

NOTULE HYDRAULIQUE
HYDRAULIC BRIEFS

A propos de l'influence de la turbulence sur la chute des particules solides dans l'eau

Commentaire et Discussion de la notule de M. BOUVARD
publiée dans notre numéro 6—1951

On the influence of turbulence on the fall-velocity of solid particles in water

Etude des équations servant à décrire les suspensions. Hypothèses faites pour déduire les équations généralement admises des équations générales de l'hydraulique et de la mécanique. Etude de l'influence de l'approximation faite en négligeant l'effet combiné de l'inertie et de dissymétrie de la loi de traînée (effet indiqué par M. BOUVARD dans le n° 6/1951), Conclusions.

Study of the equations used to describe material in suspension. Hypotheses made to deduce universally accepted equations from general equations of hydraulics and mechanics. Study of influence of the approximation made, without taking the combined effect of inertia and the dissymetry of the drag law, into account (effect mentioned by Mr. Bouvard — N° 6/1951). Conclusions.

INTRODUCTION

M. BOUVARD a publié dans *la Houille Blanche* N° 6/1951 un article relatif à la chute des particules en eau turbulente; article fort intéressant, qui a le grand mérite de rappeler un fait trop souvent oublié dans certaines études relatives aux suspensions. On sait, en effet, que la plupart des auteurs classiques qui étudient les suspensions du point de vue statistique partent d'équations simplifiées comme si cela était tout à fait naturel⁽¹⁾. Les utilisateurs des résultats ainsi trouvés ne se rendent pas toujours compte des hypothèses faites implicitement au début de ces études théoriques.

Néanmoins, comme l'auteur l'écrit lui-même, les hypothèses qu'il fait au départ sont assez grossières et nous verrons qu'elles le conduisent à des résultats parfois erronés.

Nous nous proposons donc de reprendre la question dans son ensemble, de rappeler rapidement les hypothèses faites pour arriver aux équations classiques et de préciser comment l'étude de M. BOUVARD peut se classer dans l'ensemble des théories admises et vérifiées expérimentalement.

Bref rappel des différentes théories relatives aux suspensions

La marche exacte à suivre pour aboutir rationnellement aux différentes théories relatives aux suspensions sera décrite plus loin.

(1) Il faut mentionner spécialement M. TCHEN-CHAN-Mou qui étudie d'une façon beaucoup plus complète le problème des suspensions (dans son livre: *Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid*, Editeur: The Hague Martinus Nijhoff, 1947).

Faisons d'abord un bref rappel.

1. THÉORIES DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Elles établissent les équations des trajectoires des particules à partir de l'équation fondamentale de la mécanique rationnelle, appliquée aux particules, $\vec{F} = m \vec{\gamma}$ (égalité de systèmes de vecteurs); en rappelant que \vec{F} représente l'ensemble du système des forces extérieures appliquées à la particule.

Différentes théories ont été faites en négligeant plus ou moins les phénomènes considérés comme « secondaires » (on les verra plus loin).

2. THÉORIES DE MÉCANIQUE STATISTIQUE.

Elles établissent des équations valables pour un nuage de particules; elles n'étudient pas le comportement individuel de chaque particule, mais la concentration locale en particules.

En pratique, on obtient ces équations en faisant des moyennes sur les équations obtenues par les théories de mécanique rationnelle. Mais dans l'état actuel de nos connaissances, il faut, en général, simplifier à l'extrême les équations de départ pour pouvoir faire des moyennes effectivement chiffrables. En particulier, on admet toujours (jusqu'à présent) que $m \vec{\gamma}$ est négligeable devant les forces extérieures prépondérantes et on obtient $\vec{F} \equiv 0$. Cette équation peut être transformée sans nouvelles approximations en $\vec{V} - \vec{U} = \vec{W}_0$ (\vec{V} : vitesse de la particule, \vec{U} : vitesse de l'eau, \vec{W}_0 : vitesse de chute de la particule en eau calme). La particule a une vitesse de glissement \vec{W}_0 constante par rapport à l'eau. Cette simplification consiste donc à raisonner avec les vitesses au lieu de raisonner avec les forces.

Pour que ces théories soient valables, il faut, entre autres, que les accélérations (calculées avec les vitesses moyennes) soient relativement faibles.

Il est évident que, dans l'avenir, il n'est pas impossible que des théories statistiques moins simplifiées puissent être faites avec succès. Cela dépend de nos connaissances sur la turbulence. Nous ne nous occuperons ici que des théories de mécanique rationnelle, dans lesquelles s'intègre la remarque de M. BOUVARD et dont découlent, bien entendu, les autres théories.

Critique de l'hypothèse n° 2 de M. Bouvard

Rappelons les termes de M. BOUVARD : « Nous supposons que la vitesse de chute (en écoulement turbulent) est constante. C'est une hypothèse évidemment très contestable. Elle revient

à admettre que les fluctuations turbulentes de vitesse sont très rapides, suffisamment pour qu'elles n'aient pas le temps de changer notablement la vitesse du corps en suspension. »

M. BOUVARD raisonne bien avec les forces et non les vitesses; néanmoins, il ne part pas de $\vec{F} = m \vec{\gamma}$. Ses hypothèses sont bien difficiles à admettre : on ne peut pas prendre en considération les forces et négliger l'inertie, sauf si $\frac{m |\vec{\gamma}|}{|\vec{F}_1|} \neq 0$, \vec{F}_1 étant l'une des forces extérieures prépondérantes.

M. BOUVARD admet que la vitesse absolue \vec{V} de la particule est constante, donc $\vec{\gamma} = 0$. D'autre part, la résultante des forces extérieures, comprenant le poids et la traînée, varie. En effet, suivant M. BOUVARD, la traînée varie de $k(V + v)^2$ à $k(V - v)^2$ (2). L'équation $\vec{F} = m \vec{\gamma}$ conduit alors à $0 =$ quantité variable. Comme on l'a vu, l'approximation est exacte si $\frac{m |\vec{\gamma}|}{|\vec{F}_1|} \neq 0$; ceci se ré-

duit, dans notre cas, à $\frac{v}{V} \neq 0$. En effet, on verra que, si cette condition est respectée, la formule de M. BOUVARD $V = \sqrt{V_0^2 - v^2}$ est bien tangente à la formule plus exacte. Mais si $\frac{v}{V}$ croît, l'erreur devient de plus en plus grande, et si $\frac{v}{V} > 1$, c'est-à-dire $v > V$, l'hypothèse de l'auteur le conduit à évaluer à zéro la somme de deux forces dirigées dans le même sens : si $v > V$ et est dirigé vers le haut, la pesanteur et la traînée sont dirigées toutes les deux vers le bas. Le calcul tombe en défaut ainsi que la formule $V = \frac{V_0^2}{2v}$.

Equation du mouvement d'une particule

Nous commencerons par établir les équations du mouvement d'une particule; les différentes simplifications qui seront faites ultérieurement nous amèneront à passer en revue les diverses conclusions qu'on peut en tirer.

Si un corps se meut librement dans un fluide en mouvement, il faudrait, pour trouver la trajectoire du corps, intégrer l'ensemble des équations suivantes :

1) Equations indéfinies du fluide :

$$\frac{D \vec{U}}{D t} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{F}_e + \nu \Delta \vec{U}$$

(Equation de NAVIER. — Notations habituelles.)

(2) Notations de M. BOUVARD : v : vitesse d'agitation turbulente de la turbulence schématisée considérée par lui.

2) Conditions aux limites :

a) Limites fixes : conditions ordinaires.

b) Sur le corps envisagé.

En chaque point de sa surface :

$$\vec{U} = \vec{V}$$

\vec{V} = vitesse locale du corps.

3) $\vec{F} = m \vec{\gamma}$ pour le corps.

Inutile de dire que cet ensemble d'équations n'est pratiquement jamais intégrable. On admet alors que le corps « ne perturbe pas trop » l'écoulement qui existerait en son absence. Les termes « ne perturbe pas trop » montrent bien le flou qui règne dans cette hypothèse. Cette hypothèse exige d'abord que les particules ne changent pas l'état de turbulence du fluide. Etant donné que « l'état de turbulence d'un fluide » n'est pas encore susceptible d'une définition correcte, on ne peut pas, sur ce point, formuler de conditions (3). Néanmoins, si les particules sont petites devant les tourbillons (4), si la concentration en particules est petite (par exemple inférieure à 3 % en volume) et uniforme, et si le

nombre $\frac{|\vec{U} - \vec{V}| D}{v}$ (5) est petit, on peut légitimement admettre que l'état de turbulence ne se trouve pas trop affecté.

La concentration uniforme n'est jamais réalisée dans les cas pratiques. Il s'ensuit une influence de la concentration sur la turbulence : celle-ci se trouve « amoindrie » parfois même éteinte. (Voir à ce propos SCHLICHTING : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Band 15, 1935, Heft 6, p. 21. — TAYLOR : *Proc. Roy. Soc.*, London 1931. — RICHARDSON : *Proc. Roy. Soc.*, London, vol. 97, 1920, p. 354.) Mais le phénomène ne semble élucidé que dans le cas de la turbulence commençante (par SCHLICHTING).

La grandeur des tourbillons n'est, en général, pas mieux connue. Néanmoins, il semble que tout se passe bien si les particules vérifient $\frac{W_0 D}{v} < 2$ et si leur diamètre est environ 100 fois plus petit que la « dimension caractéristique » de l'écoulement (par exemple rayon hydraulique d'un canal). Les autres perturbations causées par une particule dans un écoulement sont :

(3) Exemple : Comme on sait, le début de la turbulence est un phénomène de valeur propre (comme le flambage) ; une variation très petite des données peut entraîner une très grande variation des effets. La présence des particules libres peut donc, a priori, avoir une influence quelconque non prévisible.

(4) En réalité, il existe probablement des tourbillons extrêmement petits.

(5) C'est le nombre de Reynolds de la particule dans l'écoulement considéré.

1) Ecoulement produit par la différence entre la vitesse de la particule et l'eau « qu'elle remplace ». Cet écoulement est analogue à celui produit par la particule se déplaçant en eau calme. Cet écoulement exerce sur la particule deux sortes de forces : des forces de traînée et des forces d'inertie (Cf. : pendule dans l'eau). Ces dernières accroissent la « masse apparente » de la particule (comme celle d'un pendule dans l'eau). Cet accroissement apparent de la masse est d'ailleurs difficile à chiffrer dans les cas pratiques.

2) La particule ne se déforme pas comme l'eau qu'elle remplace. Il s'ensuit un accroissement apparent de la viscosité. Cet effet a été étudié sur un cas simple, la première fois par M. Albert EINSTEIN dans sa thèse de doctorat (*Annalen der Physik*, vol. 19, 1906, p. 289). En pratique, on trouve, si la concentration est uniforme :

$$\mu = \mu_0 (1 + k_1 c + k_2 c^2 + \dots)$$

μ : viscosité apparente de la mixture,

μ_0 : viscosité du fluide pur,

c : concentration,

k_1, k_2 : coefficients dépendant de la forme des particules.

Les termes $k_2 c^2 + \dots$ sont, en général, négligeables si $c < 1\%$ ou 2% (6).

Après avoir choisi les différentes hypothèses convenables dans chaque cas particulier, on peut écrire :

$$\rho \frac{D \vec{U}}{dt} = - \overrightarrow{\text{grad}} p + \vec{F}_c + \mu \Delta \vec{U}$$

(Equation de NAVIER. — Notations habituelles.)

$$M \frac{d \vec{V}}{dt} = - \int_{\Sigma} p \overrightarrow{d\sigma} + \vec{R} + \vec{F}'_c v$$

M : masse (corrigée) de la particule,

\vec{R} : traînée,

Σ : surface de la particule,

\vec{F}'_c : forces extérieures par unité de volume,

v : volume de la particule.

On admet ensuite que :

$$\int_{\Sigma} p \overrightarrow{d\sigma} = \int_v \overrightarrow{\text{grad}} p dv \neq v \overrightarrow{\text{grad}} p$$

Ceci permet, après division par v , d'écrire :

$$\rho' \frac{d \vec{V}}{dt} = - \overrightarrow{\text{grad}} p + \frac{\vec{R}}{v} + \vec{F}_c$$

(6) Un très bon aperçu de cette question se trouve dans les *C.R. du Congrès de Mécanique Appliquée* de 1938 (Cambridge, Massachusetts), p. 448. Auteur : GURN.

ρ' : masse spécifique (corrigée) de la particule, d'où :

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} - \rho' \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_e - \vec{F}_e' - \frac{\vec{R}}{v} + \mu \Delta \vec{U}$$

Si les forces extérieures se réduisent à la pesanteur, on peut écrire, en négligeant $\mu \Delta \vec{U}$ devant $\frac{\vec{R}}{v}$ (ce qui est à peu près toujours admissible) :

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} - \rho' \frac{d\vec{V}}{dt} = (\rho - \rho'') \vec{g} - \frac{\vec{R}}{v} \quad (7)$$

ρ'' désignant la masse spécifique vraie de la particule.

Cette équation peut être intégrée graphiquement si on connaît \vec{R} en fonction de \vec{U} et \vec{V} .

Il existe beaucoup de publications à ce sujet (8).

En réalité, \vec{R} n'est à peu près jamais connu en fonction de \vec{U} et \vec{V} . On connaît uniquement l'expression en régime établi (quand la vitesse relative est constante) pour des formes géométriques simples et en écoulement parallèle à l'infini. Néanmoins, on peut admettre soit que \vec{R} est donné pour une formule du genre de celle mentionnée dans le livre de TCHEN-CHAN-MOU (1), soit, plus simplement, que :

$$\vec{R} = A |\vec{U} - \vec{V}|^k (\vec{U} - \vec{V}).$$

Dans cette dernière équation, $k \neq 0$ pour les nombres de Reynolds inférieurs à 0,5 (9), $k \neq 1$ pour $\mathcal{R} > 50$. Si $0,5 < \mathcal{R} < 50$, on peut admettre $0 < k < 1$.

Donc, si $\mathcal{R} > 0,5$, on est dans le domaine où la dissymétrie de la loi $\vec{R}(\vec{U} - \vec{V})$ joue. Il convient d'étudier de façon plus approfondie quelle est l'influence de cette dissymétrie en fonction du schéma admis pour la turbulence.

En particulier, on verra qu'il y a deux aspects fondamentaux de la turbulence. L'hypothèse de M. BOUVARD ne permet pas de discerner ces deux aspects fondamentaux.

Trajectoires de particules et schéma de turbulence

Nos équation de base sont maintenant :

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} - \rho' \frac{d\vec{V}}{dt} = (\rho - \rho'') \vec{g} - A (\vec{U} - \vec{V})^k (\vec{U} - \vec{V})$$

et :

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{V}$$

\vec{OM} est un vecteur reliant à chaque instant un point fixe O au centre M de la particule.

La difficulté d'intégration vient du fait que $\vec{U} = \vec{U}(x, y, z, t)$.

Des trois équations vectorielles de base ci-dessus, on peut déduire un ensemble de 9 équations fournissant la solution du problème; mais cet ensemble est, en général, inintégréable.

Schématisons $\vec{U}(x, y, z, t)$ de façon à voir, qualitativement, ce qui se passe.

Soit, d'abord, $\vec{U} = \vec{U}(x, t)$; il n'y a alors plus qu'une variable spatiale. Nous pourrions schématiser encore plus et considérer deux schémas fondamentaux :

$$(1) \quad \vec{U} = \vec{U}(x)$$

Le grain est soumis, sur une longueur de parcours donnée, à l'action d'un fluide ayant une certaine vitesse.

Négligeons $\rho \frac{d\vec{U}}{dt} - \rho' \frac{d\vec{V}}{dt}$: ces termes ne sont pas nécessaires pour le phénomène que nous envisageons. Alors on peut écrire :

$$\vec{U} - \vec{V} = C = \vec{W}_0$$

Si \vec{U} a une loi de variation donnée par la fi-

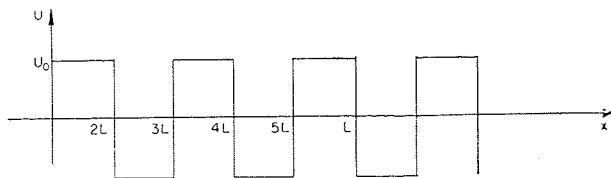


FIG. 1.

gure 1, on voit que le temps T_1 mis par la particule pour aller de O à L est $\frac{L}{U_0 + W_0}$, T_2

(7) Ceci est, aux notations près, l'équation de base de l'article de MM. BRUN et VASSEUR dans le *Journal de Recherches du C.N.R.S.*, Laboratoire de Bellevue..., années 1946-1947, n° 3, p. 109, équation 8. — Néanmoins, il convient de remarquer que M. BRUN admet $\rho' = \rho''$.

(8) A part la référence donnée dans (7), on peut consulter *Rapport technique*, n° 15, du C.R.A. : Introduction à l'étude de la mécanique des suspensions.

(9) Nombre de Reynolds pour les sphères de densité 2,65 (sable de silice).

pour aller de L à 2 L est $\frac{L}{W_0 - U_0}$ si $|W_0| > |U_0|$ (sinon il n'y a plus de chute).

La vitesse de chute moyenne est alors :

$$V_m = \frac{2L}{\frac{L}{W_0 + U_0} + \frac{L}{W_0 - U_0}} = \frac{W_0^2 - U_0^2}{W_0}$$

On voit que :

$$V_m < W_0$$

MÊME si la loi $\vec{R}(\vec{U} - \vec{V})$ est linéaire ⁽¹⁰⁾.

Les théories même très simplifiées tiennent donc correctement compte de ce phénomène.

$$(2) \quad \vec{U} - \vec{U}(t)$$

Le grain est soumis pendant *un temps* constant à l'action d'un fluide ayant une certaine vitesse.

Les équations deviennent alors :

$$\rho' \frac{dV}{dt} = A \varepsilon (U - V)^{k+1} - (\rho - \rho'') g$$

En régime établi, on obtient :

$$u_m = \frac{1}{2\theta} \text{Log} \left[\text{ch } 2\theta - 2w^2 \text{sh}^2 \theta + \text{sh } 2\theta \sqrt{(1-w^2)(1-w^2 \text{th}^2 \theta)} \right]$$

où :

$$w = \frac{U_0}{W_0}$$

$$u_m = \frac{V_m}{W_0} ; \quad \theta = \frac{t_0 m}{\sqrt{PA}}$$

Si $w = \frac{U_0}{W_0} \rightarrow 0$, on retrouve le résultat de M. BOUVARD.

La formule donnant u_m est d'ailleurs valable dans la région non hachurée de la figure 3.

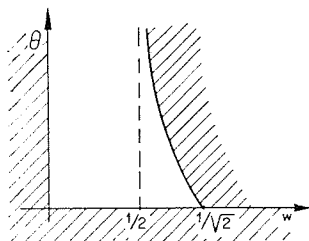


FIG. 3.

(10) M. DANIEL, Directeur du Laboratoire Dauhinois d'Hydraulique et de la Houille Blanche nous a fait remarquer que ceci n'est autre que le problème de l'avion allant de A à B et retour, avec et sans vent constant : les vitesses moyennes différent; on prend une moyenne d'inverses.

Dans le cas $k = 0$ (relation linéaire entre traînée et vitesse relative), $V_m = W_0$; cette turbulence schématique n'a pas d'effet.

Dans le cas $k = 1$: traînée quadratique, nous avons à intégrer l'équation :

$$m \frac{dV}{dt} = A \varepsilon (\vec{U} - \vec{V}_0)^2 - P$$

m : masse fictive ⁽¹¹⁾ de la particule.

k : coefficient de traînée.

P : poids de la particule.

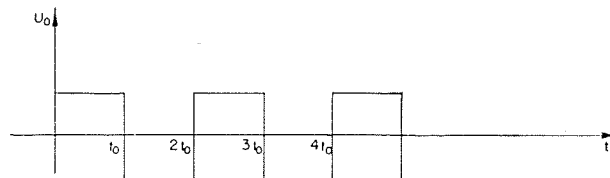


FIG. 2.

$(U_0) t$ est donné par la figure 2. Dans le cas $U_0 < W_0 = \sqrt{\frac{P}{A}}$, l'intégration est facile mais longue.

Dans toute cette région, $V_m < W_0$.

Nous voyons donc que c'est sur l'effet combiné de l'inertie et de la dissymétrie de la loi de traînée que M. BOUVARD attire notre attention. Cet effet est négligé chaque fois qu'on raisonne sur les vitesses comme dans les théories actuelles de mécanique statistique. Néanmoins, il faut observer que le schéma de turbulence adopté ici est le plus défavorable possible, à cause de discontinuités très grandes de la vitesse (cf. fig. 2).

On peut étudier des schémas plus compliqués, par exemple $\vec{U} = \vec{U}(x, y)$. On trouve, pour de tels schémas, que la concentration décroît sans cesse, à moins qu'il existe une vitesse moyenne ascendante.

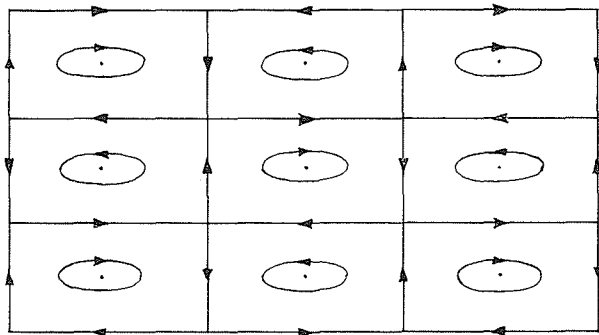
On trouve, par exemple, en négligeant les termes d'inertie, les divers schémas représentés par la figure 4.

On peut intégrer d'une manière générale les équations en négligeant l'inertie, si $\vec{U} = \vec{U}(x, y)$. Il suffit de poser :

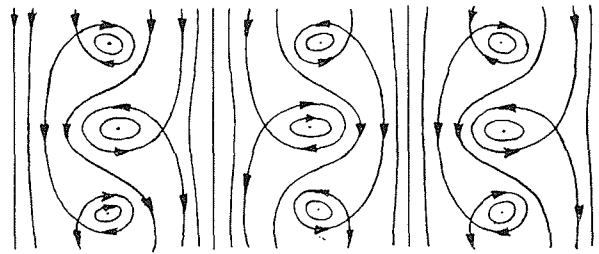
$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

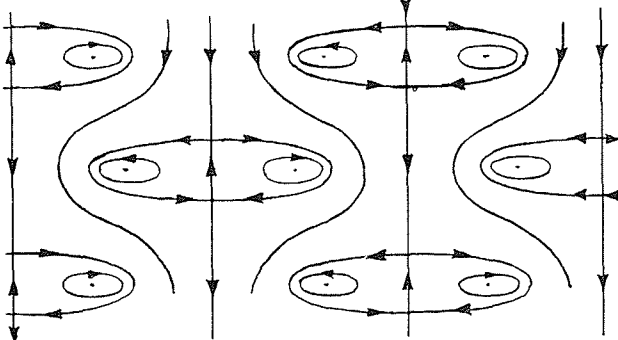
(11) Voir page 285.



Écoulement de l'eau pure : tourbillons cellulaires.



Trajectoire de particules relativement lourdes.



Trajectoire de particules relativement légères.

FIG. 4.

ce qui est toujours possible, si $\text{div } \vec{V} = 0$. On trouve comme équation des trajectoires :

$$\Psi(x, y) = W_0 x + A$$

A : constante d'intégration.

De même, on peut intégrer si l'écoulement est irrotationnel et à singularités ponctuelles de position variable dans le temps.

On trouve :

$$\Psi(x, y, t) = W_0 x + A$$

$$\Phi(x, y, t) = W_0 y + B$$

Φ : potentiel des vitesses.

Néanmoins, on ne peut guère aller plus loin.

CONCLUSION

Comme résultat de toutes ces études, on peut conclure que seule la turbulence, où

$\vec{U} = \vec{U}(x, y, z, t)$, est capable de maintenir indéfiniment un nuage de grains en suspension.

Malheureusement, les équations de mécanique statistique nécessaires pour évaluer la concentration en chaque point de l'écoulement ne peuvent (à l'heure actuelle) être explicitées que moyennant un grand nombre d'approximations (comme nous l'avons déjà mentionné plus haut). L'approximation signalée par M. BOUVARD concernant l'effet combiné de l'inertie et de la dissymétrie de la loi de traînée ne semble pas prépondérante dans la plupart des cas pratiques. L'ordre de grandeur de l'erreur commise en faisant telle ou telle approximation dépend évidemment du cas pratique envisagé. Les cas les plus courants sont les suivants :

- (1) Usure des turbines, pompes, etc., par les matériaux en suspension dans l'eau,
- (2) Transport de matériaux grossiers en conduite : galets, etc.,
- (3) Transport de matériaux fins en conduite et canaux.

Dans le cas (3) que l'auteur semble envisager d'une façon plus particulière, les équations très simplifiées de la mécanique statistique permettent d'expliquer avec beaucoup de précision ce qui se passe au sein des masses liquides ⁽¹²⁾. L'erreur la plus grande semble, ici, due au changement de l'état de turbulence que produisent les matériaux en suspension, du moins en régime stationnaire. Peut-être les autres approximations se détruisent-elles. Ceci n'aurait rien d'étonnant, d'ailleurs, surtout en ce qui concerne les termes d'inertie : ils ne doivent normalement réapparaître que dans les phénomènes transitoires très rapides.

Nous espérons d'ailleurs publier ultérieurement un article sur les suspensions selon la théorie classique de statistique d'après SCHMIDT et ROUSE.

R. MEYER,

Ingénieur

au Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique
(Neyrpic - Grenoble).

N. D. L. R. — D'accord avec M. MEYER, nous avons fait part à M. BOUVARD des termes de cette note provoquée par ses observations parues dans notre numéro 6-1951. M. BOUVARD nous signale qu'il a poursuivi lui-même ses recherches dans ce domaine et nous espérons qu'il nous tiendra au courant de leur développement.

(12) ROUSE : *Proc. Fifth Intern. Congress Appl. Mech.*, 1938.

DOBINS : *Proc. Am. Soc. Civil Engineers*, vol. 69, n° 2, p. 235, 1943.

VANONI : *Trans. Am. Geo. Union*, 1941, p. 608.