LABORATORY PRACTICE

A method of measuring wave lengths of model waves by synchronization of visual signals

Texte français, p. 770.

INTRODUCTION

The reason why little attention is generally paid to the measurement of wave lengths of waves used in port and maritime model studies can be readily appreciated. Since it is much easier to measure wave periods (using a stop-watch, say) than wave lengths, it is generally speaking satisfactory to measure the former and to calculate the latter, if need be, by means of a standard formula. Moreover, it is evident that the period of a regular train of waves is a fixed quantity, unlike the wave length, which varies with the depth of water in which the wave train moves.

Nevertheless, wave length measurement are sometimes of much importance. It can be readily understood^{1, 2} (superscripts refer to the list of references at the end) that the ordinary formulae expressing the wave length in terms of the wave period, depth of water, and the wave amplitude no longer hold should currents be encountered in the path of the waves being studied. Moreover, considerable confusion has existed up to the present time in technical literature regarding the frames of reference (and even the depth of water) to which the second and third order formulae refer.

In brief, therefore, the measurement of wave lengths is thus of importance for the practical engineer engaged on model studies of waves in estuaries, etc., where frequently the field data—obtained from aerial photographs—is given in terms of wave length, and for the research worker who wishes to investigate the validity of the above-mentioned formulae.

The present article deals with the determination of the limits of accuracy of a given method

of wave-length measurement, to be described below, by a statistical analysis of experimental results.

As regards the actual measurement of wave length, two possibilities were available. One suitable device has already been described in the present review³ and is eminently suitable for laboratory use. There was also a second method (which was ultimately used) which has the merit of requiring nothing more in the way of equipment than a "magic eye" point gauge as described in the first article of this series⁴ and an additional small point gauge mounted on a movable carriage (see fig. 1). The principle involved in the latter method, which has been in current use in the Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique for a considerable time, is as follows (see fig. 2) :

WAVE MEASURING EQUIPMENT

The basic principle involved is the synchronization of electrical impulses originating in two point gauge circuits by means of a "magic eye" radio valve.

The lighting up of each of the two sectors comprising the fluorescent anode of the valve in question is controlled independently by each of the two point gauges (magic eye equipment is, as it happens already, mounted on the main point gauge by the manufacturer^{*}). When one of the points, say, is out of the water the deviating grid to which it is connected is lowered to a potential approximately equal to that of the filament (as in a diode), and the electron stream

(*) Etablissements Neyrpic, Grenoble.

FIG. 1.

The points.

Les deux pointes.

is deviated from the fluorescent part of the valve; the sector is dark. Should however the point touch the water surface, the deviating grid is brought to a potential roughly equal to that of the plate (since the internal resistance of the valve greatly exceeds the resistance of the water-gauge circuit), and the sector lights up.

Such a system is very flexible from the point of view of power supply—this can be D.C. (dry cells, etc.) or A.C., provided that an earth connection is made.

Suppose now that this apparatus is installed in a wave flume or model (see fig. 2). The points

are lined up parallel to the direction of propagation of the waves travelling between them, and regulated in height so as barely to touch each successive crest. In these circumstances, the passing of a wave crest under a point is signalled on a sector of the "magic eye" by a transient flash. As in fact crests pass in a regular succession, each sector lights up at regular intervals, more or less out of phase with other sector of the "eye".

The movable carriage is next shifted by the

FIG. 2.

experimenter until the flashes in the two sectors are exactly synchronized; it is easy to see that there is now a whole number of wave lengths, N , separating the two point gauges. A measurement of distance, and, if need be, a second test with $(N \pm 1)$ wave lengths in order to fix the value of N , give the wave length required by simple division.

The same equipment enables the wave amplitude to be estimated with sufficient accuracy for insertion in the formulae where required.

THE EXPERIMENTAL WAVE BASIN

Constructed with a view to studying the natural damping of small scale waves, the flume was built to conform with exacting vertical tolerances (within the useful area of $20\text{m} \times 4\text{m}$ the maximum difference in level after construction was less than one and a half millimeters). This was achieved by laying the floor slab between machined angle irons screwed to the floor in such a way as to eliminate camber; the fresh concrete was struck off with a heavy steel rule working between adjacent angles (fig. 3).

A specially designed wave machine was located at one end of the flume. The floor immediately in front of this was lower than in the rest of the basin with the object of aiding the production of pure waves initially; the two levels were connected by a vertical transition curve. At the far end of the basin is located a sloping gravel bed which serves to destroy the waves which reach it, so as to prevent reflection of parasitic disturbances back towards the wave machine.

THEORY

From a theoretical standpoint, the concern of this article is to describe the statistical

procedure to be adopted in estimating the probable error incurred in measuring wave-lengths by the method described above.

Suppose that for a given wave-length L , the

FIG. 3.

Laying the floor slab of the experimental basin.

Réalisation du fond du canal d'essai.

error in the final, measured position of the movable point is distributed according to a certain law of probability with standard deviation σ ; in other words, the root mean square of a very large number of deviations of the position of the point from the experimental mean position found for waves of a certain, constant wave-length L is equal to σ cm (or inches, etc. depending on the units used).

With the experimental procedure used, it is immaterial where the fixed point gauge is placed, i.e., the number of wave-lengths N between the two gauges can be chosen arbitrarily. The probable error σ remains constant, however, and it is easy to see that after dividing by N , the

standard deviation of the error in the wave length thus determined is only

$$\frac{\sigma}{N}$$

The advantage in choosing N as large as possible will be evident.

As we explained above, a second measurement may be made with $N \pm 1$ wave-lengths, and from the two different estimations of L thus obtained an estimate can subsequently be made of the accuracy of the method itself.

This point may best be illustrated by a concrete example, e.g., test No. 1 in the table of experimental results.

We find that

$$7L = 522.5 \text{ cm}$$

giving :

$$L = 74.64 \text{ cm}$$

but that :

$$8 L = 595 \text{ cm}$$

giving :

$$L = 74.375 \text{ cm}$$

On the basis of these figures, the best estimation of the wave length L is actually given by :

$$\frac{522.5 + 595}{15} = 74.50 \text{ cm}$$

On the other hand, an estimate of the value of σ should be afforded by some multiple of :

$$74.64 - 74.375 = 0.265 \text{ cm}$$

The question then arises of determining precisely what is this multiple—more explicitly, what is the standard deviation σ' of the difference of two experimental results subject to errors of

S.D. $\frac{\sigma}{7}$ and $\frac{\sigma}{8}$ respectively?

By purely algebraic reasoning⁵, it can be proved quite simply that :

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sqrt{\left(\frac{\sigma}{7}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{8}\right)^2} \\ &= 0.1898 \sigma \end{aligned}$$

This result may of course be generalized so that we have, for instance,

$$\sigma' = \sigma \sqrt{\frac{1}{N^2} + \frac{1}{(N+1)^2}}$$

INTERPRETATION OF RESULTS

Let us firstly calculate σ' for each group of waves, as follows :

TESTS 1 — 5.

The value of σ' is found from the equation :

$$5 \sigma'^2 = (0.27)^2 + (0.00)^2 + (0.11)^2 + (0.59)^2 + (0.30)^2$$

so that :

$$\sigma' = 0.323 \text{ cm}$$

and hence :

$$\sigma \sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} = 0.323$$

or :

$$\sigma = 1.70 \text{ cm}$$

TESTS 6 — 10.

$$\sigma \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5} [(0.06)^2 + (0.30)^2 + (0.34)^2 + (0.12)^2 + (0.17)^2]}$$

and hence :

$$\sigma = 1.35 \text{ cm}$$

TESTS 11 — 15.

$$\sigma = 0.86 \text{ cm}$$

TESTS 16 — 20.

$$\sigma = 1.24 \text{ cm}$$

for wave length readings with N and $N+1$ waves between the two points.

The determination of σ' is capable of refinement if, as in tests 1 - 5, etc, experiments are repeated independently with similar waves; the best estimate of σ' is then given by the root mean square of the various experimental differences (*). In this way, starting from a series of observed experimental differences, a good estimation can finally be made of σ .

Having found σ , a reverse process enables us to make a series of interesting predictions regarding possible errors arising in such wave-length determinations; it is at this point that the practical value of the statistical analysis becomes clear (see table II). From the theoretical standpoint, it is only when this stage is reached that the necessity of assuming a precise error distribution law, here a Gaussian one, arises; as in the previous article of the series⁴ the different "fiducial limits" cannot be determined unless some definite type of distribution is assumed.

**

EXPERIMENTAL RESULTS

These are given in the following table I; each group of tests comprises five pairs of readings taken on waves of the same period but different amplitudes. In this connection, the resemblance between tests 11 — 15 and 16 — 20 is purely fortuitous.

(*) That is, an unbiased estimate of σ'^2 is found by dividing the experimental sum of squares by the number of degrees of freedom (cf. the first article of the series⁴); in this case, the number of degrees of freedom equals the number of squares of differences available, none being lost in calculating a mean, etc.

TABLE I

TEST <i>Essai</i>	DEPTH. of water (cm) <i>Profondeur d'eau</i>	PERIOD (secs) <i>Période</i>	WAVE amplitude (cm) <i>Amplitude</i>	Distance between the point gauges (cm) <i>Ecartement des pointes</i>	Number of wave lengths <i>Nombre de longueurs d'onde</i>	Estimated wave length <i>Longueur d'onde estimée</i>	Difference between estimated wave lengths <i>Ecart entre les longueurs d'onde estimées</i>
1	10.0	0.829	3.6	522.5 595	7 8	74.65 74.38	0.27
2	9.8	0.829	2.2	517.5 591.5	7 8	73.94 73.94	0.00
3	10.0	0.829	0.5	517 590	7 8	73.86 73.75	0.11
4	9.9	0.829	0.2	516 585	7 8	73.72 73.13	0.59
5	10.1	0.829	4.1	527.5 600.5	7 8	75.36 75.06	0.30
6	10.0	0.712	1.3	490.2 551	8 9	61.28 61.22	0.06
7	10.0	0.712	1.4	493.5 552.5	8 9	61.69 61.39	0.30
8	10.0	0.712	2.35	492.5 551	8 9	61.56 61.22	0.34
9	10.0	0.706	0.75	480 539	8 9	60.00 59.88	0.12
10	10.0	0.706	2.1	483.5 545.5	8 9	60.44 60.61	0.17
11	10.1	0.604	1.1	346 397	7 8	49.43 49.63	0.20
12	10.1	0.604	0.77	343.5 392	7 8	49.07 49.00	0.07
13	10.05	0.604	0.3	341.8 391.2	7 8	48.83 48.90	0.07
14	10.0	0.604	2.9	344.8 394.1	7 8	49.26 49.26	0.00
15	10.0	0.604	1.55	343.3 390	7 8	49.04 48.75	0.29
16	10.0	0.610	3.25	444.6 494	9 10	49.40 49.40	0.00
17	10.0	6.610	2.7	444.6 490	9 10	49.40 49.00	0.40
18	10.0	0.604	0.6	434.5 482	9 10	48.28 48.20	0.08
19	10.0	0.604	1.4	439 487.5	9 10	48.78 48.75	0.03
20	10.0	0.604	2.0	440 489.5	9 10	48.89 48.95	0.06

Though the experimental information is admittedly slender in amount (owing to lack of time for further tests), it is nevertheless worthwhile indicating how it can be generalized; any future experiments of this type can thus be immediately analysed along the same lines.

It is obvious that, for the same observer working under similar conditions, σ varies as a

function of L , T and possibly $2a$ (*). If the above data are examined it will be found that σ/L is roughly constant, provided that tests

(*) The foregoing analysis tacitly assumes that the wave amplitude $2a$ does not affect the probable error σ , and within wide limits this is certainly not far from the truth; the point merits attention but cannot be examined in the absence of further experimental results.

11—20 are lumped together. Some justification can be found for this if we examine the experimental procedure:—

The movable point is located in its final, measured position by comparing the time lag between "magic eye" flashes on each side of its final location. The carriage is thus ultimately located by moving it through a certain fraction of a wave length, and σ/L should be roughly constant.

This reasoning has no pretension to strict accuracy which can be established only by subsequent research work. If however we accept it provisionally, we may proceed as follows :

The ratio σ/L equals :

- 0.023 for tests 1—5;
- 0.022 for tests 6—10;
- 0.0176 for tests 11—15;
- 0.025 for tests 16—20;

giving a mean of 0.022.

In other words, for a given wave-length L , the standard deviation σ of the error in the location of the movable point is given by

$$\sigma = 0.022 L \text{ cm}$$

Accordingly, on the assumption of a Gaussian error law, there is a probability of 68 % that the error of location is less than $0.022 L$ cm. If it is desired to raise this probability to 95 % (statisticians then speak of a "fiducial range") we should be willing to accept errors of up to $0.043 L$ cm.

On the other hand, if two independant observations of the wave-length are made with m and n waves separating the two point gauges, the standard deviation of the error of the *mean* of these determinations is equal to :

$$0.022 L \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$= 0.011 L \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

The limits of the fiducial range at the 95 % level are then

$$\pm 0.0215 L \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

By way of example, the following table gives a few typical results deduced from the preceding calculations:—

TABLE II

L	The error in the position of the movable point	The error in a single determination of L when the points are separated by 5 L	The error in the mean of two determinations of L (for 5 L and 6 L between points)
	In 95 % of cases will not exceed :		
50 cm	2.2 cm	0.44 cm	0.28 cm
60 cm	2.6 cm	0.52 cm	0.34 cm
70 cm	3.0 cm	0.60 cm	0.39 cm
80 cm	3.4 cm	0.69 cm	0.45 cm

It would be incorrect to apply the above formulae to wave lengths widely different from those under test.

CONCLUSION

Experiments have been conducted on waves of a series of different wave lengths and the results of wave length measurements analysed statistically. From a practical standpoint, it has been proved that the method of wave length measurement used, though demanding considerable pains on the part of the experimenter, is capable of high accuracy; this can attain ± 0.5 % or less under the best test conditions (see table II). In this connection, the point gauges should be located as far apart as possible so as to include the maximum number of wave-lengths between them; for precise measurements, the average of at least two independant readings should be taken.

G. D. RANSFORD (Neyrpic Laboratory, Grenoble).

REFERENCES

1. F. SUQUET. — Quelques remarques sur la construction des épures de propagation de la houle par l'analogie ondulatoire.
International Assoc. for Hydraulic Structures Research (now I.A.H.R.).
Third meeting, Grenoble, September 1949.
2. F. BIESEL. — Étude théorique de la houle en eau courante.
La Houille Blanche, numéro spécial « A », mai 1950.
3. J. DALVERNY. — Appareil pour mesurer la longueur d'onde sur modèle réduit.
La Houille Blanche, N° 2, 1948.
4. G. RANSFORD. — A statistical analysis of errors in point gauge measurements.
La Houille Blanche, N° 4, 1951.
5. See, for example :
SMITH & DAWSON. — Sampling Statistics and Applications—McGraw-Hill Book Company (p. 109).

LE COIN DU LABORATOIRE

Une méthode de mesure de la longueur d'onde des houles sur modèle réduit par signaux lumineux synchronisés

English text, p. 764.

Se reporter au texte anglais, p. 764, pour les figures.

INTRODUCTION

Il est facile de comprendre les raisons pour lesquelles on ne prête généralement que peu d'attention à la mesure des longueurs d'onde de la houle obtenue au cours des études maritimes sur modèle réduit. Etant donné qu'il est beaucoup plus aisé de mesurer la période de la houle (en se servant d'un chronomètre) que sa longueur d'onde, on préfère presque toujours mesurer la première, quitte, si nécessaire à en déduire, par le calcul, la seconde en appliquant une formule classique. De plus, il est évident que pour un train de vagues régulier, la période est une quantité fixe, tandis que la longueur d'onde varie avec la profondeur.

Néanmoins, les mesures de longueur d'onde revêtent parfois une importance considérable. On conçoit sans difficulté ^{1, 2} (cf. la bibliographie à la fin du texte anglais) que les formules classiques reliant la longueur d'onde à la période, à la profondeur et à l'amplitude ne soient plus valables lorsqu'il existe des courants dans la zone de propagation étudiée. De plus, il régnait, jusqu'à présent, dans la littérature technique, une très grande confusion en ce qui concerne les axes de référence (et même la profondeur d'eau) adoptés pour les formules des deuxième et troisième ordres.

Bref, la mesure des longueurs d'onde intéresse le technicien aux prises avec des études sur modèles réduits de houle dans les estuaires, etc. (les données

de base — obtenues par photographies aériennes — sont données en longueur d'onde) et le chercheur désirant préciser la validité des formules ci-dessus.

Dans ce qui suit nous nous proposons de présenter une estimation des limites de précision d'une méthode de mesure des longueurs d'onde, décrite ci-après, à la lumière d'une analyse statistique de résultats expérimentaux.

Pour mesurer la longueur d'onde, nous nous trouvons en présence de deux possibilités : on pouvait, en premier lieu, utiliser un appareil spécial ayant déjà fait l'objet d'une description dans cette rubrique³ et susceptible de rendre d'éminents services dans un laboratoire. Mais il existait une autre méthode (utilisée en fin de compte) ayant le mérite d'exiger seulement, dans le domaine matériel, une pointe de mesure à œil cathodique (du type décrit dans le Coin du Laboratoire n° 4/1951 de *la Houille Blanche*) et une petite pointe supplémentaire montée sur un équipage mobile (fig. 1). Nous présentons ci-dessous le principe de cette dernière méthode couramment utilisée depuis longtemps au Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique (fig. 2).

APPAREIL DE MESURE DE HOULE

Le principe utilisé consiste à synchroniser des impulsions électriques venant de deux circuits de

pointes de mesure à l'aide d'une lampe à œil cathodique.

L'éclairement de chacun des deux secteurs de l'anode fluorescente de la lampe en question est contrôlé indépendamment par chacune des deux pointes de mesure (l'œil cathodique se trouve monté, dans les réalisations actuelles du constructeur (*), sur la pointe principale). Lorsque l'une des pointes est hors de l'eau, le potentiel de la grille dans le circuit de laquelle elle est intercalée, est abaissé et devient à peu près égal à celui du filament (comme dans une diode); le flux d'électrons est dévié en dehors de la page fluorescente : le secteur est noir. Dès que la pointe touche l'eau, le potentiel de grille s'élève pour devenir approximativement égal à celui de la plaque (la résistance interne de la lampe est largement plus grande que celle du circuit pointe-eau) et le secteur devient lumineux.

Un tel système est très souple au point de vue alimentation; on peut utiliser du courant continu (piles sèches, etc.), ou du courant alternatif, sous réserve d'une prise de terre.

Supposons maintenant que cet appareil soit installé dans un canal ou dans un modèle à houle (fig. 2). Les pointes sont disposées sur un alignement parallèle à la direction de propagation de la houle, et elles sont réglées en hauteur, de façon à effleurer seulement les crêtes des vagues successives. Dans de telles conditions, le passage d'une crête sous une pointe est signalé sur un secteur de l'œil cathodique par un éclair passager. Les crêtes se succédant régulièrement, chacun des deux secteurs s'illumine périodiquement avec un déphasage plus ou moins grand.

L'équipage mobile est alors manœuvré par l'opérateur jusqu'à ce que les éclairs des deux secteurs se trouvent exactement synchronisés; il est évident qu'à ce moment la distance séparant ces deux pointes correspond à un nombre entier N de longueurs d'onde. Il suffit d'une mesure de longueur et, à la rigueur, d'un second essai avec $(N \pm 1)$, longueurs d'onde destiné à fixer la valeur de N , pour trouver, au prix d'une simple division, la longueur d'onde cherchée.

Le même dispositif permet d'estimer l'amplitude de la houle avec une précision suffisante pour l'utilisation des formules où elle est nécessaire.

LE BASSIN A HOULE EXPÉRIMENTAL

Construit en vue de l'étude de l'amortissement naturel des houles à petite échelle, le bassin fut réalisé en respectant des tolérances très sévères (à l'intérieur de la surface de $20 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ utilisée, l'écart maximum sur la cote de fond atteignait à peine $1,5 \text{ mm}$). Ce résultat fut obtenu en exécutant la dalle entre des cornières usinées scellées sur le fond de façon à éviter toute cambrure; le troussage était réalisé avec une lourde règle en acier s'appuyant sur le sommet des cornières (fig. 3).

Un appareil à vague spécialement conçu pour ce modèle était disposé à l'une des extrémités du bassin. La profondeur était, à cet endroit, plus grande que sur le reste du modèle, afin de produire au départ des houles pures; les deux niveaux étaient réunis par une courbe de raccordement. A l'autre extrémité du bassin, une plage de graviers était destinée à dissiper l'énergie de la houle qui l'atteignait, afin d'éviter la réflexion de perturbations parasites retournant vers l'appareil à houle.

THÉORIE

Du point de vue théorique, l'objet principal de cet article est d'exposer le procédé statistique à adopter pour estimer l'erreur probable commise dans la mesure des longueurs d'onde par la méthode directe ci-dessus. Supposons que, pour une longueur d'onde donnée L , l'erreur sur la position finale, et mesurée, de la pointe mobile, soit distribuée suivant une certaine loi de probabilité avec un écart-type σ ; en d'autres termes, nous désignons par σ (en cm, en pouces, etc., suivant les unités choisies) la racine de la moyenne carrée d'un très grand nombre d'écarts entre la position de la pointe et la position moyenne trouvée expérimentalement pour des vagues d'une longueur d'onde donnée et constante L .

Dans le procédé expérimental utilisé, l'emplacement de la pointe fixe n'a aucune importance, autrement dit le nombre de longueurs d'onde N entre les deux appareils peut être choisi arbitrairement. σ demeure constant et il est facile de voir que, après la division par N , l'écart-type de l'erreur sur la longueur d'onde mesurée est seulement :

$$\frac{\sigma}{N}$$

Il est donc évident qu'il y a tout intérêt à choisir N aussi grand que possible.

Ainsi que nous le disions plus haut, on peut se livrer à une seconde mesure avec $N \pm 1$ longueurs d'onde, et de la comparaison des deux résultats ainsi obtenus pour L on peut tirer une appréciation de la précision de la méthode elle-même.

Un exemple concret correspondant à l'essai n° 1 du tableau des résultats expérimentaux fera bien comprendre ce qui précède :

On trouve :

$$7L = 522,5 \text{ cm}$$

$$\text{donnant : } L = 74,64 \text{ cm}$$

Mais nous trouvons :

$$8L = 595 \text{ cm}$$

$$L = 74,375 \text{ cm}$$

D'après ces chiffres, la meilleure estimation que

(*) Neyrpic, Grenoble.

L'on puisse faire de la longueur d'onde est donnée par :

$$\frac{522,5 + 595}{15} = 74,50 \text{ cm}$$

D'un autre côté, une estimation de la valeur de σ peut être donnée par quelque multiple de :

$$74,64 - 74,375 = 0,265 \text{ cm}$$

Le problème qui se pose est la détermination précise de ce multiple; de façon plus explicite : quel est l'écart-type σ' de la différence de deux résultats expérimentaux obtenus avec des erreurs dont les valeurs respectives sont :

$$\frac{\sigma}{7} \text{ et } \frac{\sigma}{8}$$

Un raisonnement purement algébrique⁵ prouverait très simplement que :

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sqrt{\left(\frac{\sigma}{7}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{8}\right)^2} \\ &= 0,1898 \sigma \end{aligned}$$

On peut naturellement généraliser ce résultat, ce qui donne par exemple :

$$\sigma' = \sigma \sqrt{\frac{1}{N^2} + \frac{1}{(N+1)^2}}$$

pour des lectures de longueur d'onde réalisées avec N puis N + 1 longueurs d'onde entre les deux points.

La détermination de σ' peut encore être plus précise si, comme pour les essais 1 à 6, les mesures sont répétées indépendamment avec la même houles : la meilleure valeur de σ' est alors donnée par la racine de la moyenne carrée des divers écarts expérimentaux (*). De cette façon, en parlant d'une série d'écarts observés expérimentalement, une bonne estimation de σ s'avère possible.

Ayant trouvé σ , le processus inverse nous permet de faire une série de prévisions intéressantes concernant les erreurs possibles dans de telles déterminations de la longueur d'onde; c'est à ce moment que l'intérêt pratique de l'analyse statistique apparaît clairement (voir tableau II). Du point de vue théorique, c'est à ce moment qu'intervient la nécessité d'admettre une loi précise de distribution des écarts, loi de GAUSS dans le cas présent; comme dans l'article précédent⁴, les diverses « limites de confiance » ne peuvent être déterminées sans que l'on ait adopté un type de distribution bien défini.

(*) Autrement dit, la meilleure estimation que l'on puisse faire de σ'^2 consiste à diviser la somme expérimentale des carrés par le nombre de degrés de liberté (cf. l'article précédemment publié dans cette rubrique); dans ce cas, le nombre de degrés de liberté est égal au nombre des carrés d'écarts possibles dont aucun n'est perdu en calculant une moyenne.

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Ils sont présentés dans le tableau qui se trouve à la page 768 du texte anglais; chaque groupe d'essais comporte cinq paires de lectures prises sur des houles de même période, mais d'amplitudes différentes. Les ressemblances entre les essais 11, 15 et 16, 20 sont d'ailleurs purement fortuites.

INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

Nous calculerons d'abord σ' pour chaque groupe de houles :

ESSAIS 1 — 5.

La valeur de σ est donnée par l'équation suivante :
 $5 \sigma'^2 = (0,27)^2 + (0,00)^2 + (0,11)^2 + (0,59)^2 + (0,30)^2$
 ce qui donne :

$$\sigma' = 0,323 \text{ cm.}$$

d'où :

$$\sigma \sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} = 0,323$$

ou :

$$\sigma = 1,70 \text{ cm}$$

ESSAIS 6 — 10.

$$\begin{aligned} &\sigma \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5} [(0,06)^2 + (0,30)^2 + (0,39)^2 + (0,12)^2 + (0,17)^2]} \end{aligned}$$

d'où :

$$\sigma = 1,35 \text{ cm}$$

ESSAIS 11 — 15.

$$\sigma = 0,86 \text{ cm}$$

ESSAIS 16 — 20.

$$\sigma = 1,24 \text{ cm}$$

Ces expériences ne sont évidemment pas très nombreuses (nous ne disposons que de très peu de temps pour les réaliser); il est cependant intéressant d'indiquer comment ceci peut être généralisé; n'importe quelle expérience à venir peut ainsi être analysée immédiatement suivant le même procédé.

Il est évident que, pour un même observateur travaillant dans des conditions semblables, σ est une

fonction de L , de T et peut-être de 2α (*). Si les données ci-dessus sont examinées, on trouve que $\frac{\sigma}{L}$ est à peu près constant, à condition que les essais 11 — 20 soient pris en bloc. On peut justifier ceci en examinant le processus expérimental.

Le réglage de la pointe mobile dans sa position définitive de mesure s'obtient en comparant le déphasage entre les deux éclairs de l'œil magique, de part et d'autre de la position de réglage. La position de l'équipage mobile est donc finalement fixée après les déplacements d'une fraction de longueur d'onde : $\frac{\sigma}{L}$ serait donc à peu près constant.

Ce raisonnement ne prétend pas atteindre une rigoureuse précision qui ne pourrait être obtenue que par un travail de recherche complémentaire. Si pourtant nous l'acceptons provisoirement, nous pouvons procéder comme suit :

Le rapport $\frac{\sigma}{L}$ est égal à :

0,023	pour les essais	1 — 5
0,022	pour les essais	6 — 10
0,0176	pour les essais	11 — 15
0,025	pour les essais	16 — 20

ce qui donne une moyenne de : 0,022.

En d'autres termes, pour une longueur d'onde donnée L , l'écart-type sur l'erreur dans la localisation de la pointe mobile est donné par :

$$\sigma = 0,022 L \text{ cm}$$

Par conséquent, en supposant une répartition gaussienne, il y a une probabilité de 68 % pour que l'erreur de localisation soit inférieure à 0,022 L cm. Si l'on désire porter cette probabilité à 95 % (les statisticiens parlent alors de l'« intervalle de confiance »), nous devrions accepter une erreur de 0,043 L cm.

D'autre part, si l'on se livre indépendamment à deux mesures de longueur d'onde avec m et n vagues séparant les deux pointes, l'écart-type de l'erreur de la moyenne de ces mesures est égal à :

$$0,022 L \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$= 0,011 L \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

(*) Toute l'analyse ci-dessus suppose implicitement que l'amplitude 2α n'a aucune influence sur σ/L , et ceci n'est certainement pas très éloigné de la vérité dans d'assez larges limites; ce point mérite de retenir l'attention, mais il ne peut être examiné en l'absence de résultats expérimentaux complémentaires.

Les limites de l'« intervalle de confiance » pour un taux de probabilité de 95 % sont alors :

$$\pm 0,0215 L \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

A titre d'exemple, le tableau suivant donne quelques résultats caractéristiques déduits des calculs précédents.

L	Erreur sur la position de la pointe mobile	Erreur sur une mesure unique de L lorsque les pointes sont séparées de 5 L	Erreur dans la moyenne de deux déterminations de L (pour 5 et 6 L entre les pointes)
	<i>Dans 95 % des cas, elle n'excédera pas :</i>		
50 cm	2,2 cm	0,44 cm	0,28 cm
60 cm	2,6 cm	0,52 cm	0,34 cm
70 cm	3,0 cm	0,60 cm	0,39 cm
80 cm	3,4 cm	0,69 cm	0,45 cm

Il ne serait pas correct d'appliquer les formules citées plus haut à des longueurs d'onde différentes de celles essayées.

CONCLUSION

Les essais réalisés portaient sur des houles de diverses longueurs d'onde et les résultats des mesures de ces longueurs d'onde ont fait l'objet d'une analyse statistique.

Pratiquement, il s'avère que la méthode d'observation utilisée, quoique exigeant beaucoup de soins de la part de l'expérimentateur, est susceptible d'une grande précision : celle-ci peut atteindre $\pm 0,5$ % au moins dans les meilleures conditions d'essai (tableau II). A cet effet, les pointes de mesure doivent être aussi éloignées que possible l'une de l'autre, afin d'englober entre elles un plus grand nombre possible de longueurs d'onde; pour avoir des résultats précis, il convient de prendre la moyenne d'au moins deux lectures.

G. D. RANSFORD.

(Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique, Neyrpic, Grenoble.)