NOTULES HYDRAULIQUES
HYDRAULIC BRIEFS

Remarques sur la célérité de la houle irrotationnelle exacte au troisième ordre

Notes on the celerity of irrotational waves to the third order

PAR F. BIÉSEL
INGÉNIEUR AU LABORATOIRE DAUPHINOIS D'HYDRAULIQUE

English synopsis, p. 355.

Comme on le sait, la célérité de la houle en profondeur finie est donnée, dans la théorie irrotationnelle exacte au premier ordre, par la formule :

$$c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\,\text{th}\,.\,2\pi\,\frac{H}{L}}$$

c étant la célérité,
L la longueur d'onde,
H la profondeur de l'eau au repos,
g l'accélération de la pesanteur.

Dans cette formule, l'amplitude de la houle, supposée infiniment petite, n'intervient pas.

Dans ses *Mathematical and Physical Papers*, STOKES, poussant les calculs jusqu'au troisième ordre, l'infiniment petit étant l'amplitude, donne une expression de la célérité à cet ordre d'approximation.

Mais, comme le fait remarquer STOKES lui-même, il est possible de définir une infinité de célérités pour une houle, suivant le système de référence auquel est rapportée cette célérité.

Il porte principalement son attention sur les deux suivantes :

— Vitesse avec laquelle se propage le profil de la houle dans un système de références où la vitesse horizontale en chaque point de l'espace occupé d'une façon permanente par le fluide est nulle en moyenne dans le temps.

— Vitesse avec laquelle se propage le profil de la houle dans l'espace, dans un système de références où la projection horizontale de la vitesse du centre de gravité de la masse fluide comprise entre deux plans suffisamment éloignés, normaux à la direction de propagation, est nulle en moyenne dans le temps.

La formule de célérité que donne STOKES lorsque les approximations sont poussées au troisième ordre est en fait calculée suivant la première définition. Mais la deuxième peut être, dans certains cas, la plus intéressante; par exemple, lorsque l'on considère la propagation de la houle dans un canal limité, le centre de gravité de la masse fluide contenue dans ce canal reste fixe en moyenne.

Or, STOKES n'a pas établi la formule dans ce cas et, à notre connaissance, aucun des auteurs qui ont écrit sur les théories de la houle ne se sont penchés sur ce problème. De plus, il intervient dans cette formule une quantité h qui n'est pas la profondeur moyenne ou profondeur de l'eau au repos, seule quantité accessible à la mesure.

Aussi, nous a-t-il semblé bon de présenter dans cette notule le calcul très simple qui permet de passer de la formule donnée par STOKES à celle qui résulte de la deuxième définition et d'écrire cette formule en fonction de la profondeur de l'eau au repos.

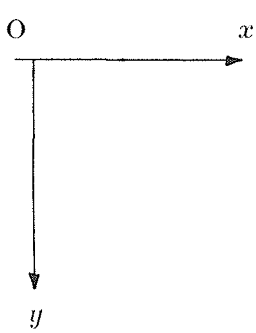
⁂

Les notations sont celles indiquées plus haut; nous désignerons de plus, par $2a$, l'amplitude de la houle (distance de crête à creux) et poserons :

$$m = \frac{2\pi}{L}$$

Les axes ont la disposition suivante : l'axe Oy est dirigé vers le bas, l'axe Ox est dirigé de gauche à droite. STOKES ne précise pas l'origine des axes : nous le ferons par la suite.

STOKES rend le mouvement permanent en imprimant à l'eau un mouvement de translation de vitesse $-c$; c est la célérité correspondant à la première définition : de cette façon, le résultat cherché peut être posé à priori sous une forme simple et les calculs s'en trouvent facilités.



Il parvient ainsi à deux relations exprimant x et y en fonction de la fonction potentielle Φ et de la fonction de courant ψ. Ces relations sont les suivantes :

$$x = -\frac{\Phi}{c} + 2\,b\,\mathrm{ch}\,m\,\frac{\psi + k}{c}\,\sin m\,\frac{\Phi}{c}$$
$$-\,2\,\frac{S_2 + 1}{D_1^2}\,m\,b^2\,\mathrm{ch}\,2\,m\,\frac{\psi + k}{c}\,\sin 2\,m\,\frac{\Phi}{c}$$
$$+\,\frac{1}{D_1^4}\,(3\,S_4 + 4\,S_2 + 4)\,m^2\,b^3\,\mathrm{ch}\,3\,m\,\frac{\psi + k}{c}\,\sin 3\,m\,\frac{\Phi}{c}$$

$$y = -\frac{\psi}{c} + 2\,b\,\mathrm{sh}\,m\,\frac{\psi + k}{c}\,\cos m\,\frac{\Phi}{c}$$
$$-\,2\,\frac{S_2 + 1}{D_1^2}\,m\,b^2\,\mathrm{sh}\,2\,m\,\frac{\psi + k}{c}\,\cos 2\,m\,\frac{\Phi}{c}$$
$$+\,\frac{1}{D_1^4}\,(3\,S_4 + 4\,S_2 + 4)\,m^2\,b^3\,\mathrm{sh}\,3\,m\,\frac{\psi + k}{c}\,\cos 3\,m\,\frac{\Phi}{c}$$

Dans ces équations, on a posé, pour simplifier l'écriture :

$$S_j = 2\,\mathrm{ch}\,j\,\frac{mk}{c}$$

et

$$D_j = 2\,\mathrm{sh}\,j\,\frac{mk}{c}$$

D'autre part, b est une fonction de a et l'on a la relation :

$$b\,D_1 = a$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur au deuxième.

La valeur de la fonction de courant ψ est en surface $\psi = 0$ et au fond qui est à la cote $y = h$, $\psi = -k$. Il en résulte que k est le débit pour un canal de largeur unité.

STOKES en déduit les relations :

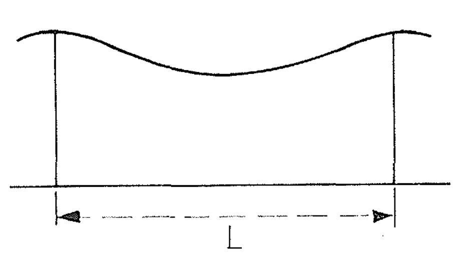
$$k = ch \tag{2}$$

$$\frac{mc^2}{g} = \frac{D_1}{S_1} + \frac{1}{S_1\,D_1}\,(S_4 + 2\,S_2 + 12)\,b^2\,m^2 \tag{3}$$

Nous renvoyons, pour le détail des calculs, aux *Papers* de STOKES.

⁂

Nous allons, dans les axes pour lesquels le mouvement est permanent, chercher la vitesse c' du centre de gravité; nous aurons ainsi la célérité rapportée à ce point. Nous pourrions pour cela



expliciter Φ, calculer les vitesses et l'équation $y = f(x)$ de la surface libre. Les calculs sont longs mais ne présentent pas de difficultés particulières.

Une remarque simple permet de procéder autrement : un courant uniforme de vitesse c' sur une profondeur H (H étant la profondeur moyenne ou profondeur de l'eau au repos) a pour débit k, débit du mouvement permanent envisagé par STOKES.

La démonstration est immédiate. Il suffit de faire le calcul de la vitesse du centre de gravité d'une masse d'eau contenue dans un domaine limité par deux plans verticaux fixes distants d'une longueur d'onde, le fond et la surface libre.

On trouve ainsi :

$$c' \mathrm{H} = k$$

mais $k = ch$ équation (2).

Par suite :

$$c' = c \frac{h}{\mathrm{H}}$$

Il nous faut donc déterminer H profondeur de l'eau au repos.

Soit δ l'ordonnée du niveau de l'eau au repos dans notre système d'axes. On a évidemment :

$$\mathrm{H} = h - \delta$$

Le calcul de δ se fait, connaissant l'équation de la surface libre, au moyen de la formule :

$$\delta = \frac{1}{\mathrm{L}} \int_0^{\mathrm{L}} y \, dx$$

Or, on a immédiatement l'équation paramétrique de la surface libre, en faisant $\psi = 0$ dans (1); on obtient ainsi x et y en fonction du paramètre Φ :

$$x = x(\varphi)$$

$$y = y(\varphi)$$

Un calcul élémentaire nous donne alors, en négligeant les termes d'ordre supérieur au troisième :

$$\delta = -\frac{\pi a^2}{\mathrm{L}} \coth mh$$

Dans ces conditions, le calcul de c' est immédiat; suivant la remarque faite plus haut, seule la profondeur H (et non h) étant accessible à la mesure, il est tout indiqué de calculer c' en fonction de H.

La célérité c est donnée par la formule (3) qui peut s'écrire :

$$\frac{mc^2}{g} = \operatorname{th} mh \, (1 + \mathrm{K}\, m^2 a^2)$$

avec :

$$\mathrm{K} = \frac{\operatorname{ch} 4\,mh + 2 \operatorname{ch} 2\,mh + 6}{8 \operatorname{sh}^4 mh}$$

Au quatrième ordre près :

$$c' = \sqrt{\frac{g}{m} \operatorname{th} mh} \left(1 + \frac{\mathrm{K}}{2} m^2 a^2\right)$$

Par suite, au quatrième ordre près :

$$c' = \sqrt{\frac{g}{m} \operatorname{th} mh} \left(1 + \frac{\mathrm{K}}{2} m^2 a^2 + \frac{\delta}{\mathrm{H}}\right)$$

Toujours à la même approximation, on peut écrire :

$$\operatorname{th} mh = \operatorname{th} m\mathrm{H} \left(1 - \frac{m^2 a^2}{2} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 m\mathrm{H}}\right)$$

et dans le coefficient du terme en a^2, on peut remplacer h par H.

Par suite :

$$c' = \sqrt{\frac{g\mathrm{L}}{2\pi} \operatorname{th} 2\pi \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{L}}} \left[1 + \frac{2\pi^2 a^2}{\mathrm{L}^2} \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{8\pi\mathrm{H}}{\mathrm{L}} + 2 \operatorname{ch} \frac{4\pi\mathrm{H}}{\mathrm{L}} + 6}{8 \operatorname{sh}^4 \frac{2\pi\mathrm{H}}{\mathrm{L}}} - \frac{1}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{2\pi\mathrm{H}}{\mathrm{L}}} - \frac{\coth \frac{2\pi\mathrm{H}}{\mathrm{L}}}{\frac{2\pi\mathrm{H}}{\mathrm{L}}} \right) \right]$$

Le calcul ci-dessus nous a servi à l'occasion de l'interprétation de mesures et d'essais en canal entrepris pour la Direction du Port de Marseille et la Direction des Concessions de la Chambre de Commerce de Marseille. Les courbes expérimentales ont même allure que les courbes théoriques et n'en diffèrent que de quantités de l'ordre de 1 %.