

## LABORATORY PRACTICE

# A statistical analysis of errors in point gauge measurements

*Texte français, p. 524.*

With the present issue, we commence publication of a series of extracts from a thesis of Ingénieur-Docteur, entitled "Les Appareils de Mesure de la Houle sur Modèles réduits", which was recently upheld before the Faculty of Science of Grenoble University. The title of the thesis may be translated into English as "Research into Model Wave Measuring Equipment". However, the chapter which is summarized hereunder is of more general interest inasmuch as it shows how the *probable magnitude of errors arising from the use of standard measuring equipment* may be estimated. The method of calculation used will thus be of service to practising engineers and research workers in many ways:—

(i) To give one example, suppose that an electrical engineer buys a number of similar resistance boxes of which he wishes to check the accuracy over the entire working range. Having no precision resistances against which his purchases can be checked, he is obliged to compare the resistance readings given by the various boxes themselves. This he does for a wide range A, B, C, D... of unknown resistances, and from the results obtained using the various boxes 1, 2, 3, 4... he can construct an Analysis of Variance table. The average error (or the maximum probable error, etc.) of the resistance box readings can then be found without difficulty.

(ii) A hydraulic research engineer has a large number of similarly constructed point gauges at his disposal. He desires to know the maximum probable error of reading (or of the difference between two readings), but has no precision gauge or cathetometer available for this purpose. He is therefore obliged to compare the point gauges amongst themselves, on the assumption that no systematic errors of scale graduation exist.

This is the particular application of the Analysis of Variance technique to be described in the present article.

\*\*\*

From what has already been said, it will be clear that the method is applicable in the following circumstances:—

(i) Standard equipment of a certain make is used to make measurements of some given type. It is desired to find the average magnitude of the instrumental errors which affect these measurements over the entire working range of the instruments employed. In specifying that the equipment must be of a given make, we tacitly assume that the inaccuracies of manufacture are of the same order of magnitude for all such instruments. In technical terms, this amounts to saying that these errors should be distributed according to the same probability law.

(ii) The measurement of such errors can, of course, always be carried out simply if a precision gauge or standard is available for verificatory purposes.

The method to be described is applicable when no such standard is available or cannot be used over the whole working range; a number of instruments of the type to be tested must then be compared, and the discrepancies between various test results analysed by the "Analysis of Variance" technique to be described below.

The lack of a standard gauge makes it however *impossible to detect systematic errors* by this (or any other) method; by systematic errors, we mean of course all errors affecting all instruments equally (such as those due to temperature changes). Such errors may be however in-existent

## DÉFINITIONS DE QUELQUES TERMES EMPLOYÉS DANS LES CALCULS STATISTIQUES

## DEFINITION OF SOME COMMON STATISTICAL TERMS

1°) Distributions Statistiques.

$x$  est une variable (continue ou discontinue) soumise à des variations aléatoires.

$f(x)$  = loi de distribution des valeurs de  $x$ , tel que :  
 $dF = f(x) dx$  exprime la probabilité que  $x$  se trouve entre les limites  $(x \pm \frac{dx}{2})$ . Notons que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \text{ par définition.}$$

On écrit parfois

$$P(x_2 > x) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1)$$

Moyenne arithmétique  $\mu$ , donnant le "centre" des  $x$  sur  $Ox$ <sup>(1)</sup>

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Ecart type  $\sigma$  permettant de mesurer la dispersion des  $x$ <sup>(2)</sup>

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

2°) Echantillons choisis par un procédé aléatoire.

Supposons que le nombre d'articles dans le groupe d'échantillons étudié s'élève à  $m$  : les valeurs correspondantes de  $x$  seront désignées par :  $x_1, x_2, \dots, x_m$

Moyenne arithmétique,  $\bar{x}$ .

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m} \text{ fournit une estimation de } \mu$$

Ecart type de l'échantillon,  $s$ .

La meilleure estimation de  $\sigma^2$  est donnée par

$$s^2 = \frac{\sum_{n=1}^m (x_n - \bar{x})^2}{(m-1)}$$

où  $(m-1)$  est le nombre de degrés de liberté disponible pour le calcul de  $s$ .

Degrés de liberté.

Le nombre de comparaisons indépendantes dont on dispose pour calculer la valeur d'un paramètre. Par exemple,  $m$  valeurs de  $x$  sont utilisées plus haut pour calculer  $s$ , cependant  $\bar{x}$  est supposé connu, et le nombre de valeurs indépendantes de  $x$  n'est que  $m-1$  (car connaissant  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$  et  $\bar{x}$  nous pouvons calculer  $x_m$ ).

1°) Frequency Distributions.

$x$  is a variable, not necessarily continuous, which is subject to chance variations;

$f(x)$  = frequency distribution law of the  $x$ 's, such that  
 $dF = f(x) dx$  gives the probability that  $x$  lies between the limits  $(x \pm \frac{dx}{2})$ ;  $(x - \frac{dx}{2})$ ;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \text{ by definition.}$$

Occasionally probabilities are expressed in the form  
 $P(x_2 > x) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1)$

Arithmetic Mean,  $\mu$  (a measure of location)<sup>(1)</sup>

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Standard Deviation,  $\sigma$  (a measure of dispersion)<sup>(2)</sup>

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

2°) Random Samples.

Let the sample size be  $m$ ; the corresponding values of  $x$  will be denoted  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

Arithmetic Mean,  $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m} \text{ is an estimate of the population } \mu.$$

Sample Variance  $s^2$

The best estimation of  $\sigma^2$  is given by

$$s^2 = \frac{\sum_{n=1}^m (x_n - \bar{x})^2}{(m-1)}$$

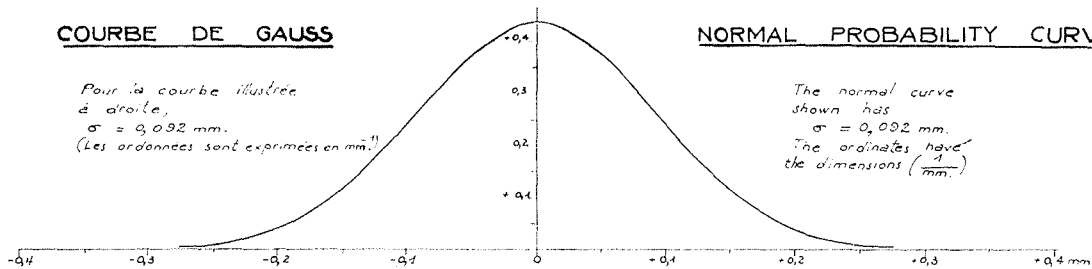
where  $(m-1)$  is the number of degrees of freedom available for calculating  $s$ .

Degrees of Freedom.

The number of independent comparisons available for calculating a sample parameter. Thus,  $m$  values of  $x$  were used above for finding  $s^2$ ; however,  $\bar{x}$  is supposed known in the formula for  $s$ , and this reduces the number of independent values of  $x$  to  $m-1$  (having  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$  and  $\bar{x}$ , we can calculate  $x_m$ ).

### COURBE DE GAUSS

Pour la courbe illustrée à droite,  
 $\sigma = 0,092 \text{ mm.}$   
 (Les ordonnées sont exprimées en  $\text{mm}^{-1}$ )



### NORMAL PROBABILITY CURVE

The normal curve shown has  
 $\sigma = 0,092 \text{ mm.}$   
 The ordinates have the dimensions  $(\frac{1}{\text{mm}})$

L'équation de la courbe de Gauss ayant  $\mu = 0$  s'écrit

$$dF = f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{dx}{\sigma}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) x dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) x^2 dx = \sigma^2$$

et  $\sigma$  s'identifie bien à l'écart-type, défini plus haut.

<sup>(1)(2)</sup> Note. Il existe d'autres paramètres semblables à  $\mu$  et  $\sigma$ , mais ces derniers sont les plus utiles pour l'étude de la statistique supérieure.

The equation to the normal curve of mean zero is :

and consequently  $\sigma$  is exactly what has previously been defined as the standard deviation.

<sup>(1)(2)</sup> Note: Other measures of location (mode, median) and of spread (mean deviation and interquartile range) exist but are of less utility in advanced work than those given above.

(as in the case of personal errors for a large number of observers), or they may be calculable (temperature changes in the case of point gauges). If they do exist and cannot be estimated, the Analysis of Variance method gives a minimum value for the error, and this may be sufficient for some purposes (e.g., for the exclusion of defective types of instruments).

It should be remarked finally that the methods of analysis used herein are of course quite well-known to statisticians and agriculturalists, for example; the essential novelty of the present article lies in the extension of these methods to new fields of use, to which they have not hitherto been applied.

## Analysis of point gauge errors

### INTRODUCTION

A point gauge of the type illustrated in fig. 1 is a standard piece of equipment for measuring still water levels, and even, with certain precautions, fluctuating levels as in waves. The present discussion is however limited to still water surfaces, and to possible errors of measurement in this case.

The sources of error include :—

- (i) The calibrated scale and vernier,
- (ii) The "personal error" of the observer,
- (iii) Variations in scale length due to temperature changes, and so on.

There is also of course the inevitable "rounding off" error, due to the fact the vernier reads to 0.1 mm only; this point will be discussed in detail later.

The object of our analysis is to estimate the probable *total magnitude of chance errors* such as (i) and (ii) combined; no effort will be made to try to estimate the magnitude of each possible error separately. More precisely, we shall estimate the probabilities of the occurrence of errors of  $\pm 0.1$  mm,  $\pm 0.2$  mm and so on when gauges of the type under test are used for determining still water levels.

As stated above, we presume that no precision cathetometer is available for the tests, and we are in consequence obliged to check the compatibility of different point gauge reading amongst themselves. The procedure may be illustrated as follows :—

Suppose that two similar point gauges 1 and 2, of which the zeros have *not* been set to the same level by prior manipulation, are used to read two different water levels A and B; the corresponding

readings will be denoted by A1, A2, B1, and B2.

If these readings were faultless, (A1 — B1) would exactly equal (A2 — B2), as both expressions give the difference in level. In other words we would find that

$$A1 - A2 - B1 + B2 = 0$$

If this is not so, then the modulus

$$|A1 - A2 - B1 + B2|$$

could be taken as being in some way indicative of the probable error of measurement.

Here, four gauge readings provide one possible estimation of the error, i.e., one possible comparison between the readings which eliminates the effect of differences between gauge zeros and between water levels. More generally  $m$  similar gauges having different zero settings may be used to read  $n$  different levels;  $m$  and  $n$  should be chosen rather large so as to improve the accuracy of determination of the error.

In this latter case,  $mn$  readings are obtained and may be analysed by a similar procedure to that used above to give  $(m - 1)(n - 1)$  *independent* estimations of the error (for  $mn = 4$ , we had *one* such estimation). In statistical terminology, one then speaks of having  $(m - 1)(n - 1)$  "degrees of freedom" available for the calculation of the error.

The calculation of the  $(m - 1)(n - 1)$  estimations of the error cannot however be carried out directly. We must first assume that the error is distributed according to a Gaussian law of probability (see Plate 1). More precisely, if L is the true level (as would be found using a highly accurate cathetometer), we assume that the gauge readings R are distributed according to the law

$$dF = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sigma}$$

where  $R - L = x$  (see Plate 1).

and  $dF$  expresses the probability that  $(R - L)$  lies in a given range  $\left(x - \frac{dx}{2}, x + \frac{dx}{2}\right)$ . This law is supposed to apply to the errors of measurement of all gauges of similar make, without distinction.

We now concentrate our attention on the calculation of  $\sigma$ ; once this is known we can then estimate the probabilities of errors of any given magnitude from tables of the Gauss function.

(\*) Inasmuch as the error distribution is *discontinuous* (the error having possible values of  $\pm 0.1$  mm,  $\pm 0.2$  mm in the case studied), while the normal distribution is *continuous*, this assumption needs to be clarified. This point will be discussed subsequently (see fig. 2).

To do this, it is necessary to carry out what is known as an "Analysis of Variance" of our series of *mn* readings. The modern development of this method is due largely to R.A. FISHER, though perhaps the most complete account of the theory is to be found in M. G. KENDALL's work "The Advanced theory of Statistics". It is not our present intention to give an algebraic proof that this procedure gives in fact a correct estimation of  $\sigma$  for "normally" distributed errors\*; after a brief experimental description, we shall merely outline the practical application of the method to the results obtained.

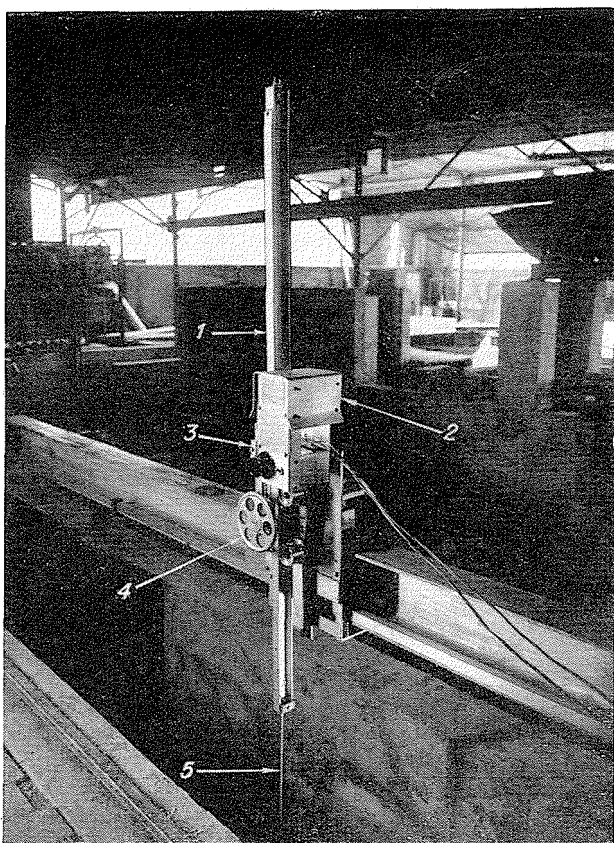


FIG. 1. — POINTE-GAUGE. — POINTE DE MESURE.

- 1. — Graduated scale (échelle graduée).
- 2. — Magic eye equipment (œil cathodique).
- 3. — Vernier.
- 4. — Hand wheel (volant).
- 5. — Point (pointe).

APPARATUS AND TESTS

The experiment was conducted with 5 gauges of the type shown in fig. 1 installed along a concrete flume.

The type of gauge used is simple in construction, and consists essentially of a vertical

duralumin rod which is moved up and down against a vernier by the hand wheel shown in the photograph; the drive used is frictional, with metal to metal contact. The scale on the main rod is graduated in millimeters, and the vernier enables the nearest 0.1 mm to be read. It should also be mentioned that the vernier is adjustable; in model work, this enables the zero of the gauge to be adjusted to the most convenient R.L.

Finally, it should be added that at a small additional expense these gauges may be fitted with "magic eye" electronic equipment, which enables readings to be taken in deep wells, etc., where it is not possible to see the gauge touch the water surface; the sectors of the "magic eye" light up when contact is made.

This equipment is manufactured commercially\*\*, and, being of standard make, lends itself well to statistical methods of error analysis.

The experiments were carried out as follows :

The flume on which the 5 gauges were installed was filled with water, and readings were taken with all gauges once the water-level was completely stabilized. The same procedure was repeated for five other water levels, the difference between the first and sixth being nearly 20 cm; in this way the working range of the gauges was fairly completely covered.

EXPERIMENTAL RESULTS

The experimental results are given in the following table :

TABLE I

Gauge	1	2	3	4	5
Water-level					
A . . . . .	118.1	130.5	56.0	223.2	133.0
B . . . . .	158.0	170.4	95.8	263.1	173.0
C . . . . .	203.1	215.4	140.9	308.2	218.1
D . . . . .	246.4	258.6	184.0	351.4	261.1
E . . . . .	287.7	299.9	225.3	392.6	302.3
F . . . . .	314.7	326.7	252.3	419.5	329.6

Each entry represents the scale reading in mm on the appropriate gauge for the water-level indicated; as stated above the gauge zeros were not previously set equal and this explains the large differences between columns.

CALCULATIONS

Though the Analysis of Variance technique applies to Table I in its primitive form, it is convenient to make certain simplifications in or-

(\*) The proof will be found on pp. 181/187 of *The Advanced Theory of Statistics*, vol. II.

(\*\*) By Etablissements NEYRPIG, Grenoble.

der to reduce the arithmetic. Consider the entries A1 and A2. The difference between them is essentially due to the difference in the zero settings of the two gauges; if there is an error, this will subsist unchanged if we subtract the difference,

$$130.5 - 118.1 = 12.4$$

from A2 and similarly, of course, from all readings in the same column 2. We can repeat this process for all the gauges, and in this way "adjust" the readings so as to eliminate most of the differences between entries due to the arbitrary zero settings of the gauges.

We may proceed in exactly the same way for the rows eliminating most of the variations to differences in level, and making all readings in column 1 (and in row A) zero.

The procedure for calculating a new entry (MN)' is then as follows

$$(MN)' = MN - M1 - AN + A1$$

Thus (B3)', for example, is found to equal

$$95.8 - 158.0 - 56.0 + 118.1 = -0.1$$

The final result of these modifications is as follows :

TABLE II

Gauge	1	2	3	4	5	
Water-level						
A.....	0	0	0	0	0	0
B.....	0	0.0	-0.1	0.0	+0.1	0.0
C.....	0	-0.1	-0.1	0.0	+0.1	-0.1
D.....	0	-0.2	-0.3	-0.1	-0.2	-0.8
E.....	0	-0.2	-0.3	-0.2	-0.3	-1.0
F.....	0	-0.4	-0.3	-0.3	+0.0	-1.0
Totals....	0	-0.9	-1.1	-0.6	-0.3	-2.9

It will be noticed that the sums by columns and rows, as well as the overall sum, have been included in the table.

The calculations then proceed as follows :

- (1). The sum of squares of the 30 entries :

$$T = 6 (0.1)^2 + 4 (0.2)^2 + 5 (0.3)^2 + (0.4)^2 = 0.83.$$

- (2). The sum of squares of the column totals :

$$C = (0.9)^2 + (1.1)^2 + (0.6)^2 + (0.3)^2 = 2.47.$$

- (3). The sum of squares of the row totals :

$$R = 2.65.$$

- (4). The square of the overall sum :

$$S = (2.9)^2 = 8.41.$$

Hence we find that

- (5). The "Sum of squares by columns" \* :

$$= \frac{C}{6} - \frac{S}{30} = 0.13133.$$

- (6). The "Sum of squares by rows" :

$$= \frac{R}{5} - \frac{S}{30} = 0.24967.$$

- (7). The "Total sum of squares" :

$$= T - \frac{S}{30} = 0.54967.$$

Furthermore the number of independent comparisons ("degrees of freedom" which can be made between

- (8). The columns, is  $(5 - 1) = 4$ .

- (9). The rows, is  $(6 - 1) = 5$ .

- (10). The individual entries, is  $(30 - 1) = 29$ .

and 11, between the "errors" in the test results themselves is :  $(5-1)(6-1) = 20$ .

The latter result will be recognized as the  $(m - 1)(n - 1)$  of the earlier discussion. The other results (8), (9) and (10) will be readily understood if it is remembered that there is only one independent comparison possible between two numbers, i.e., their difference (or their ratio, i.e., the difference of their logarithms). Between three numbers, there are two such comparisons, and so on.

We are now able to construct a "Table of Analysis of Variance" as follows :

TABLE III

	Sums of squares	Degrees of Freedom	Mean Sum of Squares
Columns ...	0.13133	4	0.032833
Rows .....	0.24967	5	0.049933
Error .....	0.16867	20	0.008433
Totals ....	0.54967	29	

What is here termed the "error sum of squares" is obtained by subtraction of (5) and (6) above from (7). The figures in the third column are found by division from the two other columns.

(\* This sum is really one sixth the sum of the squares of the column totals taken about their mean,  $-\frac{2.9}{5}$ ; similar remarks apply to (6) and (7).

The figure which interest us is :

$$0.008433$$

This is in fact an unbiased estimate of  $\sigma^2$ ,  $\sigma$  being a parameter (standard deviation) of the normal "population" of errors, as previously defined.

$$\begin{aligned} \text{Thus } \sigma &= \sqrt{0.008433} \\ &= 0.092 \text{ mm.} \end{aligned}$$

INTERPRETATION OF  $\sigma$

The significance of  $\sigma$  is as follows :

According to our previous assumption as to the law of error, we have on substituting the above found value of  $\sigma$ ,

$$dF = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2(0.092)^2}} \cdot \frac{dx}{0.092}$$

(This function is plotted in Plate 1).

From tables of the Gauss function it is found that :

- $P(|x| > 0.05) = 0.5868$  or 58.7 %;
- $P(|x| > 0.15) = 0.1030$  or 10.3 %;
- $P(|x| > 0.25) = 0.0065$  or 0.65 %;

Here,  $P(|x| > 0.05)$  denotes the probability of the error  $x$  being greater than  $\pm 0.05$  mm etc.

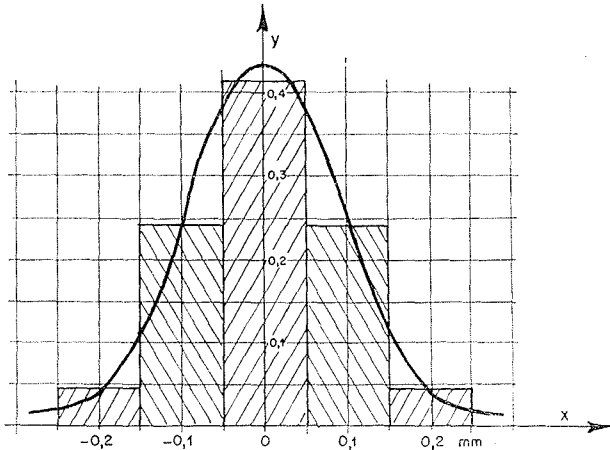


FIG. 2. — GAUSSIAN PROBABILITY CURVE.  
 Courbe de Gauss :  $\sigma = 0.092$  mm

We are now obliged to divide the continuous curve of Gauss into a number of segments, as illustrated in fig. 2, and to interpret the area of each such segment as the probability of the error having a value equal to the mid-ordinate of the range in question. In mathematical terms, this amounts to saying that the probability of an error of

- $\pm 0.3$  mm or more is 0.65 %;
- $\pm 0.2$  mm is  $(10.3 - 0.65) = 9.65$  %,
- $\pm 0.1$  mm is  $(58.7 - 10.3) = 48.4$  %,

and of zero error is : 41.3 %.

It seems that no serious error results in practice from this sort of approximation, which is frequent in statistical work.

The practical conclusion reached from the analysis is as follows:

*The maximum error to be expected in making a single reading on a still water surface with the type of gauge investigated is 0.2 mm.*

NOTE

It is worthwhile considering why in fact errors much greater than this are to be found amongst the test results. We have for example that :

$$(E2 - F2 - E5 + F5) = 0.5 \text{ mm.}$$

Now this apparent error of 0.5 mm is actually due to the combined errors of four readings. It is known that the standard deviation of the sum or difference of  $n$  variables, each having a standard deviation  $\sigma$ , is equal to  $\sigma\sqrt{n}$ . In this case :

$$0.092 \times \sqrt{4} = 0.186 \text{ mm}$$

and the probability of a combined error of 0.5 mm is as high as 3 %.

Seeing that there are 20 independent comparisons possible, the existence of this apparent error does not surprise us.

CONCLUSION

On the basis of readings taken with 5 similar point gauges on 6 different water-levels, it can be concluded that the maximum probable error incurred in a single reading with such a gauge is  $\pm 0.2$  mm, provided of course that the water is at rest.

From a practical point of view, it can be said that point gauges of the type indicated are eminently satisfactory for ordinary usage; it was desired, above all, to construct robust and inexpensive gauges rather than to aim at a very high degree of precision (which is not in fact required for most models). In any case, an inspection of the distribution of the error terms in table II suggests that the calibration of the scales attached to the gauges is actually the principal source of error. Since the time when the instruments used in these experiments were built stricter specifications have been imposed on the manufac-

turers of the scales; it can be expected that the accuracy has been markedly improved thereby.

From a more general standpoint, it is hoped that the methods of analysis described may be of interest in a wide variety of problems, not necessarily restricted to the field of hydraulics; some mention has already been made of possible applications of this sort.

G. D. RANSFORD,

*Ingénieur au Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique*

#### REFERENCES

- R. A. FISHER. — *Statistical Methods for Research Workers*. Oliver and Boyd, Londres, 1946. Traduction française par le Dr. Avan Bertrand, aux Presses Universitaires de France.
- R. A. FISHER. — *The Design of Experiments*. Oliver and Boyd, 1947.
- M. G. KENDALL. — *The Advanced Theory of Statistics*. Griffin & Co., Londres, 1945.

## LE COIN DU LABORATOIRE

# Analyse statistique des erreurs dans les mesures à la pointe

*English text, p. 518.*

*Pour les figures et pour la Bibliographie, se reporter au texte anglais, pp. 519 à 524.*

Nous commençons, aujourd'hui, la publication d'une série d'articles extraits d'une thèse d'ingénieur-docteur intitulée : « Appareils de mesure de la houle sur modèles réduits » et soutenue récemment devant la Faculté des Sciences de l'Université de Grenoble. Le chapitre que nous résumons ci-dessous présente un intérêt qui déborde le titre de la thèse. En effet, il a pour but de proposer une méthode d'estimation de la valeur probable des erreurs commises lorsque l'on utilise un appareillage de mesure courant. La méthode de calcul utilisée pourra, de bien des façons, rendre service aux techniciens et aux chercheurs. Ainsi :

1) Supposons qu'un ingénieur électricien ayant acquis une série de boîtes de résistance désire se rendre compte de leur précision sur la totalité de leur gamme d'utilisation. S'il ne possède pas de résistance de précision lui permettant d'éprouver ses acquisitions, il est contraint de comparer entre elles les diverses lectures opérées sur ses boîtes. Il fait cette opération pour un certain nombre de résistances inconnues A, B, C, D, ... et en examinant les résultats obtenus avec les boîtes 1, 2, 3, 4 ... il peut dresser un tableau d'Analyse de variance, ainsi que nous l'expliquerons plus loin. L'erreur moyenne (ou l'erreur probable maximum) caractérisant les lectures de boîtes de résistance s'en déduisent alors facilement.

2) Un ingénieur hydraulicien dispose, pour ses recherches, d'un grand nombre de pointes de mesure du même type — et construites en série. Il désire connaître l'erreur maximum probable sur une lecture (ou sur la différence de deux lectures), mais n'a à sa disposition ni pointe de précision, ni cathétomètre. Il se trouve donc dans l'obligation de comparer les pointes entre elles, en admettant qu'il n'y

a pas eu d'erreur systématique sur la graduation de l'échelle.

Telle est l'application particulière de la technique de l'Analyse de variance qui sera exposée dans le présent article.

\*  
\*\*

D'après ce qui vient d'être dit, on voit que la méthode peut s'appliquer dans les conditions suivantes :

1) On utilise, pour des mesures déterminées, un appareillage standard de fabrication donnée. Il s'agit de trouver, dans toute la plage d'utilisation des instruments employés, quelle est la valeur moyenne de l'erreur propre aux appareils qui entache les mesures. En précisant que l'appareillage doit appartenir à une série de fabrication déterminée, nous admettons facilement que les imperfections d'usinage sont du même ordre de grandeur pour chaque instrument. En termes techniques, cette hypothèse revient à admettre que ces imperfections se répartissent suivant la même loi de probabilité.

2) La mesure de telles erreurs peut, évidemment, toujours être menée à bonne fin, sans difficultés, si l'on peut disposer, pour ces opérations de contrôle, d'une pointe de précision ou d'une pointe standard.

La méthode proposée ne s'applique que si de telles conditions ne sont pas réunies ou que si la pointe standard est inapte à couvrir l'ensemble de la gamme d'utilisation nécessaire; on doit alors comparer un certain nombre d'appareils du type à contrôler et étudier, par le procédé de l'analyse de variance décrit ci-après, les écarts entre les divers résultats d'essai obtenus.

En l'absence de pointe standard, *il demeure toujours impossible de détecter des erreurs systéma-*

liques à l'aide de cette méthode (ou de n'importe quelle autre méthode); par erreurs systématiques, nous entendons, bien entendu, toute erreur affectant également tous les appareils (par exemple les erreurs dues aux variations de température). De telles erreurs peuvent néanmoins se trouver annihilées (c'est le cas des erreurs personnelles lorsque l'on dispose d'un grand nombre d'observateurs) ou calculables (les changements de température dans le cas des pointes de mesure). Lorsqu'il est impossible de les éliminer ou de les calculer, l'Analyse de variance fournit une valeur minimum de l'erreur qui, dans certains cas, peut s'avérer suffisante (par exemple lorsque l'on désire seulement déceler des types d'appareils défectueux).

Il faut remarquer enfin que les méthodes d'analyse utilisées ici sont évidemment bien connues, par les statisticiens et les agronomes par exemple; la principale innovation qu'apporte le présent article est l'extension de ces méthodes à des domaines dans lesquelles elles n'avaient pas encore été introduites.

## Analyse des erreurs de pointe de mesure

### INTRODUCTION

Une pointe de mesure telle que celle que montre la figure 1 est un appareil standard destiné à mesurer les niveaux d'eau stables et même, au prix de quelques précautions, des niveaux fluctuants comme dans la houle. Nous nous limiterons cependant, dans ce qui suit, aux niveaux stables et aux erreurs de mesure possible dans ce domaine.

Les sources d'erreurs sont :

- (1) La graduation de l'échelle et du vernier;
- (2) L'erreur personnelle de l'observateur;
- (3) Les variations de longueur de l'échelle par suite des changements de température, etc...

Il y a aussi évidemment l'inévitable erreur d'estimation provenant de ce que le vernier donne seulement le 1/10 de mm; ce point sera discuté plus en détail dans la suite.

Nous nous proposons, dans cette étude, d'apprécier la *valeur globale probable des erreurs fortuites* résultant de la combinaison de deux causes (1) et (2); nous ne chercherons absolument pas à apprécier séparément l'importance de chacun de ces deux types d'erreur. Plus exactement, nous rechercherons quelle probabilité nous avons de faire des erreurs de  $\pm 0,1$  mm,  $\pm 0,2$  mm, etc., lorsque nous nous servirons de pointes de mesure du type choisi pour déterminer des niveaux d'eau stables.

Ainsi que nous l'avons déjà indiqué, nous supposons qu'il n'y a pas de cathétomètre de précision disponible pour les essais et que nous en sommes réduits, par conséquent, à contrôler entre elles les diverses lectures de pointes de mesure. La méthode utilisée peut s'expliquer de la manière suivante : soient deux pointes de mesure similaires, dont les zéros n'ont pas été réglés par une opération préliminaire; nous les utiliserons pour la détermination de deux niveaux distincts A et B. Nous appellerons A1, A2, B1 et B2 les lectures correspondantes.

Si les lectures étaient parfaites (A1 — B1) serait exactement égal à (A2 — B2) puisque ces deux va-

leurs expriment la différence de niveau. En d'autres termes, nous devrions avoir :

$$A1 - A2 - B1 + B2 = 0$$

S'il n'en est pas ainsi, on peut dire que la valeur absolue de l'expression :

$$|A1 - A2 - B1 + B2|$$

constitue, en quelque sorte, une indication sur l'erreur de mesure.

Dans ce cas, quatre lectures à la pointe donnent une possibilité d'estimation de l'erreur, c'est-à-dire la possibilité d'une comparaison entre les lectures qui élimine l'effet des écarts entre les zéros des pointes et entre les niveaux d'eau.

De façon plus générale,  $m$  pointes similaires ayant des réglages de zéro distincts peuvent être utilisés pour la lecture de  $n$  niveaux différents;  $m$  et  $n$  seront choisis assez grands afin d'obtenir une détermination plus précise de l'erreur. Dans ce dernier cas, on obtient  $mn$  lectures susceptibles de fournir, après une analyse semblable à celle que nous venons de décrire,  $(m-1)(n-1)$  estimations indépendantes de l'erreur (pour  $mn = 4$ , nous avons une seule estimation). En langage statistique, ceci signifie que l'on dispose, dans le calcul de l'erreur, de  $(m-1)(n-1)$  « degrés de liberté ».

On ne peut pourtant pas calculer directement les  $(m-1)(n-1)$  estimations de l'erreur. Il faut d'abord supposer que la distribution de l'erreur suit une loi de probabilité gaussienne (voir planche 1<sup>\*</sup>). De façon plus précise, si  $L$  est le niveau réel (celui que l'on trouverait à l'aide d'un cathétomètre de haute précision), nous admettons que les lectures à la pointe R sont distribuées suivant la loi :

$$dF = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sigma}$$

où  $R - L = x$  (Pl. 1) et où  $dF$  exprime la probabilité qu'il y a à ce que  $(R - L)$  se trouve à l'intérieur d'un certain domaine  $\left(x - \frac{dx}{2}, x + \frac{dx}{2}\right)$ . On admet que cette loi s'applique aux erreurs de mesure de toutes les pointes de fabrication semblable, sans distinction.

Nous nous attacherons maintenant au calcul de  $\sigma$ ; une fois  $\sigma$  déterminé, nous saurons calculer à partir des tables de GAUSS la probabilité des erreurs d'une grandeur donnée.

Pour ce faire, il convient de réaliser pour nos séries de  $mn$  lectures ce qui est connu sous le nom d'« Analyse de Variance ». Le développement moderne de cette méthode est pour une grande part l'œuvre de R.-A. FISCHER, mais c'est peut-être l'ouvrage de M. G. KENDALL, *The Advanced Theory of Statistics*, qui fournit sur cette théorie l'exposé le plus complet. Nous n'avons pas l'intention de faire ici la démonstration algébrique du fait que ce procédé fournit bien effectivement une estimation des

(\*) Etant donné que la distribution de l'erreur est *discontinue* (les valeurs possibles de l'erreur, dans le cas présent sont  $\pm 0,1$  mm,  $\pm 0,2$  mm), alors que la distribution est *continue* cette hypothèse demande un examen. Nous étudierons ce point plus loin (fig. 2).



erreurs « normalement distribuées »\*; nous présenterons d'abord brièvement les dispositions expérimentales utilisées, puis nous exposerons rapidement l'application pratique de la méthode aux résultats obtenus.

### L'APPAREILLAGE ET LES ESSAIS

Les expériences furent réalisées avec 5 pointes de mesure du type de celles montrées sur la figure 1; ces pointes étaient installées le long d'un bassin en béton.

Ce type de pointe est de construction simple; il consiste essentiellement en une tige verticale en duralumin susceptible de glisser vers le haut ou vers le bas, le long d'un vernier, sous l'action du volant à main visible sur la photographie. La transmission est du type à friction, métal sur métal. L'échelle fixée sur la tige principale est graduée en mm, et le vernier permet d'apprécier au plus le 1/10<sup>e</sup> de mm. Il faut remarquer que le vernier est réglable; sur un modèle ceci permet de régler le zéro de la pointe à la cote la plus commode.

Enfin, ajoutons qu'au prix d'une dépense supplémentaire réduite, ces pointes peuvent être équipées d'un œil cathodique, ce qui permet d'exécuter des mesures dans des puits profonds, etc. En un mot, lorsqu'il n'est pas possible de voir la pointe toucher la surface de l'eau, les secteurs de l'œil cathodique s'éclairaient lorsque le contact se produit.

Cet appareillage se trouve dans le commerce\*\* : fabriqué en série, il se prête bien à des méthodes statistiques d'analyse d'erreur.

\*  
\*\*

Les essais furent conduits de la façon suivante : après remplissage du bassin et après stabilisation complète du niveau, on lisait les indications données par chacune des cinq pointes. On répétait la même opération pour cinq autres niveaux, l'écart entre le premier et le sixième niveau étant d'environ de 20 cm; on couvrait ainsi très largement la plage d'utilisation de l'appareil.

### RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Le tableau suivant résume les résultats obtenus :

TABLEAU I

Niveau Pointe	1	2	3	4	5
A . . . . .	118,1	130,5	56,0	223,2	133,0
B . . . . .	158,0	170,4	95,8	263,1	173,0
C . . . . .	203,1	215,4	140,9	308,2	218,1
D . . . . .	246,4	258,6	184,0	351,4	261,1
E . . . . .	287,7	299,9	225,3	392,6	302,3
F . . . . .	314,7	326,7	252,3	419,5	329,6

(\*) Cette démonstration se trouve aux pp. 181/187 de l'ouvrage de KENDALL (tome II).

(\*\*) Il est fabriqué par les Etablissements NEYRPIG à Grenoble.

Chacune de ces valeurs correspond à la lecture en mm sur l'échelle de l'une des pointes pour l'un des 6 niveaux réalisés; comme nous le disions plus haut, les zéros d'échelle n'ont pas été préalablement réglés à une cote identique, ce qui explique les grands écarts d'une colonne à l'autre.

### CALCULS

Quoique la technique de l'analyse de variance puisse s'appliquer directement au tableau I sous sa forme brute, il est commode de se livrer à quelques simplifications intéressantes au point de vue arithmétique. Considérons les valeurs A1 et A2. L'écart qui les sépare provient essentiellement de l'écart entre le réglage des zéros de ces deux pointes; même s'il y a une erreur, elle demeurera inchangée si nous soustrayons la valeur :

$$A2 - A1 = 130,5 - 118,1 = 12,4$$

de A2 et, bien entendu, de toutes les lectures inscrites dans la colonne 2. Ceci peut être répété pour toutes les pointes et on arrive ainsi à « ajuster » les lectures de façon à éliminer, en grande partie, les écarts entre les valeurs du tableau consécutifs au réglage arbitraire des zéros des pointes.

On peut procéder exactement de la même manière pour les rangées, éliminant ainsi, pour une grande part, les écarts provenant des différences de niveau; on affecte la valeur 0 à toutes les lectures de la colonne 1 et de la rangée A.

Pour calculer une nouvelle valeur (MN)', on procède de la façon suivante :

$$(MN)' = MN - M1 - AN + A1$$

Ainsi, B3 est remplacé par :

$$95,8 - 158,0 - 56,0 + 118,1 = -0,1$$

Le résultat final de ces modifications est :

TABLEAU II

Niveau Pointe	1	2	3	4	5	
A . . . . .	0	0	0	0	0	0
B . . . . .	0	0,0	-0,1	0,0	+0,1	0,0
C . . . . .	0	-0,1	-0,1	0,0	+0,1	-0,1
D . . . . .	0	-0,2	-0,3	-0,1	-0,2	-0,8
E . . . . .	0	-0,2	-0,3	-0,2	-0,3	-1,0
F . . . . .	0	-0,4	-0,3	-0,3	+0,0	-1,0
Totaux . . .	0	-0,9	-1,1	-0,6	-0,3	-2,9

On remarquera que nous avons indiqué, dans ce tableau, les totaux par colonnes, par rangées, et le total général.

Le calcul se conduit alors de la façon suivante :  
(1) Somme des carrés des 30 valeurs individuelles :

$$T = 6(0,1)^2 + 4(0,2)^2 + 5(0,3)^2 + (0,4)^2 = 0,83.$$

(2) Somme des carrés des totaux par colonnes :

$$C = (0,9)^2 + (1,1)^2 + (0,6)^2 + (0,3)^2 = 2,47.$$

(3) Somme des carrés des totaux par rangées :

$$R = 2,65.$$

(4) Carré du total général :

$$S = (2,9)^2 = 8,41.$$

(5) « Somme des carrés par colonnes », ou variation intercolonnes\* :

$$= \frac{C}{6} - \frac{S}{30} = 0,13133.$$

(6) « Somme des carrés par rangées », ou variation interrangées :

$$= \frac{R}{5} - \frac{S}{30} = 0,24967.$$

(7) « Somme totale des carrés » ou variation totale :

$$T - \frac{S}{30} = 0,54967.$$

De plus, le nombre des comparaisons indépendantes (degrés de liberté) entre :

- (8) les colonnes, est (5 — 1) = 4,
- (9) les rangées, est (6 — 1) = 5,
- (10) les valeurs individuelles est (30 — 1) = 29, et entre :
- (11) les « erreurs » dans les résultats d'essai eux-mêmes, est (5 — 1) (6 — 1) = 20.

On reconnaîtra, dans ce dernier résultat, l'expression (m — 1) (n — 1) dont nous avons parlé ci-dessus. Les autres résultats (8), (9) et (10) s'expliquent facilement si l'on remarque qu'il n'y a qu'une comparaison indépendante possible entre deux nombres: leur différence (ou leur rapport — autrement dit la différence de leur logarithme). Entre trois nombres, il existe deux comparaisons de ce genre, etc.

Nous pouvons maintenant dresser un tableau d'analyse de variance de la façon suivante :

TABLEAU III

	Somme des carrés	Degrés de liberté	Moyenne somme des carrés
Colonnes . . .	0,13133	4	0,032833
Rangées . . . .	0,24967	5	0,049933
Erreurs . . . .	0,16867	20	0,008433
Totaux . . .	0,54967	29	

(\*) NOTA : Cette somme s'identifie au sixième de la somme des carrés des écarts des totaux par colonnes calculés par rapport à leur valeur moyenne, —  $\frac{2,9}{5}$  ; des remarques semblables s'appliquent à (6) et (7).

Ce que l'on appelle ici la « somme des carrés des erreurs » s'obtient en retranchant (1) et (6) ci-dessus de (7). Les chiffres de la 3<sup>e</sup> colonne sont le résultat de la division des deux autres colonnes. Le chiffre qui nous intéresse est :

$$0,008433$$

qui est, en fait, la meilleure estimation possible de  $\sigma^2$ ,  $\sigma$  étant un paramètre (écart type) de la « population » normale des erreurs.

$$\begin{aligned} \text{Aussi } \sigma &= \sqrt{0,008433} \\ &= 0,092 \text{ mm} \end{aligned}$$

INTERPRÉTATION DE  $\sigma$

La signification de  $\sigma$  est la suivante :

Suivant l'hypothèse que nous avons admise au début en ce qui concerne la répartition des erreurs, si l'on substitue à  $\sigma$  la valeur trouvée ci-dessus, on obtient :

$$dF = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2(0,092)^2}} \cdot \frac{dx}{0,092}$$

(cette fonction est représentée sur la planche 1).

En utilisant les tables de la fonction de GAUSS, on trouve que :

- P (|x| > 0,05) = 0,5868 ou 58,7 %,
- P (|x| > 0,15) = 0,1030 ou 10,3 %,
- P (|x| > 0,25) = 0,0065 ou 0,65 %.

Ici, P (|x| > 0,05) signifie que la probabilité d'une erreur x supérieure à ± 0,5 mm est 58,7 %.

Nous devons maintenant diviser la courbe continue de GAUSS en un certain nombre de segments (fig. 2) et considérer chacun de ces intervalles comme exprimant la probabilité de l'erreur ayant pour valeur l'ordonnée du milieu du segment en question. En termes mathématiques, ceci revient à dire que la probabilité d'une erreur de :

- ± 0,3 mm ou plus est 0,65 %,
- ± 0,2 mm ou plus est (10,3 — 0,65) = 9,65 %,
- ± 0,1 mm est (58,7 — 10,3) = 48,4 %

et d'une erreur nulle est 41,3 %.

Il ne semble pas devoir résulter pratiquement d'erreur sérieuse de cette sorte d'approximation qui est fréquente en statistique.

La conclusion pratique que l'on peut tirer de ce calcul est la suivante :

Lors d'une simple lecture d'un niveau d'eau stable à l'aide d'une pointe du type étudié, l'erreur maximum à escompter est de 0,2 mm.

REMARQUE

Il est permis de se demander pourquoi, parmi les résultats d'essai, on rencontre en fait des erreurs beaucoup plus importantes que celle-ci.

Nous avons par exemple :

$$(E2 - F2 - E5 + F5) = 0,5 \text{ mm}$$

Or, cette erreur apparente de 0,5 mm est en réalité la conséquence de la combinaison des erreurs de 4 lectures. On sait que l'écart-type de la somme ou de la différence de  $n$  variables, chacune ayant un écart-type  $\sigma$ , est égal à  $\sigma\sqrt{n}$ . Dans ce cas particulier :

$$0,092 \times \sqrt{4} = 0,186 \text{ mm.}$$

et la probabilité d'une erreur cumulée de 0,5 mm atteint 3 %.

Compte tenu du fait qu'il existe 20 comparaisons indépendantes possibles, l'existence de cette erreur apparente n'a pas de quoi nous surprendre.

## CONCLUSION

Sur la base des lectures de cinq pointes similaires sur 6 niveaux d'eau différents, on peut conclure que l'erreur maximum probable pour une lecture unique est de  $\pm 0,2$  mm, à condition bien entendu que le niveau soit au repos.

Pratiquement, on peut dire que des pointes de mesure du type indiqué sont, dans des conditions d'utilisation normales, tout à fait satisfaisantes; on a cherché, par-dessus tout, à réaliser des pointes robustes et économiques, plutôt que des appareils de haute précision (qui, en réalité, s'avèrent inutiles pour la plupart des modèles). En tout cas, une analyse de la distribution des termes d'erreur dans le

tableau II laisse supposer que la graduation des échelles fixées sur les pointes constitue, en fait, la source d'erreur principale. Depuis l'époque de la construction des appareils utilisés dans nos essais, des spécifications plus strictes ont été imposées à la réalisation des échelles; on peut s'attendre à ce que la précision s'en soit trouvée notablement améliorée\*.

D'un point de vue plus général, nous espérons que les méthodes d'analyse décrites ci-dessus pourront rendre service dans de très nombreux problèmes n'appartenant pas forcément au domaine de l'hydraulique; nous en avons déjà signalé quelques possibilités d'application.

(\*) NOTE : La machine à diviser employée actuellement est constituée par une table d'acier en forme de queue-d'aronde sur lequel coulisse un chariot portant la pointe à graver. Les déplacements transversaux du chariot sont réalisés à l'aide d'une vis au pas de 1 mm équipée d'un tambour comportant 100 divisions. La pointe à graver peut ainsi se déplacer le long de la règle à graduer sur des longueurs inférieures ou égales à 100 mm.

La table en forme de queue-d'aronde est percée de 50 trous distants chacun de 1 cm et destinés à contrôler les déplacements de la pointe à graver supérieurs à 100 mm.

Le perçage des 50 trous a été effectué par la machine à pointer de précision des Ateliers Neyrpic. Les distances entre axes sont garanties à  $\pm 5 \mu$  près.

Signé : G. D. RANSFORD,

*Ingénieur au Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique*

(Renseignements communiqués à l'auteur par M. IRRIGOYEN, Ingénieur aux Etablissements Neyrpic.)

