

LE COIN DU LABORATOIRE

Mesure de l'amplitude des houles de faible cambrure par un procédé optique

English text, p. 62.

Exposé d'une méthode directe pour la mesure des amplitudes de houle sur modèle réduit et présentation des résultats des épreuves expérimentales auxquelles fut soumise cette méthode, utilisable dans le cas des houles de faible cambrure et même des rides.

INTRODUCTION

Avant d'entamer une analyse détaillée de cette méthode relativement nouvelle de mesure d'amplitude, il serait intéressant d'indiquer certains des cas dans lesquels elle peut être mise en œuvre.

Les exemples suivants nous viennent à l'esprit :

- 1° Dans les études sur modèle réduit des digues perméables (à la houle) derrière lesquelles, bien souvent, la houle résiduelle présente une amplitude extrêmement faible;
- 2° Dans la mesure de l'amplitude des rides — problème qui, autant que nous sachions, n'a pas encore reçu de solution.

En même temps, il est essentiel d'insister sur les limites de la méthode. Les vagues doivent être petites, régulières et parallèles. De telles restrictions sont évidemment sévères, mais la houle de faible cambrure respecte fréquemment de telles conditions.

Les grands avantages de cette méthode résident d'abord dans le fait qu'elle permet d'obtenir une amplification extrêmement importante* et qu'elle

évite l'utilisation d'un équipement plus coûteux (telle que la pointe à résistance dont nous parlerons dans un prochain article); de plus, les mesures sont directes et exigent seulement un bon éclairage, un mètre souple et quelques baguettes ou quelques fils tendus, suspendus au-dessus du plan d'eau. Sa précision est très grande : malgré le caractère rudimentaire de l'équipement expérimental décrit, l'auteur a réussi à mesurer des houles ayant seulement quelques mm d'amplitude avec une erreur probable ne dépassant pas 0,1 mm; la précision relative devrait être la même pour des rides mesurées dans des conditions convenables.

La présente méthode est assez différente d'une autre méthode optique de mesure de houle connue sous le nom de : « Ciel étoilé »¹; méthode fréquemment utilisée dans les travaux sur modèle réduit pour obtenir une mesure rapide des amplitudes de la houle, dans une zone déterminée d'un modèle. Elle consiste à photographier l'image, réfléchie par le plan d'eau, d'un grand nombre d'ampoules lumineuses, disposées au-dessus de lui; aussi vaste que

* 280 pour les houles les plus courtes essayées par l'auteur (19 cm). Se reporter aux résultats.

1. Les chiffres en exposant renvoient à la bibliographie présentée à la fin du texte anglais.

soit la zone à étudier, il est facile d'estimer, simultanément en de nombreux points, l'amplitude de la houle en mesurant la longueur de l'image laissée par chaque ampoule sur la photographie prise avec un temps de pose suffisamment long. Cependant cette région est nécessairement réduite aux dimensions de la plaque photographique employée dans l'appareil; en fin de compte, les valeurs de l'amplitude doivent être déduites de la longueur des très petits bâtonnets lumineux que présente le cliché; il est par conséquent impossible d'obtenir des résultats d'une grande précision. En résumé, la méthode du Ciel étoilé est rapide, elle peut s'adapter à toute sorte de houle, mais elle est peu précise et exige un équipement tout à fait particulier; la méthode que nous décrivons dans le présent article est précise, ne demande que peu d'équipement mais ne convient qu'à des houles régulières de faible cambrure.

NOTATIONS :

- $2a$: amplitude de la houle.
- b : hauteur de la murette (ligne BR) au-dessus du plan d'eau.
- c : célérité de la houle.
- d : hauteur, au-dessus du plan d'eau, d'un viseur repère mobile à travers lequel passe le regard de l'observateur.
- f : distance horizontale entre la ligne WNV et la murette BR (fig. 5).
- g : accélération de la pesanteur.
- h : profondeur moyenne dans le bassin.
- k : hauteur de la ligne WNV au-dessus du plan d'eau (fig. 5).
- m : $\frac{2\pi}{L}$.
- n : angle de phase de la houle en un point donné.
- p, q : coordonnées du point P (fig. 2).
- r : coordonnée du point R sur l'axe des x (fig. 2).
- s : intervalle séparant les viseurs-repères S et T.
- t : temps.

ω : $(\omega t - mx)$ dans l'expression (1) de la surface libre.

x, y : abscisse et ordonnée (fig. 2).

x_1 : abscisse du point A (fig. 2).

L : longueur d'onde.

T : période de la houle.

α : désignation d'un plan incliné (fig. 3 et 4).

β : désignation d'un plan oblique (fig. 4).

μ : $\frac{2\pi}{T}$ dans la définition de ω ci-dessus.

θ : angle précisé dans la figure 2.

Φ : coefficient défini par l'équation 17; $1/\Phi$ donne le grossissement de la méthode optique. Par exemple $1/\Phi = 280$ pour $L \neq 19$ cm dans les essais.

$$\Omega : 1/2 am \cotgh mh \left[1 + \frac{3}{2 \operatorname{sh}^2 mh} \right]$$

PRINCIPE DE LA MÉTHODE

Supposons d'abord que nous regardions un train de houle se déplacer le long d'un bassin dont l'une des parois est constituée par une murette parallèle

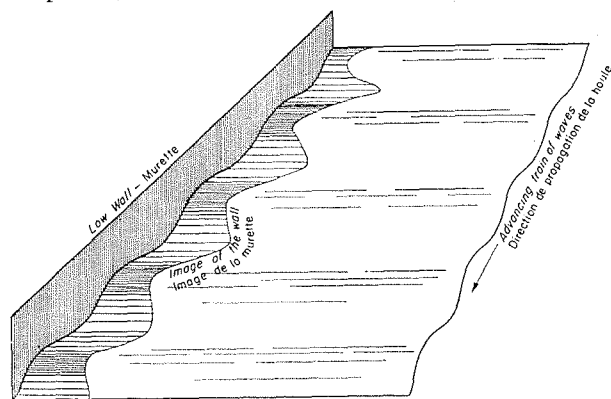


FIG. 1.

à la direction de propagation (voir fig. 1). L'image du sommet de la murette dans l'eau est une ligne sinuose; ces sinuosités, à peine perceptibles à la verticale du point d'observation, deviennent de plus en plus prononcées, au fur et à mesure que nous

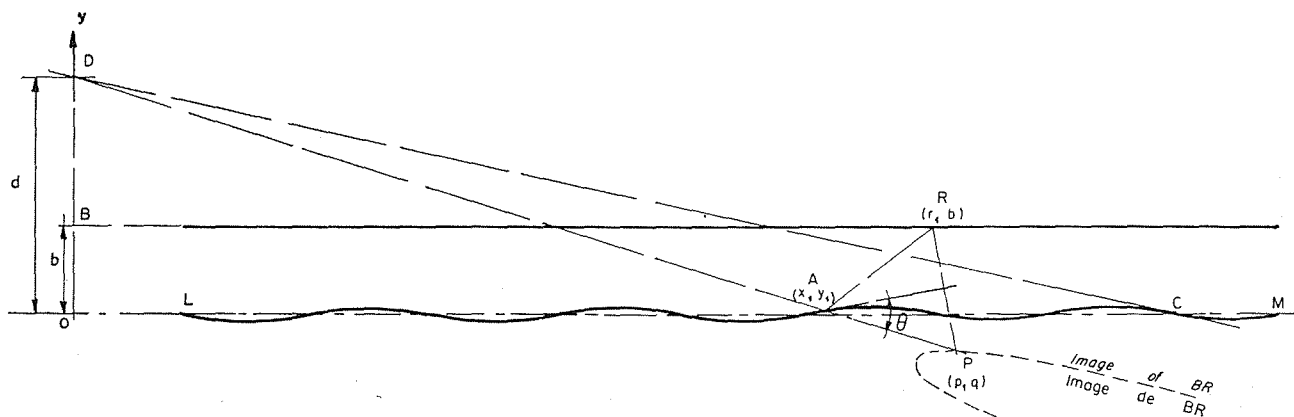


FIG. 2.

regardons plus loin, jusqu'à une certaine distance au-delà de laquelle l'image devient discontinue. Ce phénomène, qui se produit lorsque le regard de l'observateur est tangent à la plus grande pente de l'onde (fig. 2, rayon lumineux DC), peut aussi servir à exprimer l'amplitude de la houle. Ainsi, si l'on prend, pour l'expression de la surface libre, la formule au second ordre de MICHE :

$$y = a \cos \omega + a \Omega \cos 2 \omega$$

La pente est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = am \sin \omega + 2 am \Omega \sin 2 \omega$$

elle est maximum (ou minimum) pour :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -am^2 \cos \omega - 4 am^2 \Omega \cos 2 \omega = 0$$

Comme $\cos 2 \omega = 2 \cos^2 \omega - 1$, cette équation est du second degré en $\cos \omega$, et a pour solution :

$$16 \Omega \cos \omega = -1 + \sqrt{1 + 128 \Omega^2}$$

Si Ω est petit,

$$\cos \omega \approx 4 \Omega - 128 \Omega^2$$

$$\sin \omega \approx \pm (1 - 8 \Omega^2)$$

Si bien que la pente maximum est :

$$\pm am (1 + 8 \Omega^2)$$

Par suite de difficultés pratiques, cette méthode n'est pas applicable aux houles de petite cambrure bien qu'elle semble, au premier abord, plus simple que celle que nous décrivons ci-après; il est en effet presque impossible de noter, avec précision, le moment où l'image devient discontinue. Par contre, elle peut certainement s'appliquer au cas des houles fortement cambrées telles que celles que l'on peut rencontrer dans l'océan.

Avant d'atteindre ce point (image discontinue), nous distinguons une espèce d'image qui oscille, à la manière d'un accordéon, à la surface de l'eau, et qui reproduit, mais considérablement exagéré et distordu, le profil de la houle.

Bien que la distorsion soit grande, il est infiniment probable qu'il existe une relation relativement simple entre l'amplitude de ces oscillations (observées d'un point déterminé) et l'amplitude de la houle; nous nous proposons, dans cet article, de prouver, non seulement qu'une telle relation existe, mais qu'elle peut permettre de déterminer l'amplitude de la houle d'une façon particulièrement simple. Deux hypothèses sont nécessaires :

- 1° La cambrure de la houle est petite,
- 2° La ligne de visée de l'observateur est voisine de l'horizontale.

Les calculs comportent les trois stades qui suivent :

a) On recherche l'expression de la forme de l'image d'une ligne horizontale (par exemple le sommet de la murette) telle qu'elle apparaît, à un instant donné, à un observateur examinant la surface des

vagues; cette image se trouve dans le plan vertical de la murette ou de la ligne observée, en arrière du plan d'eau. A ce point de vue, elle se présente comme une image vue dans un miroir, mais sa forme est trop compliquée pour être calculée de façon explicite (fig. 2);

b) On considère ensuite les mouvements de cette image en un point donné x de la surface de l'eau lorsque la houle se déplace. On arrive ainsi à une expression simple donnant les limites de l'oscillation verticale de l'image en un point donné;

c) On recherche enfin un moyen pratique de mesurer « l'amplitude » de l'image. Celle-ci, en effet, loin d'apparaître comme verticale, semble s'étendre

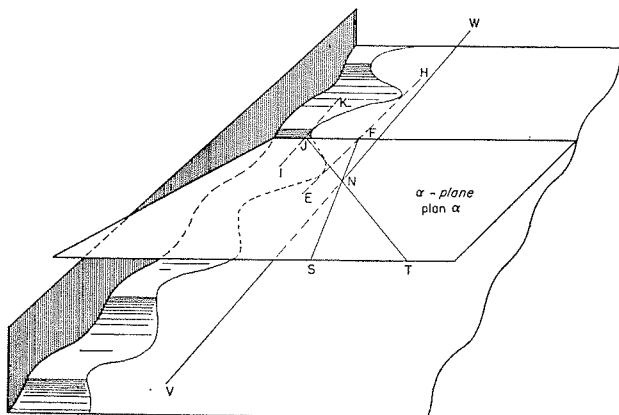


FIG. 3.

sur une certaine largeur à la surface de la houle (fig. 3) et en réalité c'est une certaine largeur apparente (entre deux viseurs-repères disposés sur une traverse) de l'image qui est en fin de compte mesurée.

CALCULS

A) EQUATION DE L'IMAGE.

Compte tenu de l'hypothèse n° 1 ci-dessus, on peut adopter, pour représenter la surface libre, l'équation au premier ordre :

$$y = a \cos \omega$$

Si l'on se réfère à la figure 2, la pente de AD est :

$$-\left(\frac{d - y_1}{x_1}\right) = -\left(\frac{d - a \cos \omega_1}{x_1}\right) \quad (2)$$

où A est un point de la surface libre de coordonnées (x_1, y_1) et :

$$\omega_1 = \mu t - m x_1$$

La pente de la surface libre est :

$$\frac{dy}{dx} = am \sin \omega \quad (3)$$

D'après (2) et (3), il s'avère que, en écrivant ω au lieu de ω_1 pour simplifier :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{am \sin \omega + \left(\frac{d - a \cos \omega}{x_1} \right)}{1 - \frac{(d - a \cos \omega) am \sin \omega}{x_1}}$$

et :

$$\frac{b - y_1}{r - x_1} = \frac{\operatorname{tg} \theta + am \sin \omega}{1 - am \sin \omega \operatorname{tg} \theta} \quad (4)$$

qui permet d'exprimer r en fonction de x_1 .

De plus, si p et q sont les coordonnées de P,

$$\frac{y_1 - q}{p - x_1} = \frac{d - y_1}{x_1} \quad (5)$$

et :

$$\frac{b - q}{p - r} = \frac{1}{am \sin \omega} \quad (6)$$

$$r = x_1 + (b - a \cos \omega) \left[\frac{(1 - a^2 m^2 \sin^2 \omega) - \frac{2 am \sin \omega}{x_1} (d - a \cos \omega)}{2 am \sin \omega + (1 - a^2 m^2 \sin^2 \omega) \frac{(d - a \cos \omega)}{x_1}} \right] \quad (8)$$

Si, dans l'expression (7), on remplace r par l'expression ci-dessus, il est possible d'obtenir le résultat recherché, autrement dit la valeur de q en fonction de x_1 . On peut ainsi préciser tous les aspects du problème. Pour obtenir les diverses valeurs de l'oscillation verticale de l'image, il suffit de faire varier la valeur ω qui est une fonction du temps t .

Ce procédé serait néanmoins très compliqué, et il conviendrait de simplifier le calcul; ceci peut se faire en tenant compte de la deuxième hypothèse.

B) AMPLITUDE DE L'OSCILLATION DE q DANS UN PLAN VERTICAL

Si le regard de l'observateur rase la houle, les limites verticales extrêmes de l'image seront atteintes pour :

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega &= 0 \\ \sin \omega &= \pm 1 \end{aligned} \right\}$$

En effet, si, comme nous l'avons déjà vu dans le cas du rayon DC de la figure 2, la ligne de visée est tangente à la partie à pente maximum du profil d'onde, le point correspondant de l'image se trouve rejeté à l'infini. D'autre part, une demi-longueur d'onde plus loin, l'image remonte pour atteindre approximativement sa plus haute position possible (ce n'est évidemment pas le cas près du point d'observation; au droit de l'observateur, les valeurs extrêmes sont, en fait, atteintes lorsque $\cos \omega = \pm 1$).

Ces deux équations permettent de calculer p et q en fonction de x_1 . En fait, on a :

$$\begin{aligned} p - x_1 &= \frac{x_1 (y_1 - q)}{d - y_1} \\ &= \frac{x_1 (a \cos \omega - q)}{d - a \cos \omega} \end{aligned}$$

et :

$$p - r = (b - q) am \sin \omega$$

Donc :

$$(b - q) am \sin \omega + r = x_1 + \frac{x_1 (a \cos \omega - q)}{d - a \cos \omega}$$

Donc :

$$q = \frac{x_1 d + (r + abm \sin \omega) (d - a \cos \omega)}{x_1 - am \sin \omega (d - a \cos \omega)} \quad (7)$$

et, en tenant compte de l'équation (4) :

Considérons maintenant séparément les deux cas extrêmes :

$$\alpha) \quad \begin{aligned} \sin \omega &= 1 \\ \cos \omega &= 0 \end{aligned}$$

on trouve :

$$q = \frac{x_1 d - rd - abdm}{x_1 - adm} \quad (9)$$

et :

$$r = x_1 + b \left[\frac{1 - a^2 m^2 - \frac{2 adm}{x_1}}{2 am + \frac{d}{x_1} (1 - a^2 m^2)} \right] \quad (10)$$

Puisqu'on suppose que a est petit, on trouve, en simplifiant (10), que :

$$r \approx x_1 \left\{ 1 + \frac{b}{d} \right\} - \frac{2 abm x_1}{d} \left\{ \frac{x_1}{d} + \frac{d}{x_1} \right\}$$

et par conséquent :

$$q \approx b + \frac{2 abm x_1}{d}$$

$$\beta) \quad \sin \omega = -1$$

$$\cos \omega = 0$$

on trouve que :

$$r \neq x_1 \left(1 + \frac{b}{d} \right) + \frac{2 abmx_1}{d} \left(\frac{x_1}{d} + \frac{d}{x_1} \right)$$

et par conséquent :

$$q \neq -b - \frac{2 abmx_1}{d}$$

(Les valeurs correspondantes de p peuvent se calculer facilement.)

Pour un observateur placé en D et regardant suivant la ligne DA, l'image de la ligne horizontale oscille avec une amplitude verticale égale à :

$$\left\{ -b + \frac{2 abmx_1}{d} \right\} - \left\{ -b - \frac{2 abmx_1}{d} \right\} = \frac{4 abmx_1}{d} \tag{11}$$

C) MESURE DE LA LARGEUR DE L'IMAGE OSCILLANTE.

Afin de voir les oscillations de l'image de la murette BR, l'observateur doit se placer légèrement sur le côté du plan vertical BRP. Il a alors l'impression que l'image de BR oscille à la surface de la houle, ainsi que le montre la figure 1 (ce n'est évidemment qu'une impression d'optique puisque, en réalité, l'image oscille bien dans le plan vertical de la murette).

Pour mesurer l'image, il semble donc naturel de mesurer sa largeur apparente suivant la méthode montrée par la figure 3. Nous supposons que le regard de l'observateur est toujours maintenu dans le plan incliné α que l'on voit au centre de la figure. Pratiquement, cette condition est réalisée en disposant au-dessus du bassin d'essai, à une certaine distance l'une de l'autre, deux traverses horizontales légèrement décalées en hauteur l'une par rapport à l'autre. Les observations portent alors sur la portion de la surface libre de la houle vue par l'observateur, lorsque son regard est exactement tangent à l'arête supérieure de ces deux traverses.

Supposons maintenant que, parallèlement à la direction de propagation des houles, nous tendions un fil VNW le long du bassin d'essai; nous admettrons que ce fil est situé au-dessus du plan d'eau (plus loin, lors de la discussion de nos expériences, nous verrons que, par suite des effets de la réfraction, l'adoption d'une ligne tracée sur le fond du bassin d'essai entraîne pas mal de complications).

En regardant avancer le train de houle, l'observateur peut distinguer deux courbes enveloppes (EFH et IJK de la figure 3), entre lesquelles oscille l'image. Tout en alignant son regard sur les deux traverses (afin que son regard demeure dans le plan incliné α), il peut amener ces courbes à toucher le fil horizontal VNW; les rayons lumineux FNS et JNT, correspondant aux deux positions qu'il doit occuper pour réaliser cette condition, coupent l'arête supérieure du plan incliné α aux points S et T. Il peut alors matérialiser S et T par deux repères (S. et T se trouvent

en fait sur l'arête supérieure de la traverse la plus proche de lui), et en mesurant la distance ST, il est facile de calculer la largeur apparente JF des oscillations de l'image. Pour arriver à la valeur (2 a) cherchée, il ne reste plus maintenant qu'à calculer la hauteur JG (fig. 4) qui, en réalité, est égale à :

$$\frac{4 abmx_1}{d}$$

(voir ci-dessus)

La figure 4 montre que l'on peut calculer une relation liant JG et ST.

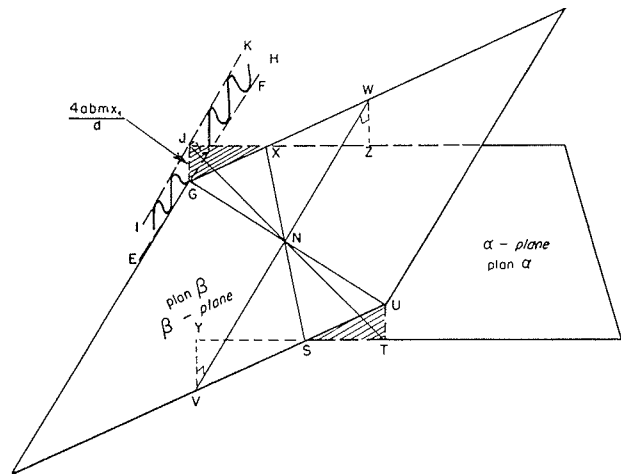


FIG. 4.

Tout d'abord, les courbes IJK et EFH sont en réalité dans le même plan vertical. Les points JFN S et T sont tous dans le plan α ; les points S et F se trouvant également dans un autre plan oblique β portant WNV. De plus, au premier ordre d'approximation, on peut considérer que GF est parallèle à WNV : sur la longueur GF, l'écart de parallélisme est petit vis-à-vis de la longueur JG*; G peut ainsi être considéré comme appartenant au plan β .

Désignons par Z et Y (fig. 4) l'intersection avec les horizontales JX et ST du plan vertical passant par WNV.

Alors à ce moment :

$$\frac{ST}{JX} = \frac{YV}{WZ} = \frac{d-k}{b+k} \tag{12}$$

Nous ne perdons, en effet, rien en généralité, en supposant que l'œil de l'observateur est au droit de YST.

Si l'on se réfère à la figure 5, qui représente une section transversale du bassin avec un plan d'eau au

* A ce point de vue la figure 4 est légèrement erronée pour le plan β , généralement choisi de façon à ce que sa pente atteigne environ 45°. Aussi si d/x_1 , autrement dit l'inclinaison du plan α , est petit, la hauteur de l'image $\frac{4 abmx_1}{d}$ ne changera que très peu entre F et G, et GF sera alors presque horizontale.

repos, nous voyons que, au même ordre d'approximation que ci-dessus :

$$\begin{aligned} \frac{JX}{JG} &= \frac{1}{\text{pente du plan } \beta} \\ &= \frac{f}{b+k} \end{aligned} \quad (13)$$

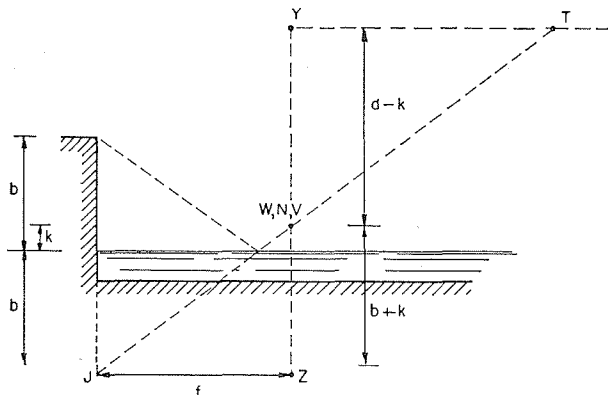


FIG. 5.

En combinant les expressions (12) et (13), on trouve que :

$$ST = JG \left\{ \frac{f(d-k)}{(b+k)^2} \right\} \quad (14)$$

D) FORMULE DONNANT L'AMPLITUDE DE LA HOULE

Des expressions (11) et (14) on peut immédiatement déduire une formule pratique donnant l'amplitude de la houle $2a$, en fonction de la largeur appa-

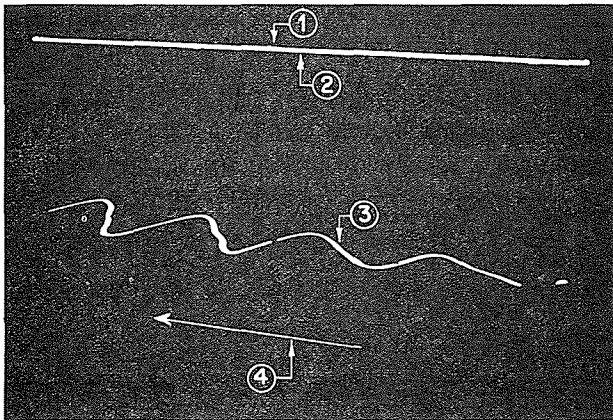


FIG. 6. — Image typique obtenue par réflexion d'une ligne droite, à la surface de la houle.

- 1 : Ligne droite; 2 : Tube lumineux suspendu au-dessus du plan d'eau; 3 : Image; 4 : Direction de propagation de la houle.

Typical image obtained by reflexion of a horizontal line on the surface of waves.

- 1 : Horizontal line; 2 : Neon lamp suspended above water; 3 : Image; 4 : Direction of wave propagation.

rente $ST = s$, autrement dit, en fonction de l'oscillation de l'image telle qu'on la « mesure » sur la traverse YST. La formule définitive est la suivante :

$$2a = \frac{sd(b+k)^2}{2bfmx_1(d-k)} \quad (15)$$

APPAREILLAGE

Afin de vérifier l'exactitude de la théorie développée ci-dessus, nous nous sommes livrés à des essais dans le bassin à houle de précision, que nous avons décrit dans le second des articles de cette série (*Houille Blanche*, n° 5, 1951, p. 770).

Le plan α était défini par deux traverses disposées en travers du canal; les repères, destinés à matérialiser les points S et T, étaient placés sur la plus haute de ces traverses. Sur la plus basse était monté un dispositif électrique (pointe de mesure à résistance) dont nous parlerons dans un prochain article; ceci afin de contrôler les résultats obtenus par la méthode optique.

Quant au fil WNV, il était remplacé dans les essais par une ligne tracée sur le fond du bassin (en réalité, c'était l'une des cornières usinées, utilisées pour le troussage du fond du bassin; les arêtes supérieures de ces cornières étaient encore visibles dans le béton). L'adoption d'une ligne de référence noyée introduisait une complication supplémentaire, due à la réfraction que nous préciserons ci-dessous.

Les données du problème (dimensions du bassin, etc.) étaient les suivantes :

$$b = 61 \text{ cm}$$

$$d = 37,4 \text{ cm}$$

$$f = 140,4 \text{ cm}$$

$$h = 11,0 \text{ cm}$$

$$\frac{x_1}{d} = \frac{95,4}{22,25}$$

Ce dernier rapport s'explique de la façon suivante : la différence de niveau entre les deux traverses dont nous avons déjà parlé était de 22,25 cm; leur écartement horizontal atteignait 95,4 cm.

Afin de trouver k , il faut tenir compte de la réfraction; k n'est pas égal à $-h$, mais à une certaine fraction, petite, de $-h$. Un calcul complet montrerait que $k = 2,5$, ce qui est étonnamment petit.

La période des houles essayées était mesurée, suivant la méthode habituelle, à l'aide d'un chronomètre : connaissant la célérité de la houle, ceci permettait de calculer m ; pour le calcul de la célérité de la houle, nous avons adopté la formule simple

$$c = \frac{L}{T} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} \operatorname{tgh} \frac{2\pi h}{L} \quad (16)$$

Au cours des essais, les longueurs d'onde variaient entre 19 et 74 cm, les périodes correspondantes se tenant entre 0,345 et 0,802 secondes; comme nous l'avons déjà dit, tous les essais ont été réalisés avec une profondeur d'eau de 11 cm.

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Pour chaque essai, le tableau ci-dessous donne :

- La longueur d'onde L (calculée);
- La valeur du coefficient :

$$\Phi = \frac{d(b+k)^2}{2bfmx_1(d-k)} \quad (17)$$

intervenant dans l'équation (15).

- La valeur de $s = ST$ (écartement des repères);
- La valeur $s\Phi$ de l'amplitude de la houle donnée par la méthode optique;
- Et, dans la dernière colonne, l'amplitude de la houle mesurée par la pointe à résistance.

CONCLUSION

D'une façon générale, la concordance, entre les mesures optiques de l'amplitude et les mesures effectuées à la pointe électrique, est excellente; le grand écart que traduit l'essai n° 20 doit certainement être attribué à la cambrure relativement importante des houles dans ce cas. La concordance est en fait si bonne que l'on peut, sans se tromper, affirmer le haut degré de précision non seulement de la méthode optique elle-même, mais également de l'appareillage électrique; dans le cas des houles de très faible amplitude, les deux méthodes sont capables d'une précision de l'ordre du 1/10 de mm. En même temps, les essais ont très clairement montré les limites de la méthode optique : pour obtenir une grande précision, il ne semble pas que la cambrure de la houle doive dépasser 1/100.

L'auteur, en terminant, tient à exprimer sa reconnaissance à M. DANIEL, Directeur du Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique (Neyrpic), à qui revient le mérite de lui avoir suggéré les travaux décrits ci-dessus.

G. D. RANSFORD.

TABLEAU — TABLE

TEST Essai n°	Longueur d'onde WAVE LENGTH L (cm)	Φ	s (cm)	Amplitude optique $s\Phi$ OPTICAL AMPLITUDE (mm)	Amplitude mesurée à la pointe à résistance RESISTANCE POINT AMPLITUDE (mm)
1	73.6	0.0138	24	3.3	3.0
2	»	»	39.5	5.5	5.6
3	»	»	60	8.3	9.2
4	»	»	39	5.4	5.6
5	»	»	30	4.1	4.5
6	»	»	26.5	3.7	4.2
7	47.6	0.00895	35.5	3.2	3.4
8	»	»	18.5	1.65	1.75
9	»	»	18.5	1.65	1.7
10	»	»	16	1.45	1.6
11	»	»	44	4.0	4.0
12	»	»	29.5	2.65	2.9
13	31.3	0.00588	25.5	1.5	1.4
14	»	»	50.5	3.0	2.1
15	»	»	18	1.05	0.8
16	30.8	0.00579	42	2.4	2.3
17	»	»	18.25	1.05	0.9
18	»	»	28.5	1.65	1.4
19	19.8	0.00372	24	0.9	0.8
20	»	»	106	3.9	1.6
21	»	»	15	0.55	0.55
22	19.0	0.00357	17.75	0.65	0.5
23	»	»	34.5	1.2	1.05
24	»	»	40	1.4	1.4

LABORATORY PRACTICE

Measuring the amplitude of low camber waves by optical images

See French text for illustrations (p. 56)

Texte français, p. 55.

In this article, a direct method of determining wave amplitudes is explained and is submitted to an experimental check. This method may be used for low camber waves and even for ripples.

INTRODUCTION

Before going into a detailed analysis of this somewhat novel method of wave amplitude measurement, it is worthwhile indicating certain practical uses to which it may be put.

The following suggest themselves at once :

- (i) In model studies on the permeability (to waves) of porous breakwaters, where frequently the vestigial waves which succeed in passing through the structure are of extremely low amplitude.
- (ii) For measuring the amplitude of ripples—a problem which, as far as the author is aware, has not hitherto been solved.

At the same time, it is important to stress the drawbacks of the method. The waves *must* be smooth, regular and parallel. These restrictions are naturally serious, but the conditions mentioned are frequently satisfied by low camber waves.

Its great advantages are, firstly, that the magnification, obtained is extremely large* and, secondly, that it enables more costly equipment (such as the resistance measuring point to be studied in a later article in the present series) to be dispensed with; measurements are direct, and require nothing more than good illumination, a measuring tape and a few joists or taut wires suspended above the water

surface. Its accuracy is extremely high, and despite a makeshift experimental set-up of the type just described, the author succeeded in measuring waves of a few millimetres amplitude with a probable accuracy of about 0.1 mm; the relative accuracy would be maintained for ripples measured under proper conditions.

*
**

The present method contrasts therefore with that other optical method of wave measurement¹, the "ciel étoilé" or "starry sky", which is frequently used in practical model work to give speedy measurements of wave amplitudes in a limited region of a model. In this case, a photograph is taken of the pattern made on the water surface by a number of light bulbs suspended overhead; the lengths of the images of these bulbs, recorded on the photograph by a suitably long time exposure, enable the wave amplitude to be obtained simultaneously throughout whole the region being investigated. However, this region is necessarily reduced to the scale of the photographic plate employed in the camera; the wave amplitudes must consequently be estimated from what are, in reality, minute streaks of light on the print finally obtained, and cannot therefore be measured with any high order of accuracy. In brief, the "starry sky" method is rapid, convenient, and suits all

* 280 for the shortest wave-length (19 cms) tested by the author. See test results.

1. Superscripts refer to references at the end.

types of waves, but is approximate and calls for rather special equipment; the method described in the present article is precise, requires a minimum of equipment, but is suitable for regular waves of low camber only.

*
**

NOTATION.

- $2a$: wave amplitude,
- b : height of wall (line BR) above water-level,
- c : wave velocity,
- d : height of a movable target above water-level; the observer's line of sight passes through this target,
- f : horizontal distance between line WNV and wall BR (see fig. 5),
- g : acceleration of gravity,
- h : mean depth of water in wave flume,
- k : distance of line WNV above water surface (see fig. 5),
- m : $\frac{2\pi}{L}$
- n : phase angle of wave at a given point,
- p, q : coordinates of point P, fig. 2,
- r : x coordinate of point R, fig. 2,
- s : distance between targets S and T,
- t : time,
- ω : $(\mu t - mx)$ in the expression (1), for the free surface of the wave,
- x, y : abscissae and ordinates, fig. 2, etc.,
- x_1 : abscissa of point A, fig. 2,
- L : wave-length,
- T : period of waves,
- α : designation of a sloping plane, fig. 3 and 4,
- β : designation of an inclined plane, fig. 4,
- μ : $\frac{2\pi}{T}$ in definition of ω above,
- θ : angle shown in fig. 2,
- Φ : factor defined in eqn. (17); $1/\Phi$ gives magnification of optical method, e.g. $1/\Phi = 280$ for $L = 19$ cm in tests.
- Ω : $1/2 am \coth mh \left[1 + \frac{3}{2 \sinh^2 mh} \right]$

PRINCIPLE OF THE METHOD

Suppose for a moment that we are watching waves travel down a long flume, one side of which is enclosed by a low wall parallel to the direction of propagation (see fig. 1). The image of the top of the wall in the water is a sinuous line; the sinuosities, which are barely perceptible opposite

the point of observation, become more and more pronounced as we look down the flume until at a sufficient distance away the image becomes discontinuous.

This occurs when the observer's line of sight grazes the steepest part of the wave (see fig. 2, ray DC), and can also be used to estimate the wave amplitude. Thus taking Miche's² second-order formula for the free wave surface:

$$y = a \cos \omega + a \Omega \cos 2 \omega$$

the slope is found to be:

$$\frac{dy}{dx} = am \sin \omega + 2 am \Omega \sin 2 \omega$$

and is maximum (or minimum) for:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -am^2 \cos \omega - 4 am^2 \Omega \cos 2 \omega = 0$$

Since $\cos 2 \omega = 2 \cos^2 \omega - 1$, this equation is quadratic in $\cos \omega$, and yields the solution:

$$16 \Omega \cos \omega = -1 + \sqrt{1 + 128 \Omega^2}$$

If Ω is small:

$$\cos \omega \cong 4 \Omega - 128 \Omega^2$$

$$\sin \omega \cong \pm (1 - 8 \Omega^2)$$

so that the maximum slope is:

$$\pm am (1 + 8 \Omega^2)$$

This method, though seemingly much simpler than the one described in the paper, is not feasible for waves of small camber owing to practical difficulties; it is almost impossible to decide precisely when the image becomes discontinuous. On the other hand it is certainly applicable to highly cambered waves, such as those one meets with in the ocean.

Before this point is reached, however, we see, as it were, an image which oscillates in concertina fashion on the surface of the water, forming a tremendously exaggerated and distorted picture of the wave profile.

Though the distortion is large, it is yet probable that a fairly simple relation exists between the amplitude of the oscillations (as observed from a known point) and the wave amplitude; this paper is devoted to proving that such a relation not only exists but can be availed of to determine the wave amplitude in a particularly simple way. Two assumptions are necessary:

- (i) the camber of the waves must be small;
- (ii) the observer's line of sight should be fairly close to the horizontal.

The calculations are effected in three steps, as follows:

- a) Expressions are derived giving the shape of

the image of a horizontal line (e.g., the top of the wall) seen by an observer at a given instant in the surface of the waves; this image lies in the vertical plane of the wall or line being viewed, beneath the water surface. In this respect, it is like an image seen in a mirror, but the shape is too complicated to be calculated in explicit terms (see fig. 2).

b) We next consider variations in this image occurring at a given point x , on the water surface as the waves move forward. In this way a simple expression is derived for the limits of vertical oscillation of the image at a given point.

c) Finally consideration is given to practical means of measuring the "amplitude" of the image. This in fact, far from seeming vertical, appears to embrace a certain width of the wave surface (as in fig. 3) and it is actually in terms of an apparent width (between two targets placed on a cross-beam) that the image is ultimately measured.

CALCULATIONS

A) EQUATION OF THE IMAGE

In virtue of assumption (i) above the first order equation :

$$y = a \cos \omega$$

may be taken to represent the free water surface.

Referring to fig. 2, the slope of AD is:

$$-\left(\frac{d-y_1}{x_1}\right) = -\left(\frac{d-a \cos \omega_1}{x_1}\right) \quad (2)$$

where A is a point on the free surface, with coordinates (x_1, y_1) , and:

$$\omega_1 = \mu t - m x_1$$

The slope of the free surface is:

$$\frac{dy}{dx} = am \sin \omega \quad (3)$$

$$r = x_1 + (b - a \cos \omega) \left[\frac{(1 - a^2 m^2 \sin^2 \omega) - \frac{2 am \sin \omega}{x_1} (d - a \cos \omega)}{2 am \sin \omega + (1 - a^2 m^2 \sin^2 \omega) \frac{(d - a \cos \omega)}{x_1}} \right] \quad (8)$$

By substitution of (8) in (7), the required result, namely, an explicit expression for q in terms of x_1 and the other data of the problem, could be obtained; the value of ω , which incorporates the time t , could then be varied in order to obtain the range of vertical oscillation of the image.

This would be a much too complicated procedure, and the analysis must be simplified; this can be done in virtue of assumption (ii).

Thus, from (2) and (3) we find, on writing ω instead of ω_1 for simplicity,

$$\tan \theta = \frac{am \sin \omega + \left(\frac{d - a \cos \omega}{x_1}\right)}{1 - \frac{(d - a \cos \omega) am \sin \omega}{x_1}}$$

and:

$$\frac{b - y_1}{r - x_1} = \frac{\tan \theta + am \sin \omega}{1 - am \sin \omega \tan \theta} \quad (4)$$

whence r may be expressed as a function of x_1 .

Moreover, if p and q are the coordinates of P:

$$\frac{y_1 - q}{p - x_1} = \frac{d - y_1}{x_1} \quad (5)$$

and:

$$\frac{b - q}{p - r} = \frac{1}{am \sin \omega} \quad (6)$$

This pair of equations allows p and q to be calculated in terms of x_1 . In fact, we have that:

$$\begin{aligned} p - x_1 &= \frac{x_1 (y_1 - q)}{d - y_1} \\ &= \frac{x_1 \{a \cos \omega - q\}}{d - a \cos \omega} \end{aligned}$$

and :

$$p - r = (b - q) am \sin \omega$$

Thus:

$$(b - q) am \sin \omega + r = x_1 + \frac{x_1 (a \cos \omega - q)}{d - a \cos \omega}$$

whence:

$$q = \frac{x_1 d + (r + abm \sin \omega) (d - a \cos \omega)}{x_1 - am \sin \omega (d - a \cos \omega)} \quad (7)$$

and, from (4):

B) VERTICAL RANGE OF OSCILLATION OF q

If the line of sight of the observer just grazes the waves, the image will reach its extreme vertical limits for:

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega &= 0 \\ \sin \omega &= \pm 1 \end{aligned} \right\}$$

For, if as in the case of the ray DC, fig. 2, previously discussed, the line of sight just grazes the steepest portion of the wave profile, the corresponding point of the image is located at infinity. On the other hand, half a wave-length further on the image reascends to approximately the highest position it can reach (such is *not* the case *near* the observation point, of course; opposite the observer, the extremes are actually reached when $\cos \omega = \pm 1$).

Let us now consider the two extremes separately:

$$\alpha) \quad \begin{aligned} \sin \omega &= 1 \\ \cos \omega &= 0 \end{aligned}$$

We find that:

$$q = \frac{x_1 d - rd - abdm}{x_1 - adm} \tag{9}$$

and:

$$r = x_1 + b \left[\frac{1 - a^2 m^2 - \frac{2 adm}{x_1}}{2 am + \frac{d}{x_1} (1 - a^2 m^2)} \right] \tag{10}$$

Since a is presumed small, we find, on simplifying (10), that:

$$r \cong x_1 \left\{ 1 + \frac{b}{d} \right\} - \frac{2 abmx_1}{d} \left\{ \frac{x_1}{d} + \frac{d}{x_1} \right\}$$

whence:

$$q \cong -b + \frac{2 abmx_1}{d}$$

$$\beta) \quad \begin{aligned} \sin \omega &= -1 \\ \cos \omega &= 0 \end{aligned}$$

we find that:

$$r \cong x_1 \left\{ 1 + \frac{b}{d} \right\} + \frac{2 abmx_1}{d} \left\{ \frac{x_1}{d} + \frac{d}{x_1} \right\}$$

whence:

$$q \cong -b - \frac{2 abmx_1}{d}$$

(The corresponding values of p can be readily calculated).

The vertical amplitude of oscillation of the image of the horizontal line BR, as seen by an observer situated at D and looking along DA, is therefore equal to:

$$\left\{ -b + \frac{2 abmx_1}{d} \right\} - \left\{ -b - \frac{2 abmx_1}{d} \right\} = \frac{4 abmx_1}{d} \tag{11}$$

C) MEASUREMENT OF THE "WIDTH" OF THE OSCILLATING IMAGE

In order to view the oscillating image of the wall BR, the observer must stand somewhat to one side of the vertical plane BRP. He now has the impression that the image of BR oscillates to-and-fro across the surface of the advancing waves, as can be seen in fig. 1 (this is of course an optical illusion as the image really oscillates in the vertical plane of the wall).

In order to measure the image, it thus seems natural to measure its apparent width, and this is done as shown in fig. 3.

We suppose that the observer's line of sight always lies in the inclined plane α shown in the centre of the figure; this can be done in practice by installing two joists above the wave flume, one slightly lower than, and at a certain distance from, the other. Observations are then made on that part of the wave surface seen by the observer when his line of sight just grazes the upper edges of both joists.

Let us also suppose that a horizontal wire VNW is stretched along the wave flume, parallel to the direction of propagation; we presume that this is above the water surface (later on, in discussing the experiments, it will be seen that some extra complications are introduced by the use of a line ruled on the bottom of the wave flume, due to refraction effects).

As he watches the advancing train of waves, the observer may distinguish two enveloping curves (EFH and IJK in fig. 3) between which the image oscillates. By lining himself up on the beams (so that his line of sight lies in the inclined plane α), he can view these curves against the horizontal wire VNW as shown; the rays FNS and JNT, which correspond to the two positions which he occupies in order to do this, cut the upper edge of the inclined plane α at points S and T. He can then locate S and T by two targets (S and T lying in actual fact on the upper edge of the joist nearest to him), and from the measured distance ST, the apparent width JF of the oscillating image can be easily calculated. It then remains to calculate the height JG (see fig. 4) which in reality equals:

$$\frac{4 abmx_1}{d} \tag{see above}$$

in order to arrive at the wave amplitude $2a$, as desired.

Figure 4 shows how the relation between JG and ST can be calculated. Firstly the curves IJK and EFH really lie in the same vertical plane. J, F, N, S and T are points all lying in the α -plane, just as the points S and F lie in another inclined plane β passing through WNV. Moreover, to a first order of approximation GF may be considered as being parallel to WNV, the departure from parallelism being small over the length GF in com-

parison to the length of JG'; G can therefore be considered as also lying in the β -plane.

Let the vertical plane through WNV intersect the horizontal lines JX and ST at points Z and Y respectively (see fig. 4).

Then:

$$\frac{ST}{JX} = \frac{YV}{WZ} = \frac{d-k}{b+k} \quad (\text{see fig. 5}) \quad (12)$$

there being no loss of generality if we suppose that the observer's eye is right up against the beam YST.

Referring to fig. 5, which represents a cross-section through the wave flume with a still water surface, we see that, to the same order of approximation as above:

$$\begin{aligned} \frac{JX}{JG} &= \frac{I}{\text{slope of } \beta\text{-plane}} \\ &= \frac{f}{b+k} \end{aligned} \quad (13)$$

Combining (12) and (13) we find that:

$$ST = JG \left\{ \frac{f(d-k)}{(b+k)^2} \right\} \quad (14)$$

D) FORMULA FOR WAVE AMPLITUDE

The practical formula giving the wave amplitude $2a$ in terms of the apparent width $ST = s$, say, of the oscillating image as "measured" on the cross-beam YST may be immediately deduced from equations (11) and (14).

The final formula is as follows:

$$2a = \frac{sd(b+k)^2}{2bfmx_1(d-k)} \quad (15)$$

APPARATUS

In order to test out the theory developed above, tests were conducted in the precision wave flume described in the second article of the present series (*La Houille Blanche*, n° 5, 1951, p. 764).

The α -plane was defined by two beams spanning the canal crosswise; on the higher beam were placed the targets used for fixing points S and T. On the lower beam was placed an electrical apparatus (resistance measuring point) to be described

* In this respect, fig. 4 is slightly misleading, as the β -plane should generally be chosen so as to slope at about 45° . Also if d/x_1 , i.e. the inclination of the α -plane, is small, the height $4abmx_1/d$ of the image will change but little from F to G, and GF will therefore be almost horizontal.

in a subsequent article of the series; this was used to check the results of the optical method.

The "wire" WNV was replaced in the tests by a line running along the bottom of the flume (in reality, one of the carefully laid angle beams used in constructing the flume bottom; the upper edges of these beams were still visible in the concrete). The use of an underwater reference line introduced a certain complication on account of refraction, as will be explained below.

The dimensions of the flume, etc., required in the calculations are as follows:

$$b = 61 \text{ cm}$$

$$d = 37.4 \text{ cm}$$

$$f = 140.4 \text{ cm}$$

$$h = 11.0 \text{ cm}$$

$$\frac{x_1}{d} = \frac{95.4}{22.25}$$

The latter ratio is found in the following way: the difference of level between the two joists already spoken of was equal to 22.25 cm; the distance separating them was equal to 95.4 cm.

In order to find k , we must take account of the refraction; k is *not* equal to $-h$, but to some small fraction of the latter. The complete calculation shows that $k = -2.5$ and is thus unexpectedly small.

The period of the waves tested out was measured in the usual way by stop-watch, and enabled m to be calculated from a knowledge of the wave velocity; the latter was calculated by the simple formula:

$$c = \frac{L}{T} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L}} \quad (16)$$

The wave-lengths used in the experiments varied from 19 to 74 cm, the corresponding wave periods ranging from 0.345 to 0.802 secs; as already indicated, the depth of water was maintained equal to 11 cm for all tests.

TEST RESULTS

For each test, the table p. 61 shows the (calculated) wave length L , the value of the factor:

$$\Phi = \frac{d(b+k)^2}{2bfmx_1(d-k)} \quad (17)$$

occurring in eqn. (15), the value of $s = ST$ (the distance between targets) and the value $s\Phi$ of the wave amplitude as found by the optical method; the final column then shows the wave amplitude as found by the resistance measuring point.

CONCLUSION

The agreement between the optical estimations of wave amplitude and the amplitudes as measured by the electrical method is generally speaking excellent; one large discrepancy (test n° 20) is certainly to be ascribed to the relatively large camber of the waves in question. The agreement is in fact so good that one can be confident in affirming the high precision not only of the optical method itself but also of the electrical measuring apparatus; both methods are capable of an accuracy of the order of a tenth of a millimeter when used to measure waves of very low amplitude. At the same time, the limits of the optical method are also clearly brought out; the wave camber should, it seems, be appreciably less than 1 in 100 for high accuracy to be obtained.

Acknowledgement: The author would like to

record his thanks to M. Danel, Directeur du Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique (Neyrpic) for having suggested the research investigation described in this article.

G. D. RANSFORD.

RÉFÉRENCES

- (1) H. GRIDEL. — De l'emploi des modèles réduits pour l'étude des effets de la houle sur les aménagements portuaires. *Thèse, Ingénieur-Docteur*, Paris, 1942 (Editions I.D.C., Paris).
- (2) R. MICHE. — Mouvements ondulatoires de la mer en profondeur constante ou décroissante. (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1944.)

