NOTULES HYDRAULIQUES
HYDRAULIC BRIEFS

Translation isothermique et opérateurs de quelques transformations élémentaires

Transformation of flow nets by the generalized translation method, with same simple examples

English synopsis, p. 463.

I. — *Réseaux isothermes — Translation isothermique — Transformations conformes — Opérateur d'une transformation.*

Comme on le sait, un champ irrotationnel plan peut être représenté par une fonction analytique $f(z) = \varphi(xy) + i\psi(xy)$; on a coutume de le présenter graphiquement sous la forme de deux familles de courbes orthogonales $\varphi(xy) = C$, $\psi(xy) = C'$, C et C' prenant des valeurs croissant en progression arithmétique de raison 1;

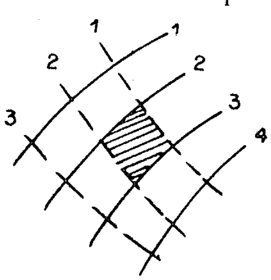

FIG. 1

nous appellerons « carreau » le carré curviligne découpé par deux courbes d'une famille et deux courbes de l'autre (fig. 1). De tels réseaux sont souvent dits : « réseaux isothermes ».

Les réseaux isothermes ont des interprétations physiques multiples; on peut, en particulier, les considérer comme représentant des écoulements hydrodynamiques plans : nous adopterons le langage découlant d'une telle interprétation et parlerons de « lignes de courant » et d' « équipotentielles » pour désigner les deux familles de courbes.

Un réseau isotherme particulièrement simple

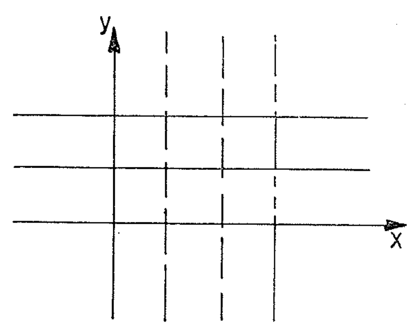

FIG. 2

est le champ $f(z) \equiv z = x + iy$ que nous appellerons « damier » à cause de la forme et de la disposition des lignes des deux familles (fig. 2); un point du plan peut être repéré par les valeurs de x et de y, c'est-à-dire par ses coordonnées cartésiennes; mais on voit qu'on peut aussi bien le faire par les valeurs prises en ce point par les lignes φ et ψ d'un réseau f (z) quelconque placé sur ce plan; ce sont les « coordonnées isothermiques » du point.

On sait, d'autre part, qu'on peut définir une translation ordinaire en déplaçant un point d'un certain nombre de carreaux le long des lignes $x =$ Cte et $y =$ Cte ou par une composition de deux translations de ce genre; de la même façon, une « translation isothermique » consistera à déplacer un point le long des lignes $\varphi = C$ ou $\psi = C'$ qui jouent le rôle des lignes $x =$ Cte et $y =$ Cte.

De telles translations sont des transformations conformes particulières. D'une façon plus générale, une transformation conforme permettant de passer d'une figure du plan z à une figure du plan Z, peut être définie par la correspondance entre deux réseaux $g(z)$ et $h(\mathrm{Z})$; on l'écrit sous la forme :

$$g(z) = h(\mathrm{Z})$$

ou

$$\mathrm{Z} = f(z)$$

Ainsi une homothétie peut être définie par la relation $z = k\mathrm{Z}$, k étant une constante réelle, c'est-à-dire par la correspondance entre deux damiers de même orientation.

Considérons un réseau qui permet de passer d'un point à son transformé par une transformation donnée au moyen d'une translation isothermique d'un nombre donné de carreaux, le long des lignes de courant ou des équipotentielles. Un tel réseau est dit « opérateur de la transformation T. »

Dans ce qui suit, nous allons chercher des opérateurs de quelques transformations.

II. — *Réseau de l'éventail — Opérateur de l'homothétie et de la rotation.*

Considérons le réseau $f \equiv \mathrm{Log}\, z$ représenté par la fig. 3. Il peut être interprêté comme une source ponctuelle; les lignes de courant sont des droites issues du point-source, les équipotentielles des cercles. Nous rappellerons ce réseau « réseau de l'éventail ». Les rayons ρ des cercles sont donnés par la relation $\mathrm{Log}\, \rho = C$.

Ce réseau constitue un opérateur de l'homothétie et de la rotation.

En effet, pour passer d'un point M à son homothétique M', il suffit de faire subir au point une translation isothermique de n carreaux le long des lignes de courant; en effet, en désignant par ρ et ρ' les rayons vecteurs de M et M' on a :

$$\mathrm{Log}\, \rho = k$$
$$\mathrm{Log}\, \rho' = k + n$$

d'où
$$\frac{\rho'}{\partial} = e^n$$

la raison de l'homothétie est e^n.

De la même façon, la rotation est une translation isothermique le long des équipotentielles.

On pourrait de même définir un opérateur de la similitude; celle-ci peut être considérée comme le produit de deux translations isothermiques : son opérateur serait donc un réseau constitué de spirales logarithmiques.

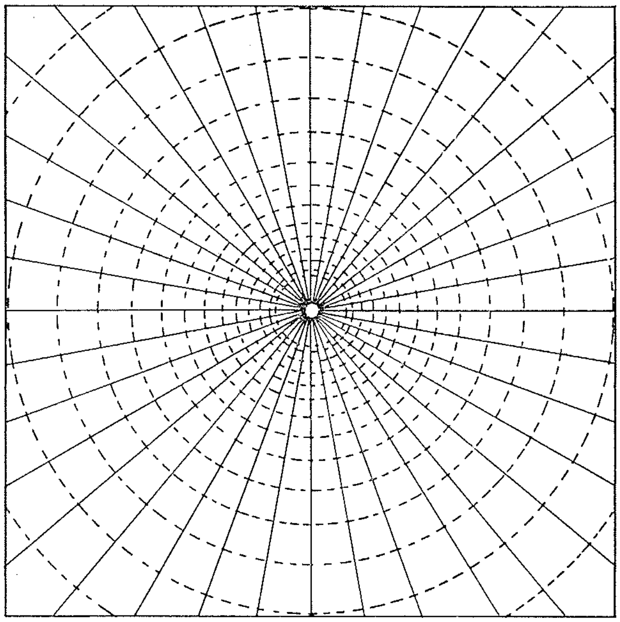

FIG. 3

III. — *Transformation éventail damier — Transformation de l'éventail.*

La transformation $\mathrm{Z} = \mathrm{Log}\, z$ définit une correspondance entre l'éventail g $(z) \equiv \mathrm{Log}\, z$ que nous noterons E et une bande du damier h $(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z}$ que nous noterons D.

Aux lignes de courant ψ_0, ψ_1, ψ_2... de E correspondent les lignes ψ_0, ψ_1,... du damier D. Aux cercles, lignes équipotentielles de E, correspondent les droites équidistantes ψ_0, ψ_1, ψ_2... de D. (Fig. 4).

La transformation $\mathrm{Z} = z^r$ que l'on peut écrire $\mathrm{Log}\, \mathrm{Z} = r\, \mathrm{Log}\, z$ peut de même être interprétée comme la correspondance entre deux éventails identiques mais dont les coordonnées isother-

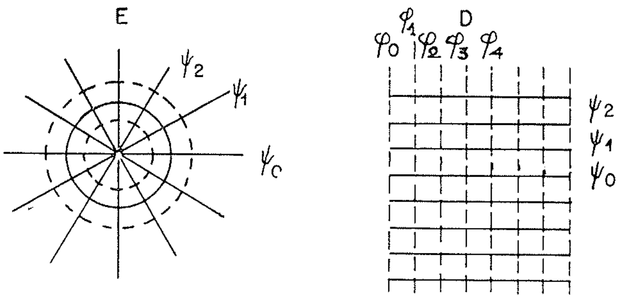

FIG. 4

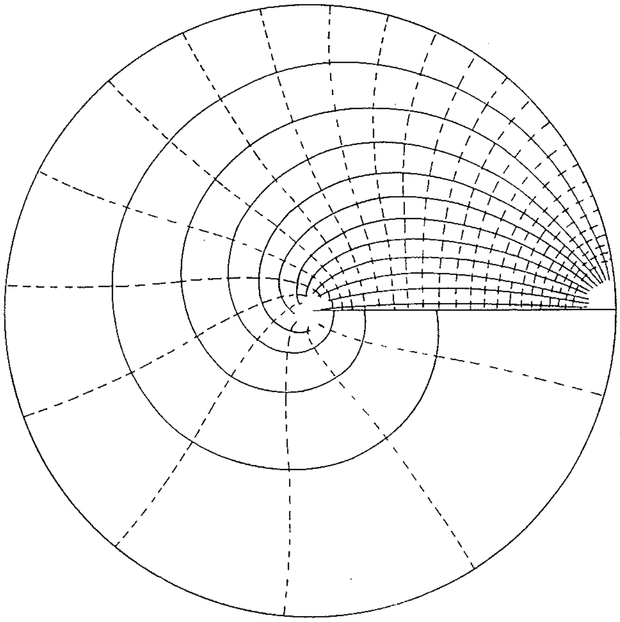

FIG. 7

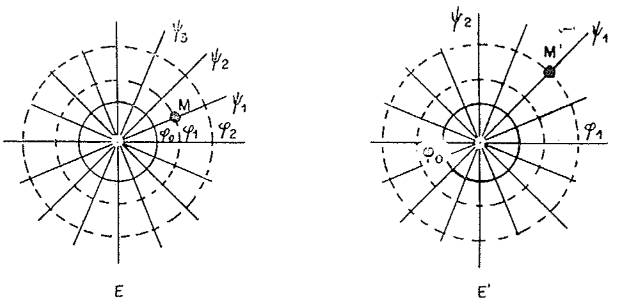

FIG. 5

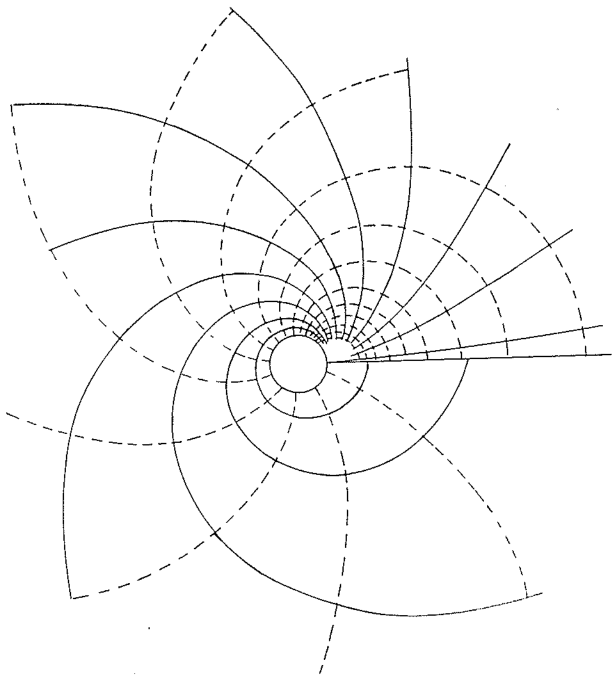

FIG. 8

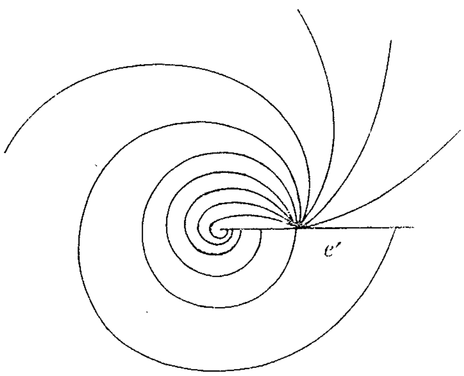

FIG. 6

miques diffèrent; celles du plan Z s'obtiennent à partir de celles du plan z en les divisant par r.

Nous appellerons cette transformation, « transformation en éventail » de raison r.

La figure 5 représente les deux réseaux servant à définir une transformation en éventail de raison 2.

IV. — *Opérateur de la transformation de l'éventail.*

Nous connaissons l'opérateur de l'homothétie : c'est l'éventail; nous allons en déduire celui de la transformation de l'éventail.

Considérons pour ceci la figure 5 qui vient de nous servir à définir la transformation de l'éventail.

Transformons les deux éventails E et E' par une transformation damier-éventail; le réseau D' a des carreaux deux fois plus grands que ceux du réseau D; le point M' sur le damier D' se déduit donc du point M sur le damier D par une homothétie.

Considérons donc un éventail e et faisons lui subir une transformation damier éventail D.E. $z = \text{Log. Z}$. Nous obtenons ainsi le réseau cherché; son équation est $f(z) = \text{Log Log}\, z$: le point e' est le point de coordonnées isothermiques 0,0 de l'éventail; c'est le point invariant dans la transformation de l'éventail.

Les lignes de courant sont des spirales logarithmiques; en effet les droites de l'éventail e sur le plan D peuvent être considérées comme des loxodromiques d'angles divers du damier D. Leurs transformées sur le plan E sont donc des loxodromiques de l'éventail e, c'est-à-dire des spirales logarithmiques de divers angles; l'une d'elles est un cercle de centre O.

La transformation de l'éventail s'effectue par translation isothermique suivant ces spirales logarithmiques; on change la raison de la transformation en éventail en changeant le nombre de carreaux de la translation.

Nous avons représenté, figure 6, une vue d'ensemble de ce réseau, figure 7 la partie intérieure au cercle à plus grande échelle, et fig. 8 une vue plus étendue de l'extérieur du cercle.

P. DANEL et G. SAUVAGE DE SAINT-MARC.