiques de la houle.

(1) Des essais sont d'ailleurs en cours au Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique sur un appareil fonctionnant avec une loi de mouvement non sinusoïdale dans le temps.

II. — VOLETS RIGIDES

1) Volet à simple articulation :

L'appareil sans doute le plus utilisé est le volet à simple articulation, plan la plupart du temps; il peut pivoter autour d'un axe, situé la plupart du temps au fond du canal ou du bassin à houle (fig. 3). Une bielle est articulée, à une extrémité sur le volet, à l'autre sur une manivelle entraînée par un moteur, souvent électrique.

Quelquefois, certaines sujétions (cas d'un modèle à fond mobile par exemple) peuvent imposer de fixer l'axe d'oscillation au-dessus du fond

FIG. 3

du canal; cette disposition est évidemment moins bonne que la précédente.

On peut même être obligé, comme l'ont fait certains laboratoires, de placer l'axe au-dessus de la surface libre. Ce dispositif est à priori moins satisfaisant que les précédents au point de vue de la reproduction du mouvement de la houle puisqu'il méconnaît une de ses propriétés essentielles, à savoir la décroissance des orbites avec la profondeur. De plus, le défaut d'étanchéité, au fond, a, comme nous l'avons signalé, certains inconvénients.

Le premier dispositif n'est d'ailleurs pas tou-

FIG. 4

jours à l'abri de tout reproche — au moins théoriquement. Le mouvement imprimé aux molécules d'eau étant nul sur le fond, cet appareil est évidemment beaucoup plus indiqué quand la profondeur est grande par rapport à la longueur d'onde. En fait, même avec des profondeurs relativement faibles, on obtient encore de fort belles houles, si la cambrure n'est pas trop forte; on peut d'ailleurs tourner la difficulté en aménageant un canal à fond plan se raccordant à un plan incliné à l'extrémité duquel se trouve le volet (fig. 4).

2) Volet à double articulation.

En réalité, on a souvent étudié et construit des volets animés de mouvements de translation et de rotation combinés. L'extrémité inférieure

FIG. 5

du volet n'est plus fixée au fond du canal mais peut parcourir une certaine trajectoire dont l'amplitude est réglable. Il est possible de cette façon d'imprimer aux particules d'eau un mouvement plus proche de celui de la houle en faible profondeur.

Il existe de nombreux dispositifs permettant de produire de tels mouvements. On peut distinguer deux classes : les volets qui reposent sur le fond par des galets ou sur des glissières, et ceux qui sont « suspendus ». Nous rencontrerons ces différents volets dans les pages suivantes. La figure 5 montre un type classique. Suivant les cas, la question de l'étanchéité au fond peut se poser.

Le volet peut être plan ou courbe; citons parmi les batteurs possédant un volet courbe celui du BASSIN D'ESSAIS DES CARÈNES DE LA MARINE, à Paris.

Un cas limite, aussi bien du volet à double articulation que du volet à simple articulation, est constitué par le « batteur piston » : le volet, en général vertical, est animé d'un simple mouvement de translation de direction parallèle à l'axe du canal.

III. — PLONGEURS

Le baquet plein de pierres, que BERTIN et CALIGNY employaient pour faire des « vagues »,

FIG. 6

peut être considéré comme l'ancêtre de ce type d'appareil. La réalisation la plus simple se compose d'un prisme rectangulaire, ou le plus sou-

vent triangulaire, animé d'un mouvement alternatif vertical (fig. 6). Le prisme triangulaire, ou « coin », est utilisé dans de très nombreux laboratoires : il présente certains avantages de simplicité et de mobilité; de plus, il exige une dépense d'énergie théoriquement moindre que celle du volet : en effet, contrairement à ce dernier, la face arrière ne produit pas de houle.

On peut également concevoir d'autres variantes et perfectionnements de cette formule : en particulier, le profil du « coin » peut être spécialement étudié en vue d'améliorer la qualité de la houle.

IV. — APPAREILS DIVERS

Parmi les autres appareils employés, nous devons tout d'abord faire une place particulière au « batteur serpent », imaginé par M. BIÉSEL au LABORATOIRE DAUPHINOIS D'HYDRAULIQUE, et dont la conception est très originale : il se compose essentiellement d'une rangée de batteurs « élémentaires » de même longueur, étroits, pouvant osciller autour du même axe géométrique; un système de cames permet de donner à chacun de ces batteurs des mouvements régulièrement déphasés les uns par rapport aux autres. Chacun de ces batteurs émet une onde sensiblement circulaire; l'enveloppe de ces différentes ondes constitue la houle produite par l'appareil. On comprend qu'il est possible, en modifiant le déphasage des batteurs, de produire des houles d'orientation différente sans avoir à déplacer l'appareil. De ce fait, il peut être utile pour certains modèles à trois dimensions : il est malheureusement d'une réalisation assez délicate et onéreuse.

Citons également les appareils du type « rouleau ». Le rouleau peut être formé par un cylindre circulaire « excentré », c'est-à-dire tournant autour d'un axe différent de son axe géométrique, mais parallèle à ce dernier. La fréquence de la houle produite est alors égale au nombre de rotations du cylindre par seconde. Le LABORATOIRE D'HYDRAULIQUE DE L'UNIVERSITÉ TECHNIQUE DU DANEMARK à Copenhague a envisagé l'emploi d'un cylindre elliptique : la fréquence de la houle produite est le double du nombre de rotations par seconde du cylindre.

On peut en rapprocher dans une certaine mesure les cylindres munis d'une ou plusieurs palettes et également les « roues à aubes » employées autrefois dans quelques laboratoires.

Il faut aussi mentionner les palettes de surface qui ont l'intérêt d'avoir un très faible coefficient de réflexion.

Les appareils pneumatiques présentent également cet avantage. L'ancêtre en est constitué, semble-t-il, par le tube des frères WEBER; ces

derniers produisaient des vagues en aspirant de l'eau dans un tube et en la laissant retomber (fig. 7). Le principe des appareils modernes est le même : une « cloche » est reliée alternativement à l'aspiration et au refoulement d'un compresseur.

Ces derniers appareils présentent quelques avantages, mais il est généralement nécessaire

FIG. 7

de disposer devant eux d'une longueur suffisante pour permettre à la houle de se purifier.

Il existe d'ailleurs d'autres types d'appareils générateurs de houle et la liste que nous avons donnée n'a pas la prétention d'être complète.

Il est cependant possible de voir que les appareils producteurs de houle peuvent être de types très variés; certains sont très complexes, d'autres sont assez rustiques. Or, on arrive avec

ces derniers à produire des houles acceptables à condition de se limiter aux faibles cambrures. On peut se demander alors pourquoi les constructeurs ont été amenés à perfectionner, et souvent à compliquer les appareils. En particulier existe-t-il des raisons théoriques pour qu'un type de batteur produise des houles meilleures que les autres? L'article qui suit essaie de répondre à cette question.

Ce dernier sera illustré au moyen de « fiches » donnant, pour chaque type de batteur cité dans cet avant-propos, un certain nombre de renseignements sur sa construction, son entretien, son pouvoir réfléchissant, sa mobilité, etc...; nous indiquerons aussi si l'amplitude de la houle qu'il produit est calculable ou non par la théorie de M. BIÉSEL.

Ces fiches se trouvant dispersées dans l'article de M. BIÉSEL, nous avons cru bon de dresser un tableau synoptique résumant la classification des différents batteurs telle qu'elle a été esquissée ci-dessus. Pour chaque batteur, nous donnons un schéma de principe, le numéro de la page à laquelle se trouve la « fiche » qui le concerne, ainsi que la formule de l'amplitude de la houle produite *.

* Seules les quatre premières fiches paraissent dans le présent numéro; les autres seront présentées au fur et à mesure de la publication de l'article de M. Biéssel.

Tableau synoptique des différents appareils générateurs de houle

TYPE DE L'APPAREIL		SCHEMA DE PRINCIPE	FICHE PAGE	AMPLITUDE
<i>Volet souple</i>			157	calculable
<i>Volet à simple articulation.</i>	Axe au fond du canal.		160 161	calculable
	Axe au-dessus du fond du canal.			calculable
	Axe au-dessus de la surface libre.		164	non calculable par la théorie
Batteur piston			164	calculable

TYPE DE L'APPAREIL	SCHÉMA DE PRINCIPE	FICHE PAGE	AMPLITUDE
<p data-bbox="101 776 265 826"><i>Volet à double articulation.</i></p> <p data-bbox="318 634 586 662">Volets « suspendus ».</p> <p data-bbox="318 1186 696 1237">Volets reposant sur le fond par des galets ou des glissières.</p>			<p data-bbox="1153 776 1362 826">calculable si le volet est plan</p>

<p data-bbox="344 1586 446 1614"><i>Plongeur</i></p>			<p data-bbox="1182 1547 1353 1626">en général non calculable par la théorie</p>

TYPE DE L'APPAREIL		SCHÉMA DE PRINCIPE	FICHE PAGE	AMPLITUDE
Appareils divers.	Batteur serpent.			calculable
	Rouleau excentré.			non calculable par la théorie
	Cylindre elliptique.			non calculable par la théorie
	Cylindre à palettes.			non calculable par la théorie
	Roue à palettes.			non calculable par la théorie
	Palette de surface.			non calculable par la théorie
	Appareil pneumatique.			non calculable par la théorie

ÉTUDE THÉORIQUE D'UN CERTAIN TYPE D'APPAREIL A HOULE

THEORETICAL STUDY OF A CERTAIN TYPE OF WAVE MACHINE

PAR F. BIÉSEL

S o m m a i r e

I. — INTRODUCTION

- 1° *Définition du problème étudié et notations.*
- 2° *Théories antérieures.*

II. — DÉTAIL DU CALCUL

- 1° *Etude du problème homogène.*
- 2° *Recherche d'une solution particulière.*
- 3° *Détermination de la solution définitive.*

(Seules ces deux premières parties sont publiées dans le présent numéro.)

III. — DISCUSSION DES RÉSULTATS

- 1° *Indications générales.*
- 2° *Etude de quelques cas particuliers.*

A. — Batteur piston :

- a) Batteur piston émettant des houles longues.
- b) Batteur piston émettant des houles courtes.

B. — Volet battant :

- a) Volet battant émettant des houles longues.
- b) Volet battant émettant des houles courtes

IV. — CONCLUSIONS GÉNÉRALES

ANNEXE :

NOTES ET COMPLÉMENTS MATHÉMATIQUES

- 1° *Existence de la solution du problème de décomposition posé par l'équation 16.*
- 2° *Etude particulière des coefficients c_n .*
- 3° *Justification des démonstrations formelles données dans le texte de la note.*
- 4° *Etude des points singuliers.*
- 5° *Justification des conditions aux limites.*

FICHE N° 1

FIG. a

Photo extraite d'un article de M. SINES, paru dans *Engineering News Record*, communiquée par l'auteur.

FIG. b

Dessin d'après une photographie parue dans *Science et Vie*, en 1916.

PRINCIPE. — LOI DU MOUVEMENT.

Cet appareil est essentiellement constitué par une paroi flexible animée d'un mouvement approprié : on sait que si l'on considère les particules d'eau qui, au repos, se trouvaient dans une section droite du canal, elles se trouvent pendant le mouvement réparties sur une certaine surface. La paroi flexible doit coïncider à chaque instant avec cette dernière surface.

Une seule paroi flexible placée à une extrémité d'un canal peut jouer le rôle d'appareil producteur de houle de la même façon qu'un volet plan à simple articulation, par exemple. La figure *a* ci-contre donne un exemple de réalisation.

Mais on peut également construire une cuve dont tous les côtés, y compris le fond, sont constitués par des parois flexibles animées de mouvements appropriés. Dans ces conditions, on peut produire une houle de longueur d'onde égale ou inférieure à celle de la cuve et dont le mouvement s'étend jusqu'à une profondeur virtuelle supérieure à la profondeur réelle de la cuve. La figure *b* en donne une réalisation.

CALCUL DE L'AMPLITUDE DE LA HOULE PRODUITE :

Il se fait facilement au moyen des formules de la théorie de la houle en première approximation.

CONSTRUCTION :

La construction est évidemment assez compliquée, même pour un volet constitué par une seule paroi flexible. Le mouvement est transmis par un système d'arbres et de manivelles avec engrenages coniques, qui risque d'être assez fragile.

INERTIE :

L'inertie est faible.

POUVOIR RÉFLÉCHISSANT :

Lorsque l'appareil producteur de houle est constitué par une simple lame flexible, le problème des réflexions se pose de la même façon que pour un volet rigide. Il est par conséquent nécessaire de disposer un « filtre à houle » devant l'appareil.

Lorsque toutes les parois de la cuve (ou au moins deux parois opposées convenables) sont flexibles et animées de mouvements appropriés, il n'est plus besoin de filtres en principe puisqu'il n'y a pas d'énergie réfléchie par les parois; ils sont à nouveau nécessaires lorsqu'on étudie dans la cuve un ouvrage réfléchissant.

Remarque. — Cet appareil trouve son emploi dans des cas bien particuliers, par exemple lorsqu'on dispose de faibles longueurs; il peut alors rendre de grands services.

I. — Introduction

1° DÉFINITION DU PROBLÈME ÉTUDIÉ ET NOTATIONS

Dans ce qui suit, nous présentons une étude théorique des batteurs à houle destinés aux essais hydrauliques en canaux prismatiques de section rectangulaire et à fond horizontal.

Cette étude ne porte que sur des mouvements à deux dimensions s'effectuant parallèlement aux faces latérales du canal et au plan de figure. De plus, chaque fois que le contraire ne sera pas précisé, les calculs se rapporteront à une tranche d'épaisseur unité. Dans le plan du mouvement, nous définirons l'axe Ox situé sur le fond du canal et dirigé dans le sens de propagation de la houle, et l'axe Oy vertical ascendant passant par la position moyenne du batteur. Dans ce système, les coordonnées seront x et y . La profondeur moyenne, c'est-à-dire l'ordonnée du niveau moyen, sera désignée par h .

Nous nous bornerons également à l'étude des mouvements irrotationnels et nous supposerons que le fluide employé est parfait et incompressible. D'autre part, les équations du mouvement devront satisfaire au premier ordre d'approximation à toutes les lois de l'hydrodynamique.

Nous considérerons essentiellement les batteurs dont l'action est équivalente à celle d'une plaque ou d'une lame souple, obturant complètement le canal et oscillant autour d'une position moyenne confondue avec une section droite. On admettra de plus que ces oscillations sont harmoniques et d'une période bien définie T .

2° THÉORIES ANTÉRIEURES.

On sait que LAPLACE et AIRY ont donné des équations du mouvement de la houle en fluide parfait. Ces équations sont établies en supposant que les termes de l'ordre du carré des vitesses sont négligeables (équations dites du premier ordre); elles montrent que les molécules d'eau qui, au repos, se trouvent dans une section droite, constituent, au cours du mouvement, une surface qui oscille en se déformant autour de la dite position de repos. Nous n'insisterons pas sur l'allure de ce mouvement qui est bien connue, et nous nous contentons d'en donner deux exemples caractéristiques sur les figures 1 et 2.

L'idée qui semble donc la plus naturelle pour réaliser artificiellement une houle dans un canal consiste à créer un batteur souple qui reproduise exactement ce mouvement des surfaces liquides tel que nous venons de le décrire. Ce type de batteur, qui sera désigné dans ce qui

suit par l'expression « batteur idéal », est d'une réalisation extrêmement difficile et onéreuse, aussi est-on conduit pratiquement à utiliser des batteurs beaucoup plus simples.

Dans l'article précédent, auquel nous renvoyons, M. SUQUET a passé en revue les principales réalisations actuellement en service : volet souple, qui veut se rapprocher le plus possible du batteur idéal, volet à simple articulation ou à double articulation, le volet proprement dit pouvant être plan ou courbe.

Il faut noter d'ailleurs que les batteurs perfectionnés auxquels on est arrivé donnent d'excellents résultats, ce qui montre que l'intuition des constructeurs est dans l'ensemble en bon accord avec l'expérience. Le but de la recherche ultérieure ne peut donc être que d'apporter des améliorations de détail, le problème pouvant être considéré comme presque entièrement résolu sur le plan pratique. En particulier, il reste à déter-

Fig. 1.

Déformation de la surface liquide OA au cours du passage d'une houle de faible longueur ($L = h$).

Fig. 2.

Déformation de la surface liquide OA au cours du passage d'une houle longue $L = 8h$.

miner pour chaque cas quels sont les appareils producteurs de houle les mieux adaptés.

Pour cela, il est nécessaire de comparer entre eux différents types de batteurs, ce qui est difficile à faire par des méthodes uniquement empiriques. Bien entendu, là comme ailleurs, l'expérience aura le dernier mot, mais la théorie reste précieuse ne serait-ce que pour fournir un cadre général facilitant la classification, l'exploitation et, dans une certaine mesure, l'extrapolation des résultats expérimentaux. D'autre part, on ne peut envisager, pour des raisons économiques, d'entreprendre expérimentalement une étude complète à une échelle suffisante de tous les appareils imaginables. Par conséquent, lorsqu'on aura à établir un projet d'appareil devant fonctionner dans des conditions nouvelles, il sera extrêmement intéressant de disposer d'indications théoriques. On pourra ainsi déterminer d'une façon plus précise le type de batteur que l'on aura intérêt à utiliser, compte tenu de la qualité des houles désirées et de la variation

des prix de construction en fonction de la complexité de l'appareil.

L'intérêt du calcul est encore de permettre l'évaluation à priori des efforts auxquels le mécanisme sera soumis. On peut ainsi donner à celui-ci une résistance suffisante sans augmenter inutilement l'inertie des pièces oscillantes.

Nous voyons donc tout l'intérêt de la théorie hydrodynamique de l'action d'un batteur; or celle-ci existe en substance dans un article de M. T. H. HAVELOCK paru en 1929 dans le *Philosophical Magazine* (1). Dans ce qui suit, nous allons tout d'abord rappeler l'essentiel de cette théorie, puis nous en étudierons tout particulièrement l'application aux batteurs les plus usuels en soulignant les conclusions pratiques qui s'en dégagent et en cherchant à mettre en évidence les ordres de grandeur des phénomènes mis en jeu par des exemples numériques et des graphiques appropriés. Enfin, nous donnerons en annexe un certain nombre de discussions sur la nature des singularités que peuvent présenter les solutions ainsi formées. Il importe en effet de s'assurer que celles-ci sont physiquement acceptables, nous verrons que ce souci nous conduit à faire certaines restrictions sur la forme du batteur.

Nous ne prétendons pas que ces calculs apportent une solution complète au problème pratique du batteur à houle car ils sont basés sur une théorie du premier ordre et ils sont, de plus, limités à la considération des mouvements irrotationnels d'un fluide parfait. C'est-à-dire que les formules établies ne seront rigoureusement valables que pour les amplitudes infiniment petites et dans les cas où les effets de la viscosité et de la turbulence pourront être négligés. En particulier pour les houles très courtes (modèles à petite échelle) il pourra être nécessaire de faire certaines corrections.

Il est à noter également que le schéma utilisé pour le calcul du batteur ne correspondra pas nécessairement à la réalité dans toute sa complexité. En particulier, ce schéma ne tient pas compte des fuites se produisant sous le batteur et sur l'importance desquelles nous reviendrons plus loin.

Ces critiques sont sérieuses, mais il ne faudrait pas en exagérer l'importance, d'autant plus qu'elles s'appliquent tout aussi bien aux formules de LAPLACE sur lesquelles repose la théorie

du batteur idéal. Il suffira que dans l'interprétation des résultats on ne perde jamais de vue le caractère restrictif de nos hypothèses de base. Par exemple, si la théorie prévoit des résultats identiques pour deux types de batteur, nous ne pourrions pas affirmer catégoriquement que ces deux appareils sont équivalents. Nous pourrions dire seulement *qu'en l'absence de toute autre donnée sur la question (résultats expérimentaux, théorie plus complète, etc...) nous n'avons aucune raison théorique de préférer l'un ou l'autre et que, par conséquent, il faut choisir le moins cher*. Nous reprendrons d'ailleurs tous ces points en détail dans nos conclusions à la fin de cette note.

II. — Détail du calcul

Nous ne reviendrons pas sur la démonstration des équations générales de l'hydrodynamique que nous supposons connues.

On sait que l'étude du mouvement irrotationnel d'un fluide parfait et incompressible se ramène à celle d'une fonction de courant $\Phi(x, y, t)$ harmonique en x et y à partir de laquelle les com-

FIG. 3

posantes u et v de la vitesse de la particule de coordonnées x et y sont représentées au temps t par les relations :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

On sait également que si l'on se limite aux équations du premier ordre, c'est-à-dire si l'on néglige les termes qui sont de l'ordre du carré des vitesses, la condition aux limites qui exprime que la surface libre est à pression constante peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } \begin{cases} y = h \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

De même la condition exprimant que l'eau accompagne bien le batteur pourra s'exprimer par :

(1) Plus récemment un article de E. H. KENNARD, paru dans le numéro d'octobre 1949 du *Quarterly of Applied Mathematics*, traite de l'aspect mathématique de ce même problème. Mais la méthode exposée par ce dernier auteur est plus complexe et s'adapte moins naturellement au problème pratique étudié ici.

FICHE N° 2

FIG. a

FIG. c

*Photographie du Laboratoire
Dauphinois d'Hydraulique
(Grenoble).*

*Les trois photographies ci-dessous ont été
communiquées par le Waterloopkundig
Laboratorium Delft (Pays-Bas).*

*Photographie du Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique
(Grenoble).*

Batteur, à simple articulation à axe placé au fond du canal ou un peu au-dessus

Fig. b

Schéma communiqué par le Waterbouwkundig Laboratorium Borgerhout (Belgique).

PRINCIPE. — LOI DU MOUVEMENT.

C'est un volet oscillant autour d'un axe placé au fond du canal ou à une certaine distance au-dessus de ce fond. Le bordé du volet peut descendre jusqu'à l'axe d'articulation ou s'arrêter à une certaine distance de cet axe (figure b).

Le mouvement donné à l'eau est nul au fond du canal; ce batteur ne sera donc adapté en principe qu'aux houles en « profondeur infinie », c'est-à-dire dont la longueur d'onde est inférieure au double de la profondeur; en fait, même en profondeur assez faible, l'appareil donne de bons résultats.

CALCUL DE L'AMPLITUDE DE LA HOULE PRODUITE :

La théorie exposée dans cet article donne pour la demi-amplitude de la houle, en supposant le volet articulé au fond du canal (avec les notations du texte) :

$$a = 2e \frac{1 - \operatorname{sh} m h + m h \operatorname{sh} m h}{m h (\operatorname{sh} m h \operatorname{ch} m h + m h)}$$

CONSTRUCTION :

La construction est très simple : le batteur peut être très robuste et rigide en le nervurant convenablement.

INERTIE :

Son inertie est relativement faible.

ENTRETIEN :

Il n'existe qu'une articulation dans l'eau; elle peut être très rustique et son entretien est très faible.

RÉGLAGE :

La période se règle en faisant varier la vitesse par divers moyens tels que moteur à vitesse variable, variateur de vitesse, etc... Le variateur de vitesse peut permettre d'obtenir des houles de périodes variables.

L'amplitude se règle en faisant varier la longueur de la manivelle. Les figures a et b représentent deux variantes de réalisation.

POUVOIR RÉFLÉCHISSANT :

Le batteur est réfléchissant, ainsi que le montrent la théorie et l'expérience; mais son « coefficient de réflexion » réel est moindre que le coefficient théorique, du fait des fuites le long des parois, du déferlement et de la turbulence.

MOBILITÉ :

Du fait de sa simplicité, il peut être orienté de façon relativement facile; nous donnons ici (figure c) un exemple de réalisation de batteur mobile monté sur une poutre portant le mécanisme, et un exemple (figure d) de batteur fractionné en plusieurs volets; on aperçoit sur les photographies le joint à la cardan par lequel la bielle s'articule sur le volet et les boulons qui permettent de fixer chaque volet à la position désirée.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = k \xi(y) \cos kt \quad (2)$$

k étant égal à $\frac{2\pi}{T}$ et le mouvement du batteur étant défini par l'équation $x = \xi(y) \sin kt$ qui représente à chaque instant l'équation de sa surface de contact avec l'eau.

Cette façon simple d'exprimer les conditions aux limites suppose que l'on peut, sans commettre d'erreur supérieure au second ordre, confondre les vitesses des particules situées réellement à la limite du fluide avec les vitesses calculées pour leur position de repos. Cette hypothèse est justifiée en particulier si les déplacements des particules et les gradients des vitesses sont des infiniment petits du même ordre que les vitesses elles-mêmes. Dans le cas présent, cette dernière condition n'est pas toujours rigoureusement remplie; cependant un examen plus précis, que nous donnerons à la fin de cette note (voir annexe) montre que la forme des conditions (2) et (3) peut cependant être conservée.

Il faut encore écrire une condition exprimant que le fond est imperméable; cette condition s'écrit :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Enfin, nous ajouterons une condition supplémentaire : la fonction Φ et ses dérivées premières devront rester finies dans tout le domaine étudié ($0 \leq x$ et $0 \leq y \leq h$). Nous désignerons cette condition par le numéro (4).

Avant de poursuivre le calcul, faisons encore quelques remarques sur la fonction $\xi(y)$ qui nous donne l'élongation maximum des différents points du batteur en fonction de leur profondeur y .

Le calcul qui va suivre pourrait être étendu sans difficulté à des formes très générales de la fonction $\xi(y)$, mais notre souci étant de ne conserver que des solutions ayant un intérêt pratique nous pourrions sans inconvénient imposer à $\xi(y)$ de satisfaire à un certain nombre de conditions.

Tout d'abord nous supposons que $\xi(y)$ est borné, ainsi que ses deux premières dérivées.

Cette condition correspond à l'absence de décrochements brusques et de points anguleux dans le profil du batteur considéré au moment de son élongation maximum. Cette restriction est justifiée par le fait que de telles irrégularités provoqueraient nécessairement des décollements dont la présente théorie ne peut tenir compte. En effet, il existe en général des courants ascendants ou descendants le long du batteur, et ces courants ne pourraient contourner les points

anguleux sans qu'il y ait, soit des décollements, soit des vitesses locales infinies, ce qui serait alors en contradiction avec la condition (4).

Ensuite, dans le but de simplifier certaines démonstrations données en annexes, il sera intéressant de faire également une restriction sur la dérivée troisième de $\xi(y)$. Nous admettrons donc que $\xi'''(y)$ est bornée partout sur $(0, h)$, sauf peut-être en un nombre fini de points de discontinuité. Cette dernière condition ne restreint nullement la généralité de la théorie au point de vue des applications pratiques.

Le problème mathématique ainsi posé est celui de la recherche d'une fonction définie par une équation linéaire homogène ($\Delta \Phi = 0$) et des conditions aux limites linéaires non homogènes.

On sait que, dans ces conditions, il suffit de connaître une seule solution particulière et la solution générale du problème rendu homogène en supprimant le second membre de (2), pour pouvoir reconstituer par addition toutes les solutions du problème non homogène satisfaisant aux conditions (1), (2), (3) et (4) dans leur intégrité.

Ce qui précède peut laisser craindre que le problème posé ne comporte une infinité de solutions. Nous verrons cependant qu'il n'en existe qu'une satisfaisant à la condition qu'aucune houle ne semble provenir de l'infini (un clapotis étant bien entendu considéré comme résultant de la rencontre de deux houles de sens opposés). Cette condition, qui serait délicate à exprimer rigoureusement en langage mathématique, a cependant un sens physique très clair. On pourrait l'appeler la condition d'amortissement total.

Nous pouvons par conséquent diviser notre étude en trois parties :

- 1° Etude du problème homogène,
- 2° Recherche d'une solution particulière,
- 3° Détermination de la solution définitive.

1° ETUDE DU PROBLÈME HOMOGÈNE (conditions aux limites sans second membre).

La solution générale du problème homogène est connue : c'est une combinaison linéaire arbitraire de fonctions de la forme :

$$\cos m_i x \operatorname{ch} m_i y \cos k_i (t - t_0) \quad (5)$$

m_i et k_i étant liés par la relation :

$$k_i^2 = m_i g \operatorname{th} m_i h$$

Physiquement parlant, il s'agit d'une combinaison linéaire de clapotis ayant tous un ventre d'amplitude verticale au droit du batteur. Cela

est bien naturel, le fait de supprimer le second membre de (2) revenant à étudier les mouvements pouvant avoir lieu quand le batteur est arrêté dans sa position médiane.

Ce résultat peut encore recevoir une interprétation intéressante. On sait en effet que de tels clapotis peuvent être considérés comme provenant de la réflexion d'une houle incidente sur une paroi verticale occupant la position moyenne du batteur. Le fait que les mathématiques montrent que l'on peut superposer un tel clapotis avec le mouvement de l'eau résultant de l'action du batteur, signifie sur le plan physique *qu'un batteur en mouvement est capable de réfléchir les houles incidentes exactement comme une paroi immobile*.

2° RECHERCHE D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE

L'examen du second membre de (2) suggère de rechercher une solution particulière de la forme :

$$\Phi' = \varphi' \cos kt \quad (6)$$

φ' était une fonction harmonique de x et de y seulement.

Les conditions (1), (2), (3) et (4) deviennent alors :

$$\varphi' - \frac{g}{k^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} y = h \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = k \xi(y) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} x = 0 \\ 0 \leq y \leq h \end{cases} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\varphi' \text{ fini} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 0 \leq x \\ 0 \leq y \leq h \end{cases} \quad (10)$$

Ainsi que l'a indiqué M. WEINSTEIN (1), il existe une infinité de fonctions harmoniques satisfaisant aux conditions (7), (9) et (10). Ce sont les fonctions :

$$\varphi_n = \frac{k}{m_n} \operatorname{ch} m_n y \sin m_n x \quad \text{pour} \quad n = 0 \quad (11)$$

$$\varphi_n = -\frac{k}{m_n} \cos m_n y e^{-m_n x} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (12)$$

Dans ces expressions, m_0 est la solution positive de l'équation en α :

$$k^2 = \alpha g \operatorname{th} \alpha h \quad (13)$$

et $m_1, m_2, m_3, \dots$ etc., sont, dans l'ordre croissant, les solutions positives de l'équation en α :

$$k^2 = -\alpha g \operatorname{tg} \alpha h \quad (14)$$

Nous allons montrer que l'on peut trouver une combinaison linéaire φ' de ces fonctions :

$$\varphi' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n \quad (15)$$

qui satisfasse à toutes les conditions (7), (8), (9) et (10).

Commençons par déterminer les coefficients de façon à ce que la condition (8) soit satisfaite. Cette condition devient :

$$c_0 \operatorname{ch} m_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos m_n y = \xi(y) \quad (16)$$

Nous sommes donc conduits à rechercher la décomposition de $\xi(y)$ suivant les fonctions :

$$\operatorname{ch} m_0 y, \cos m_1 y, \cos m_2 y, \cos m_3 y, \dots \quad (17)$$

Suivant en cela M. HAVELOCK, nous admettrons que cette décomposition est possible en renvoyant à l'annexe une justification plus précise, ainsi que la détermination des coefficients c_n qui sont donnés par les formules :

$$c_0 = 2 m_0 \frac{\int_0^h \xi(z) \operatorname{ch} m_0 z \, dz}{\operatorname{sh} m_0 h \operatorname{ch} m_0 h + m_0 h} \quad (18)$$

$$c_n = 2 m_n \frac{\int_0^h \xi(z) \cos m_n z \, dz}{\sin m_n h \cos m_n h + m_n h} \quad (19)$$

Avec ces coefficients, la fonction harmonique φ' définie par la série (15) satisfait aux conditions (7), (8), (9) et (10).

3° DÉTERMINATION DE LA FONCTION DÉFINITIVE.

Si nous revenons à la fonction $\Phi' = \varphi' \cos kt$, nous voyons que le premier terme de la série (15) représente un clapotis établi uniformément du batteur à l'infini. Au contraire, les termes suivants représentent une perturbation qui n'est sensible qu'au voisinage du batteur et qui décroît très rapidement lorsqu'on s'en éloigne.

La condition que nous nous étions fixée de ne pas avoir de houle venant de l'infini n'est pas directement vérifiée par cette fonction puisque, à l'infini, celle-ci représente un clapotis, c'est-à-dire le mouvement résultant de la rencontre de deux trains de houle de sens opposés. La correction qu'il est nécessaire de lui apporter est

(1) C. R. 1927, p. 497.

FICHE N° 3

Batteur à simple articulation à axe placé au-dessus de la surface libre

PRINCIPE. — LOI DU MOUVEMENT.

Volet simple oscillant articulé au-dessus de la surface libre et ne descendant pas jusqu'au fond. Le mouvement imprimé aux particules d'eau est assez éloigné de celui de la houle au voisinage du batteur, mais il se régularise à mesure que la distance parcourue augmente et l'on obtient finalement une houle acceptable, au moins pour les faibles cambrures.

CALCUL DE L'AMPLITUDE DE LA HOULE PRODUITE :

La théorie ne peut donner l'amplitude de la houle produite.

INERTIE :

Elle est comparable à celle du volet articulé au fond du canal.

CONSTRUCTION :

La construction peut être très simple.

ENTRETIEN :

Il n'y a aucune articulation ou palier sous l'eau; l'entretien est donc minime.

RÉGLAGE :

Le réglage de l'amplitude se fait en modifiant le point d'articulation sur le volet de la bielle qui transmet le mouvement.

Remarque. — Ce volet ne présentant aucune articulation dans l'eau et ne descendant pas jusqu'au fond peut être employé avantageusement dans les modèles comportant un fond mobile et des courants.

APPAREIL EMPLOYÉ AU FLUSSBAULABORATORIUM A DRESDE.

FICHE N° 4

Batteur piston

PRINCIPE. — LOI DU MOUVEMENT.

Ce batteur est constitué par un volet animé d'un mouvement de translation en général parallèle à la surface de l'eau au repos.

Le mouvement donné à l'eau est un mouvement de translation horizontal; ce batteur donnera donc ses meilleurs résultats pour des houles de grande longueur d'onde par rapport à la profondeur, ainsi qu'il est exposé dans l'article de M. BRÉSEL.

CALCUL DE L'AMPLITUDE DE LA HOULE PRODUITE :

La théorie fournit l'expression suivante pour la demi-amplitude :

$$a = 2e \frac{sh m h ch m h + m h}{sh^2 m h}$$

CONSTRUCTION :

Elle est très simple : l'appareil peut être très rustique. Il peut être suspendu, comme dans le cas indiqué par la figure, ou reposer sur un ou plusieurs galets.

INERTIE :

L'inertie est du même ordre que celle d'un volet à simple articulation.

ENTRETIEN :

Il y a très peu d'articulations et on peut éviter d'avoir des articulations immergées; aussi l'entretien est-il très simple.

MOBILITÉ :

Elle est comparable à celle du volet à double articulation.

RÉGLAGE :

L'amplitude se règle en agissant sur la course du piston.

POUVOIR RÉFLÉCHISSANT :

Le batteur est réfléchissant et nécessite donc l'emploi d'un filtre.

Photographie communiquée par le Beach Erosion Board (U.S.A.).

d'ailleurs facile à trouver : il suffit d'ajouter à la solution particulière la fonction :

$$\Phi'' = -c_0 \frac{k}{m_0} \operatorname{ch} m_0 y \cos m_0 x \sin kt \quad (20)$$

qui est une solution de l'équation sans second membre [voir formule (5)].

On vérifie d'ailleurs aisément que parmi toutes les solutions possibles, seule la fonction $\Phi = \Phi' + \Phi''$ satisfait à la condition d'amortissement total.

Nous sommes donc en mesure d'écrire l'expression de la fonction de courant Φ répondant à toutes les conditions énoncées (dans cette expression nous avons supprimé l'indice zéro pour simplifier l'écriture) :

$$\Phi = -\frac{k}{m} c \operatorname{ch} my \sin(kt - mx) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{k}{m_n} \cos m_n y e^{-m_n x} \cos kt \quad (21)$$

$c = c_0$ et les c_n ayant les valeurs données par (18) et (19).

Il est particulièrement intéressant de calculer à partir de cette fonction la valeur des déplacements X et Y des particules dont la position moyenne a pour coordonnées initiales x et y , on a :

$$X = c \operatorname{ch} my \sin(kt - mx) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos m_n y e^{-m_n x} \sin kt \quad (22)$$

$$Y = c \operatorname{sh} my \cos(kt - mx) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin m_n y e^{-m_n x} \sin kt \quad (23)$$

On en déduit immédiatement la valeur de la demi-amplitude a de la houle :

$$a = c \operatorname{sh} mh \quad (24)$$

La formule (21) permet également d'évaluer les fluctuations de pression. On a en effet, toujours en négligeant les termes du second ordre :

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g(h - y)$$

En remplaçant Φ par sa valeur (21), il vient :

$$\frac{p}{\rho} = g(h - y) + ga \frac{\operatorname{ch} my}{\operatorname{ch} mh} \cos(kt - mx) + \sum_{n=1}^{\infty} gc_n \operatorname{tg} m_n h \cos m_n y e^{-m_n x} \sin kt \quad (25)$$

Si l'on fait $x = 0$ dans cette formule, on obtient l'expression de la pression agissant sur le batteur. On voit que cette pression comporte trois termes :

a) La pression « hydrostatique » :

$$p_H = \rho g(h - y)$$

b) Une fluctuation de pression :

$$p_n = \rho ga \frac{\operatorname{ch} my}{\operatorname{ch} mh} \cos kt,$$

que nous dirons normale ou classique, due à la houle créée. Cette pression est en phase avec la vitesse du batteur et pour la vaincre celui-ci doit fournir un certain travail, la puissance ainsi consommée se retrouvant dans la houle.

c) Une fluctuation de pression :

$$p_i = \rho g \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{tg} m_n h \cos m_n y e^{-m_n x} \sin kt$$

en quadrature de phase avec la vitesse du batteur. Cette fluctuation ne travaille pas en moyenne, c'est-à-dire que sur un nombre entier de cycles, elle ne consomme ni ne fournit d'énergie.

Cette troisième composante agit exactement comme une augmentation de l'inertie du volet, c'est pour cela que nous l'appellerons fluctuation de pression d'inertie.

Remarquons encore que, le plus souvent, les volets sont mouillés par l'eau sur leurs deux faces et qu'ils émettent ainsi des houles dans les deux sens. Dans ce cas, les pressions hydrostatiques régnant de part et d'autre du volet s'équilibrent, mais par contre les autres fluctuations de pressions s'ajoutent. Leurs effets sont ainsi doublés.

(A suivre.)