Étude de la mise en régime des écoulements sur les ouvrages à forte pente

Application au problème de l'entraînement d'air

Study of the setting up of the flow regime on high gradient structures

Application to air entrainment problem

PAR G. HALBRONN

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES

(voir la Houille Blanche, n° 1, 1952, p. 24).

Etude théorique de l'écoulement à surface libre d'un fluide sur un coursier long, compte tenu de l'effet de la viscosité; calcul des vitesses locales et des profondeurs en régime laminaire et turbulent; existence d'un point critique où la turbulence commence à faire sentir son action en surface et à partir duquel l'entraînement d'air devient possible. — Vérifications expérimentales. — Etude schématique du critère d'apparition de l'eau blanche en aval du point critique.

Theoretical study of free surface fluid flow over a long spillway, account being taken of viscosity.

Calculation of local velocities and depths in laminary and turbulent flow regimes. Existence of a critical point where turbulent action becomes noticeable on the surface and air entrainment becomes possible. Experimental verification. Schematic study of criterion of appearance of "white water" below critical point.

INDEX DES NOTATIONS (suite)

NOTATION	DÉFINITION
H_0	Charge sur le seuil.
d	$d = h_l - H_0$.
ΔH	Perte de charge.
p_d	Pression dynamique.
p_s	Pression statique.
u_m	Vitesse dans l'axe du tube de PITOT.
$\left(\frac{du}{dy}\right)_m$	Gradient de vitesse dans l'axe du tube de PITOT.
$2e$	Diamètre du tube de PITOT.
Q	Débit total.
α_c	Valeur de α au point critique.
a_L	$a_L = \left(5,5 + 5,75 \log \frac{u_*}{v}\right) u_*$, u_* en cm/s, v en cm ² /s.
b	$b = 5,75 u_*$, u_* en cm/s.
a_{T_1}	$a_{T_1} = (9,56 - 5,75 \log \varepsilon) u_*$, u_* en cm/s, ε en cm.
F	Nombre de FROUDE d'un écoulement $F = \frac{U}{\sqrt{gY}}$.
λ_E	Coefficient de frottement expérimental $\lambda_E = \frac{\tau_0}{\rho U^2}$.
a', b'	Coefficients de $u = a' + b' \log y$.
λ_N	Coefficient de frottement d'après NIKURADSE.
R_0	Nombre de REYNOLDS de l'écoulement $R_0 = \frac{UY}{v}$.
λ_P	Coefficient de frottement d'après POWELL.
λ_K	Coefficient de frottement d'après KEULEGAN.
Q'	Débit total calculé.
C_D	Coefficient de débit d'un déversoir CREAGER.
L_0	Largeur en crête du déservoir.
H_n	Charge nominale d'un déversoir CREAGER.
x_1, y_1	Coordonnées cartésiennes orthogonales.

DEUXIÈME PARTIE

VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES

CHAPITRE IV

EXPÉRIENCES DU LABORATOIRE DAUPHINOIS D'HYDRAULIQUE

I. — Description du modèle

Nous avons utilisé pour nos expériences un bassin de 2,75 m de largeur, 1,30 m de longueur et 1,65 m de profondeur, déversant par un seuil Creager de charge nominale 10 cm, troussé en ciment, prolongé par un coursier plan, en tôle,

incliné de $40^{\circ} 8'$ sur l'horizontale (fig. 4). Afin d'éviter la difficile détermination de la rugosité équivalente ϵ , la surface avait été rendue aussi lisse que possible par application de plusieurs couches de mastic, poncées avec soin et revêtues de peinture cellulosique.

Le bassin était alimenté par une pompe de 200 l/s emplissant une tour maintenue à ni-

FIG. 4.

veau constant par déversement. En réalité, la charge dans la tour et le diamètre des tuyauteries de raccordement permettaient de faire passer un débit limité à 100 l/s environ. Le débit pouvait être mesuré au moyen d'un Venturi placé au départ de la tour.

L'alimentation du bassin était assurée à sa partie inférieure à travers des plaques perforées supportant des lits de cailloux de grosseur décroissante, afin d'obtenir une tranquillisation aussi bonne que possible. Une vanne levante per-

FIG. 5.

mettait d'évacuer le débit à l'égout, sans modifier le réglage de l'alimentation (fig. 5).

Un tube manométrique communiquant avec le bassin permettait, en cours d'expérience, de vérifier l'invariance de la charge sur la crête et de la ramener à sa valeur primitive par action sur les vannes dans le cas où elle aurait légèrement varié.

Les deux bajoyers latéraux portaient des rails guidant un chariot en tubes métalliques, supportant lui-même les instruments de mesure par l'intermédiaire d'un profilé mobile (Planche I).

EXPÉRIENCES DU LABORATOIRE DAUPHINOIS
D'HYDRAULIQUE

Vue générale du modèle.

 $q = 186 \text{ cm}^2/\text{s}$ $q = 255 \text{ cm}^2/\text{s}$ $q = 350 \text{ cm}^2/\text{s}$ ASPECT DE L'ÉCOULEMENT
AU VOISINAGE DU POINT CRITIQUE.

II. — Technique des mesures

Nous nous proposons de relever pour chaque débit :

- a) Les profondeurs,
- b) Les profils de distribution des vitesses en dix points fixes numérotés de 1 à 10 (fig. 4) et alignés suivant une ligne de plus grande pente du déversoir,
- c) La position du point critique,
- d) La valeur du débit.

a) MESURE DES PROFONDEURS :

Les premières mesures furent exécutées à l'aide d'une pointe portée par le profilé mobile, dont le mouvement était commandé et repéré au niveau du chariot. Les vibrations et la flexion de

l'ensemble empêchaient d'atteindre une précision satisfaisante.

L'écoulement étant quasi-parallèle dans la zone intéressante, nous avons songé ensuite à disposer des prises de pression sur le fond, qui auraient enregistré une surpression égale à $Y \cos i$. Cette quantité étant très faible ici, de l'ordre du centimètre, et la vitesse étant très forte, il a été impossible, malgré toutes les précautions expérimentales, de réaliser des prises rigoureusement statiques. La moindre fraction de la pression dynamique $\frac{u_2}{2g}$ influençant le manomètre était très importante devant la quantité $Y \cos i$, et nous avons dû abandonner ce procédé de mesure.

Finalement, revenant à la première méthode, nous avons renforcé le profilé mobile et monté l'équipage de la pointe à sa partie inférieure. Il comporte essentiellement (fig. 6) une vis micro-

FIG. 6.

métrique A au pas de 1 mm, supportant la pointe de mesure B et entraînée par un bouton gradué C dont la périphérie est divisée en cent parties égales; un miroir D permet la lecture commodé des graduations. Les vis E et F assurent la fixation de l'équipage sur le profilé mobile.

La pointe se déplaçait tout d'abord verticalement et mesurait ainsi $\frac{Y}{\cos i}$. L'expérience nous a montré que le contact avec la surface liquide s'appréciait mieux lorsque la pointe se déplaçait normalement au fond; ce résultat fut obtenu grâce à une légère modification du support.

La forme de la pointe elle-même influe sur l'appréciation du contact. La meilleure précision a été obtenue à l'aide d'une pointe présentant une arête normale au courant. Au contact, il se détache deux aigrettes très visibles aux extrémités de l'arête. Des expériences répétées ont montré que la dispersion des mesures avoisinait un dixième de millimètre.

En chaque point, la détermination de la profondeur nécessitait la lecture des cotes correspondant à la surface et au fond. Pour obtenir cette dernière, on dérivait le débit à l'égout au moyen de la vanne du bassin d'alimentation; la

méthode la plus précise que nous avons trouvée pour apprécier le contact entre le fond et la pointe consistait à interposer une feuille de papier à cigarette qui était libre de glisser tant que le contact n'était pas établi. La lecture, faite dans le sens de la descente de la pointe, correspondait au début du pincement de la feuille.

Afin d'éviter toute flexion de la tôle sous le poids de l'eau, un étau fut établi sous la génératrice de mesure.

Enfin, il est bon de remarquer que, par ce procédé, lorsque la surface est fluctuante, la différence des cotes obtenues mesure le maximum de la profondeur atteinte.

b) MESURE DES VITESSES :

La vitesse a été mesurée à l'aide d'une prise dynamique constituée par un tube de maillechort coudé, de diamètre extérieur de 1,35 mm et

FIG. 7.

de diamètre intérieur de 1 mm. Nous avons renoncé à utiliser une prise statique à cause des difficultés déjà signalées à propos de la mesure des profondeurs; la répartition des pressions étant quasi-hydrostatique, elle est connue avec une précision très suffisante une fois Y connu.

La prise dynamique était reliée par un tube de caoutchouc entoilé à un tube manométrique en verre (fig. 7) où le niveau libre était repéré au moyen d'une vis micrométrique au pas de 1 mm. La purge était effectuée sous pression à l'aide d'une petite pompe à moteur électrique reliée à la base du tube manométrique par l'intermédiaire d'un robinet trois voies; le tube de liaison était purgé en enlevant le bouchon fileté G (fig. 6), celui-ci étant remplacé pour ter-

miner la purge de la prise dynamique et pour effectuer la mesure.

Pour chaque débit, la cote de la ligne de charge était déterminée par immersion de la prise dynamique dans le bassin d'alimentation, le plus loin possible de la crête. La cote corres-

FIG. 8.

pondant au niveau du seuil s'observait en coupant le débit de telle sorte que le niveau affleure la crête, et en immergeant la prise (fonctionnant comme prise statique) dans le bassin d'alimentation.

Soit H_0 la charge sur le seuil. Les mesures sont effectuées sur une normale au fond élevée en un point où la charge est $d + H_0$. Suivant les notations de la première partie, la charge est h à la surface libre. Soit ΔH la perte de charge mesurée au point considéré à la distance y du fond :

$$p_d + p_s = \rho g [h + (Y - y) \cos i - \Delta H]$$

p_d désignant la pression dynamique et p_s la pression statique.

$$p_s = \rho g (Y - y) \cos i$$

$$p_d = \rho \frac{u^2}{2}$$

D'où :

$$u = \sqrt{2g[h - \Delta H]} = \sqrt{2g[d + H_0 - Y \cos i - \Delta H]} \quad (39)$$

Les cotes d correspondant aux divers points de mesure repérés sur le coursier sont déterminées une fois pour toutes à la lunette.

FIG. 9.

La vitesse ainsi mesurée est affectée à un point situé sur l'axe du tube de mesure. Ceci risque d'introduire une erreur lorsque le gradient de vitesse est élevé.

On peut faire un calcul schématisé pour éva-

luer l'ordre de grandeur de l'erreur et voir si ce point mérite une étude plus approfondie. Supposons le tube de mesure à deux dimensions et imaginons qu'il mesure une pression dynamique p_d égale à la moyenne de $\frac{\rho u^2}{2}$ pour tous les filets liquides qui aboutissent devant son ouverture :

$$p_d = \frac{1}{2e} \int_{-e}^e \rho \frac{u^2}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2e} \int_{-e}^e \frac{\rho}{2} \left[u_m + x \left(\frac{du}{dy} \right)_m \right]^2 dx$$

u_m et $\left(\frac{du}{dy} \right)_m$ désignant la vitesse et son gradient sur l'axe, $2e$ le diamètre du tube. D'où :

$$p_d = \frac{\rho}{2} u_m^2 \left[1 + \frac{1}{3} \frac{e^2}{u_m^2} \left(\frac{du}{dy} \right)_m^2 \right]$$

Adoptons les valeurs de l'ordre de celles qui sont réalisées sur le coursier dans la zone où $\left(\frac{du}{dy} \right)_m$ est maximum :

$$u_m = 300 \text{ cm/s}$$

$$\left(\frac{du}{dy} \right)_m = 400 \text{ 1/s}$$

L'erreur relative est alors de l'ordre de $1/300^2$; elle est négligeable devant les autres erreurs. Il n'y a donc pas lieu de faire de corrections.

c) POSITION DU POINT CRITIQUE :

Nous avons constaté, au début de nos expériences, que la couche limite demeurait laminaire sur le coursier lisse; elle devenait turbulente au passage des petites irrégularités inévitables, dessinant ainsi le sillage de ces obstacles. Comme la couche limite turbulente nous intéresse seule dans la nature, nous avons créé artificiellement la transition en disposant un fil d'acier de 2/10 au contact du fond, parallèlement à la crête et à 2 cm en aval. On constate alors que le phénomène devient bien régulier.

Pour déterminer la position du point critique, nous avons pris des photographies du coursier au $1/50.000^{\circ}$ de seconde, à l'aide d'un appareil Eclatron. Elles mettent fort bien en évidence l'existence d'une transition entre la surface lisse de l'eau en amont et la surface fortement rugueuse en aval (planche I). Cependant, nous avons déjà signalé que les phénomènes que nous étudions ici sont de caractère fluctuant et que la théorie présentée n'envisage que la valeur moyenne des différentes grandeurs entrant en jeu; ainsi, la position du point critique n'est pas fixe sur une ligne de plus grande pente du

coursier, mais oscille autour d'une position moyenne; de même, à un instant donné, les points critiques ne s'alignent pas sur une horizontale, mais dessinent une ligne très découpée. Il est donc difficile de déterminer expérimentalement, pour un ouvrage large, la position rigoureuse du point critique; l'accord avec la théorie ne saurait être qu'approximatif.

d) MESURE DU DÉBIT :

A l'expérience, il s'est révélé que le Venturi dont nous disposions était alimenté dans des conditions défectueuses; de ce fait, les mesures de débit étaient trop imprécises pour le but que nous nous proposons. Nous avons alors calculé le débit linéaire correspondant aux diverses charges H_0 utilisées au moyen de la formule :

$$q = \int_0^Y u dy \quad (40)$$

L'invariance de q ainsi calculé, le long d'une génératrice de mesure, fournit un excellent contrôle de la précision atteinte.

III. — Résultats expérimentaux

Les profondeurs et les vitesses ont été déterminées sur des normales élevées au fond aux points numérotés de 1 à 10, dont la situation topographique est indiquée à la figure 4.

Les expériences ont été conduites pour trois valeurs du débit; les tableaux suivants fournissent les résultats complets d'essai, u étant calculé au moyen de la formule (39).

TABLEAU II

DÉBIT N° 1 $H_0 = 4,20 \text{ cm}$		DÉBIT N° 2 $H_0 = 5,44 \text{ cm}$		DÉBIT N° 3 $H_0 = 6,62 \text{ cm}$	
Point	Y cm	Point	Y cm	Point	Y cm
1	0,990	1	1,290	1	1,755
2	0,853	2	1,110	2	1,500
3	0,763	3	1,005	3	1,350
4	0,715	4	0,930	4	1,240
5	0,682	5	0,877	5	1,155
6	0,645	6	0,840	6	1,100
7	0,630	7	0,795	7	1,055
8	0,620	8	0,795	8	1,020
9	0,608	9	0,780	9	1,000
10	0,599	10	0,770	10	0,975

TABLEAU III

POINT 1

DÉBIT N° 1			DÉBIT N° 2		DÉBIT N° 3	
y mm	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s
0,675	4,70	169,1	5,11	172,5	7,40	164,0
1,175	4,65	169,4	3,68	180,4	4,97	177,9
1,675	2,70	180,3	2,36	188,3	3,36	186,9
2,175	1,88	184,7	0,89	195,0	1,52	196,1
2,675	1,15	188,5	0,50	196,9	0,82	199,5
3,675	0,55	191,6	0,28	198,0	0,48	201,2
4,675	0,26	193,1	0,19	198,5	0,32	202,0
5,675	0,16	193,6	0,12	198,8	0,19	202,6
6,675	0,05	194,2	0,06	199,1	—	—
8,675	—	—	0,04	199,2	0,10	203,0
9,675	—	—	0,03	199,3	—	—
10,675	—	—	0,02	199,3	0,08	203,1
11,675	—	—	0,02	199,3	—	—

TABLEAU VI

POINT 4

DÉBIT N° 1			DÉBIT N° 2		DÉBIT N° 3	
y mm	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s
0,675	19,41	223,0	18,91	229,7	20,32	227,8
1,175	17,22	232,5	15,49	243,9	15,91	246,1
1,675	14,04	245,5	12,54	255,5	14,11	253,1
2,175	12,55	251,4	—	—	—	—
2,675	10,10	260,7	7,97	272,5	9,62	270,0
3,675	6,58	273,7	4,80	283,6	6,07	282,6
4,675	4,00	282,8	2,68	290,9	3,63	290,9
5,175	3,30	285,2	—	—	—	—
5,675	2,45	288,1	1,60	294,5	1,99	296,4
6,175	1,85	290,1	—	—	—	—
6,675	—	—	0,86	297,0	1,16	299,1
7,175	—	—	0,64	297,7	—	—
7,675	—	—	0,54	298,0	0,72	300,6
8,675	—	—	—	—	0,35	301,8

TABLEAU IV

POINT 2

DÉBIT N° 1			DÉBIT N° 2		DÉBIT N° 3	
y mm	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s
0,675	9,77	187,9	9,36	195,1	12,10	185,7
1,175	7,96	197,1	7,07	206,3	9,92	196,8
1,675	6,48	204,4	5,18	215,1	7,44	208,8
2,675	3,24	219,4	2,97	226,7	3,92	224,8
3,675	1,55	226,8	1,10	233,0	1,76	233,9
4,675	0,70	230,4	0,59	235,1	0,82	237,9
5,675	0,58	231,0	0,40	235,9	0,37	239,7
6,675	0,43	231,6	0,33	236,2	0,15	240,6
7,175	0,13	232,9	—	—	—	—
7,675	—	—	0,24	236,5	0	241,3
8,675	—	—	0,18	236,8	0	241,3

TABLEAU VII

POINT 5

DÉBIT N° 1			DÉBIT N° 2		DÉBIT N° 3	
y mm	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s
0,675	26,20	230,7	25,08	239,7	24,68	245,2
1,175	21,55	249,7	21,70	253,2	21,72	256,7
1,675	17,64	264,6	17,99	267,1	18,49	268,8
2,675	12,23	284,0	12,40	286,9	14,90	288,5
3,675	8,50	296,6	8,38	300,3	8,80	302,1
4,675	5,49	306,4	5,50	309,6	5,72	311,9
5,675	3,70	312,0	3,17	316,9	3,36	319,3
6,675	—	—	1,90	320,8	2,12	323,1
7,175	—	—	1,69	321,5	—	—
7,675	—	—	1,49	322,1	1,32	325,5
8,675	—	—	—	—	0,82	327,0

TABLEAU V

POINT 3

DÉBIT N° 1			DÉBIT N° 2		DÉBIT N° 3	
y mm	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s
0,675	14,31	202,7	14,49	210,5	15,65	209,6
1,175	11,77	218,4	11,20	225,3	12,75	222,7
1,675	9,72	227,4	9,24	233,7	9,92	234,9
2,175	7,41	237,2	—	—	—	—
2,675	5,77	243,9	5,50	248,9	5,81	251,5
3,675	2,98	254,9	2,79	259,4	3,19	261,5
4,675	1,59	260,1	1,46	264,3	1,58	267,4
5,675	0,84	263,0	0,76	266,9	0,73	270,6
6,175	0,82	263,0	—	—	—	—
6,675	—	—	0,42	268,3	0,27	272,2
7,675	—	—	0,29	268,7	0,12	272,7
8,675	—	—	0,24	268,8	0	273,2
9,675	—	—	—	—	0	273,2

TABLEAU VIII

POINT 6

DÉBIT N° 1			DÉBIT N° 2		DÉBIT N° 3	
y mm	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s
0,675	32,90	238,8	32,99	242,7	31,68	251,8
1,175	27,72	259,2	28,66	259,6	27,58	267,3
1,675	23,02	276,4	23,84	277,2	24,54	278,2
2,675	17,05	296,9	18,28	296,2	17,87	300,8
3,675	12,40	311,9	12,88	313,6	12,77	317,0
4,675	9,16	321,9	8,72	326,4	9,07	328,3
5,675	7,06	328,2	5,55	335,8	5,82	337,8
6,675	—	—	3,35	342,1	3,82	343,6
7,175	—	—	2,89	343,4	—	—
7,675	—	—	—	—	2,32	347,8
8,675	—	—	—	—	1,47	350,2

TABLEAU IX

POINT 7

DÉBIT N° 1			DÉBIT N° 2		DÉBIT N° 3	
y mm	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s
0,675	36,80	256,8	37,47	258,3	36,62	265,3
1,175	32,65	272,2	32,88	275,1	31,94	282,0
1,675	28,11	288,1	28,28	291,1	28,59	293,4
2,675	21,83	308,8	21,77	312,3	21,61	315,9
3,675	16,98	323,8	16,56	328,2	16,12	333,3
4,675	13,59	333,9	12,13	341,2	11,84	344,9
5,175	12,3	337,7	—	—	—	—
5,675	—	—	8,62	351,1	8,07	355,5
6,675	—	—	6,14	358,0	5,49	362,5
7,175	—	—	5,84	358,8	—	—
7,675	—	—	—	—	3,52	367,8
8,175	—	—	—	—	2,82	369,7

TABLEAU X

POINT 8

DÉBIT N° 1			DÉBIT N° 2		DÉBIT N° 3	
y mm	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s
0,675	42,85	266,4	40,90	277,3	41,17	279,9
1,175	38,22	283,0	36,58	292,2	36,82	294,7
1,675	33,66	298,4	32,24	306,4	32,02	310,3
2,675	27,06	319,3	25,37	327,7	24,67	332,7
3,675	22,1	334,2	19,74	344,1	19,15	348,6
4,675	18,64	344,2	15,16	356,9	14,42	361,7
5,175	17,1	348,6	—	—	—	—
5,675	—	—	11,64	366,5	10,41	372,4
6,675	—	—	10,86	368,5	7,27	380,6
7,675	—	—	—	—	5,22	385,8

TABLEAU XI

POINT 9

DÉBIT N° 1			DÉBIT N° 2		DÉBIT N° 3	
y mm	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s
0,675	51,24	266,1	49,19	277,3	49,37	280,3
1,175	45,09	287,9	44,94	292,0	43,53	300,0
1,675	40,51	303,1	40,36	307,0	39,14	314,1
2,675	33,71	324,3	32,70	330,6	31,50	337,1
3,675	28,40	340,0	26,27	359,1	25,25	354,8
4,675	24,39	341,4	21,15	363,2	19,92	369,3
5,175	23,05	355,1	—	—	—	—
5,675	—	—	16,84	374,7	15,62	380,5
6,175	—	—	15,39	378,5	—	—
6,675	—	—	14,44	380,9	12,08	389,5
7,675	—	—	—	—	9,14	396,9

TABLEAU XII

POINT 10

DÉBIT N° 1			DÉBIT N° 2		DÉBIT N° 3	
y mm	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s	ΔH cm	u cm/s
0,675	57,1	275,1	56,93	279,5	51,15	302,4
1,175	53,06	289,1	53,29	292,0	46,32	317,7
1,675	48,42	304,4	48,44	307,9	41,82	331,3
2,675	41,10	327,2	38,66	337,6	34,02	353,6
3,675	35,63	343,2	31,59	357,5	27,99	370,0
4,675	30,80	356,7	25,71	373,3	22,87	383,3
5,675	—	—	21,18	385,1	18,30	394,8
6,175	—	—	19,74	388,7	—	—
6,675	—	—	19,34	389,7	14,64	403,8

Le calcul des débits, au moyen de la formule (40), donne alors les résultats consignés au tableau XIII.

TABLEAU XIII

Point	DÉBIT N° 1 q cm ² /s	DÉBIT N° 2 q cm ² /s	DÉBIT N° 3 q cm ² /s
1	183,6	250,3	346,7
2	186,2	252,5	345,9
3	185,6	254,0	349,8
4	186,1	257,5	350,4
5	189,9	257,0	349,6
6	186,8	256,5	351,0
7	190,3	260,6	353,4
8	193,0	265,8	357,3
9	192,4	264,0	356,0
10	191,6	265,3	360,0

Il ressort de l'examen de ce tableau que, dans tous les cas, le débit calculé tend à augmenter vers l'aval. Ce fait sera expliqué plus loin. En se limitant aux points 1 à 5, les écarts ne sont pas trop importants, surtout si l'on remarque que ce sont les filets supérieurs qui fournissent la contribution la plus importante au débit; or, une erreur, $\Delta Y = \pm 0,01$ cm, lorsque $u = 300$ cm/s, donne $\Delta q = 3$ cm²/s, ce qui est justement la valeur de la dispersion constatée. On peut adopter comme valeurs moyennes :

Débit n° 1... $q = 186$ cm²/s $Q = 51,1$ l/s

Débit n° 2... $q = 255$ cm²/s $Q = 70,0$ l/s

Débit n° 3... $q = 350$ cm²/s $Q = 96,2$ l/s

IV. — Résultats théoriques

L'application des formules établies dans la première partie permet de confronter les résultats théoriques et les résultats expérimentaux. Nous allons indiquer en détail la marche des différents calculs, qu'il n'y aurait aucune difficulté à rétablir ensuite en entier. Nous supposons le coursier parfaitement lisse, ce que l'expérience confirme.

a) EN AMONT DU POINT CRITIQUE :

Plaçons-nous par exemple au point 1 pour le débit $q = 255 \text{ cm}^2/\text{s}$. La théorie suppose que ΔH est nul dans le noyau :

$$u_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(d + H_0 - Y \cos i)} \quad (41)$$

Il est donc nécessaire de connaître Y pour évaluer u_1 . $Y \cos i$ étant petit devant $d + H_0$, une première approximation de u_1 est :

$$u_1 = \sqrt{2g(d + H_0)} \\ = \sqrt{2 \times 980 \times (15,83 + 5,44)} = 204,3 \text{ cm/s}$$

D'autre part :

$$q = u_1 \left(Y - \frac{\delta}{z} \right)$$

Mais $\frac{\delta}{z}$ est petit devant Y ; donc :

$$Y \# \frac{u_1}{q} = 1,25 \text{ cm} \quad Y \cos i = 0,96$$

D'où la valeur rectifiée de u_1 :

$$u_1 = \sqrt{2 \times 980 \times (21,27 - 0,96)} = 199,6 \text{ cm/s}$$

z est alors donné par la formule (18). Avec : $v = 0,01 \text{ cm/s}^2$, $g = 980 \text{ cm/s}^2$, $\sin i = 0,643$:

$$z = 8,05$$

D'après (16) :

$$\delta = \frac{2}{5} \frac{k^2}{\sin i} \frac{h}{z - 2,8 + 4,32 z^{-1}} = 0,348 \text{ cm}$$

Et :

$$Y = \frac{q}{u_1} + \frac{\delta}{z} = 1,32 \text{ cm}$$

$$u_* = \frac{ku_1}{z} = 9,9 \text{ cm/s}$$

La distribution des vitesses est alors donnée par :

$$\frac{u}{u_*} = 5,5 + 5,75 \log y \frac{u_*}{v}$$

$$u \text{ cm/s} = 224,6 + 56,8 \log y^{\text{cm}}$$

b) POSITION DU POINT CRITIQUE :

D'après (26) : $z = 9,37$

D'après (14) : $u_1 = 337 \text{ cm/s}$

D'après (23) : $Y_c = 0,848 \text{ cm}$

D'après (41) : $d = 53,13 \text{ cm}$

Le point critique est situé 5,45 cm en aval du point 5.

c) CONDITIONS NORMALES :

D'après le système (38) où $z = 9,37$:

$$u_{*u} = 19,80 \text{ cm/s}$$

$$Y_n = 0,62 \text{ cm}$$

D'où la valeur z_c de z au point critique :

$$z_c = \frac{Y_c}{Y_n} - 1 = 0,367$$

L'origine des x étant prise au point critique :

$$K = F(z_c) = 0,444$$

$$\frac{gY_n^2 \sin i}{q^2(1 + z^{-2})} = 0,003732$$

d) EN AVANT DU POINT CRITIQUE :

Considérons par exemple le point 6; appliquons la formule (37) :

$$x = 13,1 - 5,45 = 7,65 \text{ cm}$$

$$x \frac{gY_n^2 \sin i}{q^2(1 + z^{-2})} = 0,029$$

$$F(z) = 0,444 + 0,029 = 0,473$$

$$z = 0,326$$

$$Y = Y_n(1 + z) = 0,822 \text{ cm}$$

D'où :

$$u_1 = \frac{q}{Y} \frac{z}{z - 1} = 347,8 \text{ cm/s}$$

$$u_* = \frac{ku_1}{z} = 14,94 \text{ cm/s}$$

Et :

$$\frac{u}{u_*} = 5,5 + 5,75 \log y \frac{u_*}{v}$$

Soit :

$$u = a_L + b \log y = 354,9 + 85,9 \log y$$

Avec :

$$\begin{cases} a_L = \left(5,5 + 5,75 \log \frac{u_*}{v} \right) u_* \\ b = 5,75 u_* \end{cases}$$

u et u_* étant exprimés en cm/s, v en cm²/s et y en cm.

L'ensemble du dépouillement est résumé dans les tableaux XIV, XV et XVI. Les figures 10, 11 et 12 représentent les profondeurs Y mesurées et calculées en fonction de l'abscisse curviligne le long du coursier. Les figures 13, 14 et 15 représentent pour chaque débit et aux différents points de mesure, la vitesse u mesurée et calculée en fonction du logarithme de la distance au fond, $\log y$ cm.

TABLEAU XIV $q = 186 \text{ cm}^2/\text{s}$

Point	u_1 cm/s	z	δ cm	z	Y cm	u_* cm/s	a_L	b
1	194,5	8,01	0,346		1,00	9,71	220,1	55,8
2	233,5	8,44	0,464		0,846	11,07	254,6	63,7
3	266,0	8,75	0,574		0,764	12,17	282,7	70,0
4	296,4	9,00	0,685		0,705	13,17	308,7	75,7
5	316,4	9,03		0,286	0,661	14,02	330,7	80,6
6	331,6	9,03		0,227	0,631	14,69	348,4	84,5
7	344,5	9,03		0,181	0,607	15,26	363,5	87,8
8	355,1	9,03		0,146	0,589	15,73	375,7	90,5
9	364,6	9,03		0,116	0,574	16,15	386,8	92,9
10	371,6	9,03		0,095	0,563	16,46	395,1	94,7

POINT CRITIQUE

u_1 cm/s	z	Y_c cm	d cm	Position
299,6	9,03	0,698	42,12	1,56 cm en aval de 4

CONDITIONS NORMALES

u_* cm/s	z	Y_n cm	z_c	K	$\frac{gY_n^2 \sin i}{q^2(1+z^2)}$
18,03	9,03	0,514	0,358	0,450	0,00477

TABLEAU XV $q = 255 \text{ cm}^2/\text{s}$

Point	u_1 cm/s	z	δ cm	z	Y cm	u_* cm/s	a_L	b
1	199,4	8,05	0,348		1,320	9,90	224,6	56,8
2	237,7	8,48	0,478		1,120	11,21	258,3	64,5
3	270,0	8,78	0,588		1,010	12,30	286,1	70,7
4	299,9	9,03	0,699		0,928	13,29	311,7	76,4
5	326,7	9,24	0,805		0,867	14,15	334,2	81,4
6	347,8	9,37		0,325	0,822	14,94	354,9	85,9
7	363,0	9,37		0,269	0,787	15,60	372,2	89,7
8	376,7	9,37		0,223	0,758	16,18	387,6	93,1
9	388,1	9,37		0,187	0,736	16,68	400,6	95,9
10	398,2	9,37		0,157	0,717	17,11	412,1	98,4

POINT CRITIQUE

u_1 cm/s	z	Y_c cm	d cm	Position
337,0	9,37	0,848	53,13	5,45 cm en aval de 5

CONDITIONS NORMALES

u_* cm/s	z	Y_n cm	z_c	K	$\frac{gY_n^2 \sin i}{q^2(1+z^2)}$
19,80	9,37	0,620	0,367	0,444	0,00373

TABLEAU XVI $q = 350 \text{ cm}^2/\text{s}$

Point	u_1 cm/s	z	δ cm	z	Y cm	u_* cm/s	a_L	b
1	203,7	8,12	0,373		1,77	10,03	228,4	57,7
2	241,5	8,52	0,490		1,51	11,34	261,5	65,2
3	273,4	8,81	0,600		1,35	12,41	289,1	71,4
4	303,1	9,06	0,710		1,23	13,39	314,3	77,0
5	329,6	9,26	0,816		1,15	14,24	336,6	81,9
6	354,5	9,43	0,920		1,09	15,03	357,4	86,5
7	377,2	9,58	1,02		1,03	15,75	376,1	90,6
8	393,8	9,59		0,325	0,992	16,42	393,9	94,4
9	407,7	9,59		0,280	0,958	17,00	409,2	97,8
10	420,2	9,59		0,242	0,930	17,52	423,2	100,0

POINT CRITIQUE

u_1 cm/s	z	Y_c cm	d cm	Position
379,2	9,59	1,02	67,45	1,2 cm en aval de 7

CONDITIONS NORMALES

u_* cm/s	z	Y_n cm	z_c	K	$\frac{gY_n^2 \sin i}{q^2(1+z^2)}$
21,76	9,59	0,749	0,376	0,439	0,00286

FIG. 10.

FIG. 11.

FIG. 12.

FIG. 13.

$$q = 186 \text{ cm}^2/\text{s}$$

FIG. 14.

$$q = 255 \text{ cm}^2/\text{s}$$

FIG. 15.

$$q = 350 \text{ cm}^2/\text{s}$$

V. — Conclusions

I. — L'accord entre les profondeurs mesurées et calculées est bon jusqu'aux environs du point critique. Ensuite la profondeur calculée devient trop faible et l'écart croît vers l'aval. Ceci s'expli-

que aisément à l'aide des hypothèses précédentes : l'eau blanche n'apparaît pas ici, cependant les photographies instantanées de la planche I montrent qu'en aval du point critique les gouttelettes superficielles s'élèvent au-dessus du niveau libre moyen, sans s'échapper de la masse. Nous

avons dit que les mesures à la pointe enregistrent le niveau des crêtes, donc un Y supérieur au Y moyen calculé. (Nous tenterons, dans la troisième partie, d'évaluer l'écart qui les sépare.) Cette explication rend compte de l'augmentation signalée de l'intégrale (40) à partir du point critique lorsqu'on adopte pour Y la valeur mesurée; le débit dans les couches supérieures est transitoire et sa valeur moyenne réelle est inférieure à celle que l'on calcule en le supposant permanent.

On observera que l'écart commence à être sensible un peu en amont de la position moyenne calculée du point critique; on peut interpréter ce fait en remarquant que la position instantanée du point critique fluctue autour de sa position moyenne et que, toujours pour la même raison, la pointe enregistre la position située la plus à l'amont.

2. — De même l'accord entre les profils de vitesses mesurés et calculés est bon en amont du point critique. Par contre, en aval de ce point, les vitesses mesurées sont systématiquement inférieures aux vitesses calculées, l'écart étant maximum au fond et pratiquement nul à la sur-

face libre. On pourrait penser qu'au voisinage du point critique, on passe du régime L au régime T₁; cela entraînerait en ce point :

$$\frac{u_* \varepsilon}{\nu} = 5,08$$

u_* ayant une valeur de 15 cm/s environ au point critique, ε serait voisin de 0,0033 cm.

D'autre part, en régime T₁, la distribution des vitesses serait de la forme :

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{k} \left(\text{Log } D + \text{Log } \frac{y}{\varepsilon} \right)$$

Soit :

$$u = a_{T_1} + b \log y$$

Avec :

$$\begin{cases} a_{T_1} = (9,56 - 5,75 \log \varepsilon) u_* \\ b = 5,75 u_* \end{cases}$$

u et u_* étant exprimées en cm/s, ε et y en cm.

En traçant des droites à travers les points expérimentaux sur les figures 13 à 15, on mesure a_{T_1} et b , d'où l'on tire u_* et ε :

TABLEAU XVII

Point	$q = 186 \text{ cm}^2/\text{s}$				$q = 255 \text{ cm}^2/\text{s}$				$q = 350 \text{ cm}^2/\text{s}$			
	a_{T_1}	b	$u_* \text{ cm/s}$	$10^3 \varepsilon \text{ cm}$	a_{T_1}	b	$u_* \text{ cm/s}$	$10^3 \varepsilon \text{ cm}$	a_{T_1}	b	$u_* \text{ cm/s}$	$10^3 \varepsilon \text{ cm}$
5	334,7	40,7	15,8	9,4	—	—	—	—	—	—	—	—
6	351,1	97,1	16,9	11,2	358,1	102,1	17,7	14,0	360,0	100,0	17,4	11,5
7	366,0	100,0	17,4	10,2	375,1	107,1	18,6	14,0	378,0	103,0	17,95	10,0
8	377,5	100,0	17,4	7,7	387,4	101,4	17,7	7,3	403,7	115,7	20	14,5
9	384,8	104,3	18,2	9,6	403,0	123,0	21,4	24,0	408,6	118,6	20,6	15,8
10	391,0	110,0	19,1	12,6	413,0	128,0	22,2	26,3	424,0	120,0	20,9	13,2

Les résultats sont un peu dispersés car les points expérimentaux ne s'alignent pas rigoureusement; cependant, on voit que ε serait de l'ordre de 0,01 cm, ce qui ne cadre pas avec la valeur trouvée plus haut.

Il ne s'agit donc pas d'un changement de régime analogue à ceux que l'on rencontre en conduite. L'explication doit, à notre avis, être recherchée dans l'influence de la surface libre sur la mécanique de l'écoulement turbulent. Un tel effet a déjà été signalé par R. POWELL [19] dans des écoulements pour lesquels le nombre de FROUDE $\frac{U}{\sqrt{gY}}$ est supérieur à 2. Cet auteur a

constaté alors une brusque diminution du coefficient C de CHÉZY, c'est-à-dire une augmentation de la perte de charge unitaire. Or, on sait que

$F > 2$ est le critère de stabilité des rides accidentelles de la surface libre, sous l'influence de la gravité et du frottement turbulent.

Comme dans le cas présent, il semble donc que le mécanisme de l'écoulement turbulent en canal soit le même qu'en conduite lorsque la surface libre est stable; au contraire, lorsqu'elle est instable, la distribution des vitesses est différente dans les deux cas, et la perte de charge unitaire est augmentée.

Pour préciser davantage, on peut calculer dans nos expériences le coefficient de frottement λ_E défini par :

$$\tau_0 = \rho \lambda_E U^2 \quad \lambda_E = \left(\frac{u_*}{U} \right)^2 = \frac{g}{C^2}$$

Utilisons pour cela la formule (6), en remarquant que la vitesse u vérifie une loi logarithmique de la forme :

$$u = a' + b' \text{Log } y$$

$$u_1 = a' + b' \text{Log } Y$$

$$u_1 - u = b' \text{Log } \frac{Y}{y}$$

$$u_1 - U = b'$$

$$\int_0^Y (u_1 - u) dy = b' Y = u_1 Y - q$$

$$\int_0^Y u (u_1 - u) dy = b' Y (a' + b' \text{Log } Y) - 2 b'^2 Y$$

$$= 3 q u_1 - u_1^2 Y - \frac{2 q^2}{Y}$$

Reportant dans (6) :

$$u_*^2 = g Y \sin i + 2 (q - u_1 Y) \frac{du_1}{dx}$$

$$+ \left(2 \frac{q^2}{Y^2} - u_1^2 \right) \frac{dY}{dx}$$

Cette valeur peut être comparée à la valeur λ_N calculée d'après la formule de NIKURADSE :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_N}} = 3 + 5,75 \log R_0 \sqrt{\lambda_N}$$

où :

$$R_0 = \frac{UY}{\nu}$$

D'autre part, POWELL a déduit de ses expériences une formule qui, mise sous forme sans dimension, donne λ_P en fonction de F et de R_0 :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_P}} = -38,75 + 5,28 F + 10,56 \log R_0 \sqrt{\lambda_P}$$

Et KEULEGAN propose une formule indépendante de F :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_K}} = -8,85 + 7,06 \log R_0 \sqrt{\lambda_K}$$

Le tableau XVIII résume les différentes valeurs obtenues pour λ . On constate en particulier que

les formules de POWELL ou de KEULEGAN, établies pour F voisin de 3, donnent de très mauvais résultats dans le cas présent où F est voisin de 10.

TABLEAU XVIII

$$q = 186 \text{ cm}^2/\text{s} \quad R_0 = 1,86 \cdot 10^4$$

Point	u_* cm/s	U cm/s	$10^3 \lambda_E$	$10^3 \lambda_N$	F	$10^3 \lambda_P$	$10^3 \lambda_K$
5	15,2	276	3,03	2,49	10,7	0,495	5,6
6	16,2	286	3,22	—	11,6	0,415	—
7	16,9	295	3,28	—	11,8	0,395	—
8	17,4	300	3,36	—	12,2	0,370	—
9	17,7	305	3,36	—	12,5	0,350	—
10	18,3	310	3,50	—	12,8	0,330	—

$$q = 255 \text{ cm}^2/\text{s} \quad R_0 = 2,55 \cdot 10^4$$

Point	u_* cm/s	U cm/s	$10^3 \lambda_E$	$10^3 \lambda_N$	F	$10^3 \lambda_P$	$10^3 \lambda_K$
6	16,3	304	2,88	2,325	10,55	0,48	5,04
7	18	314	3,3	—	11,10	0,425	—
8	18,4	321	3,3	—	11,45	0,4	—
9	18,7	328	3,26	—	11,9	0,37	—
10	19,3	332	3,37	—	12,1	0,355	—

$$q = 350 \text{ cm}^2/\text{s} \quad R_0 = 3,5 \cdot 10^4$$

Point	u_* cm/s	U cm/s	$10^3 \lambda_E$	$10^3 \lambda_N$	F	$10^3 \lambda_P$	$10^3 \lambda_K$
7	16,7	331	2,55	2,160	10,30	0,595	4,50
8	18,7	343	2,97	—	10,85	0,53	—
9	19,5	351	3,08	—	11,3	0,485	—
10	20,3	359	3,20	—	11,6	0,455	—

CHAPITRE V

EXPÉRIENCES DU LABORATOIRE NATIONAL D'HYDRAULIQUE

Ces expériences ont été effectuées sur le modèle au $1/60^\circ$ du déversoir de Bort-les-Orgues, dont les dimensions sont représentées figure 16. Les parois du modèle étaient rendues artificiellement rugueuses par collage de grains de sable de 2 mm de diamètre environ. Une série d'excellentes photographies au $1/25.000^\circ$, prises au moyen

de l'Eclatron, permettent de fixer les limites inférieures et supérieures entre lesquelles est situé le point critique, toute détermination plus précise par ce moyen se heurtant aux difficultés signalées plus haut.

Les expériences détaillées relatées au chapitre précédent ayant montré dans un cas simple

FIG. 16.

DÉVERSOIR DE BORT-LES-ORGUES.

Modèle au $1/60^\circ$.

la validité de la méthode exposée dans la première partie, il est intéressant de l'appliquer au cas présent, plus compliqué, qui comporte :

- des parois rugueuses,
- un déversoir de tracé non rectiligne et de largeur variable.

Par contre, la vérification ne porte que sur la position du point critique, qui est assez mal déterminée.

Nous connaissons, pour chaque expérience, les valeurs du débit global Q et de la charge sur le seuil H_0 . La mesure des faibles débits étant peu précise ($\frac{\Delta Q}{Q} \approx 15\%$), il est intéressant de calculer une valeur théorique Q' du débit par la formule :

$$Q' = C_D L_0 H_0 \sqrt{2gH_0}$$

L_0 étant la largeur en crête et C_D le coefficient de débit d'un réservoir CREAGER de charge nominale H_n : c'est une fonction de $\frac{H_0}{H_n}$ représentée figure 17, d'après l'ouvrage de DAVIS [20].

Le tableau XIX donne les valeurs de Q , Q' , H_0 et les valeurs extrêmes de d au point critique, telles qu'on peut les déduire d'un examen attentif des photographies de la planche II.

TABLEAU XIX

H_0 cm. . . .	3,16	4,72	6,01	7,55	10,04
Q l/s.	2,8	5,9	8,9	12,9	20,7
Q' l/s.	3,36	6,25	9,2	13,3	21
d cm $> \dots$	19	35	50	62,5	80
d cm $< \dots$	26,5	40	52	68,5	85

Par contre, nous ignorons la rugosité équivalente du modèle. Force nous est donc de partir d'une des expériences où la position du point critique est mesurée pour déduire de la théorie supposée exacte la valeur de ϵ . Il peut paraître qu'il y ait un cercle vicieux à agir ainsi; il faut cependant remarquer :

- qu'on a une idée a priori de l'ordre de grandeur plausible de ϵ ;
- que la concordance théorique et expérimentale des points critiques pour une valeur du débit ne suffirait pas à assurer leur concordance aux autres débits si le mode de calcul était erroné.

Les calculs sont très simplifiés si nous adoptons, pour cette détermination, une expérience où le point critique est situé sur la partie rectiligne du coursier. D'autre part, plus le débit est important, plus $\frac{\Delta Q}{Q}$ est faible. Nous partirons donc de l'expérience où $Q = 8,9$ l/s pour laquelle d'ailleurs l'imprécision de la lecture photographique paraît la plus réduite. Nous adopterons $d = 51$ cm.

Coefficient de débit
d'un seuil Creager en fonction
de $\frac{H_0}{H_n}$

FIG. 17.

Une première approximation de u_1 est donnée par :

$$u_1 = \sqrt{2g(d + H_0)} = 334,4 \text{ cm/s}$$

Rapportons les points du coursier à des axes situés dans le plan de symétrie et tels que Ox_1 soit la tangente au sommet du déversoir et Oy_1 le parement amont du barrage, orienté vers le bas. Etant donné la conicité des bajoyers, le dé-

EXPÉRIENCES DU LABORATOIRE NATIONAL
D'HYDRAULIQUE

$Q = 2,8 \text{ l/s}$

$Q = 5,9 \text{ l/s}$

$Q = 8,9 \text{ l/s}$

$Q = 12,9 \text{ l/s}$

$Q = 20,7 \text{ l/s}$

MODÈLE AU 1/60^e
DU DÉVERSOIR
DE BORT-LES-ORGUES.

bit q par unité de largeur en un point à l'abscisse x_1 cm est :

$$q = \frac{Q}{L_0} \frac{605}{605 - x_1} \quad (42)$$

Ici :

$$q = \frac{8.900}{33,33} \frac{605}{605 - 55,5} = 294 \text{ cm}^2/\text{s}$$

D'où une valeur approchée de la profondeur Y_c au point critique :

$$Y_c \# \frac{q}{u_1} = 0,88 \text{ cm}$$

et la valeur plus exacte de u_1 :

$$u_1 = \sqrt{2g(d + H_0 - Y \cos i)} = 333,1 \text{ cm/s}$$

lorsque $\cos i = \frac{7,9}{15} = 0,527$.

De (17) et (24), on tire :

$$R = \frac{u_1^3}{2g} = \frac{5 \sin i}{2k^2} \frac{q}{v} \frac{z^2 + a_1 z + a_2}{z - 1} \quad (43)$$

Supposons à priori que nous sommes en régime R. Avec les valeurs prises alors par a_1 et a_2 , on déduit de l'équation précédente :

$$z = 6,087$$

$$u_* = k \frac{u_1}{z} = 21,9 \text{ cm/s}$$

On déduit alors de (25) :

$$\varepsilon = 0,071 \text{ cm}$$

$$\text{et : } R_* = \frac{u_* \varepsilon}{v} = 156,5.$$

On est bien en régime R.

Remarquons que nous avons utilisé les formules établies pour un déversoir de largeur constante. Comme il n'en est pas ainsi dans l'exemple que nous traitons ici, il existe des vitesses normales aux bajoyers de l'ouvrage; mais la conicité étant faible ($2^\circ 10'$), la quantité de mouvement due à ces vitesses est négligeable devant celle qui est apportée par les vitesses longitudinales; la loi de distribution logarithmique des vitesses reste également à peu près applicable. Les formules donnant le développement de la couche limite demeurent donc inchangées. Seule la valeur de q intervenant dans le calcul de Y , donc dans la détermination de la position du point critique, doit être prise égale à sa valeur locale donnée par (42).

$Q = 5,9 \text{ l/s}$. — On prend comme première approximation du débit :

$$q = \frac{Q}{L_0} = 177 \text{ cm}^2/\text{s}$$

et on applique la méthode du chapitre IV, paragraphe IV-b, appliquée au régime R. D'après (25) :

$$z = 5,78$$

et d'après (14) :

$$u_1 = 276 \text{ cm/s}$$

D'après (41) :

$$d + H_0 - Y \cos i = 38,81 \text{ cm}$$

et en prenant comme valeur approchée :

$$Y = \frac{q}{u_1} = 0,642 \text{ cm}$$

$$d = 34,43 \text{ cm}$$

En ce point, $x_1 = 45 \text{ cm}$. On prend donc comme seconde approximation du débit, d'après (42) :

$$q = 191,5 \text{ cm}^2/\text{s}$$

On en déduit comme ci-dessus :

$$z = 5,828$$

$$u_1 = 284,2 \text{ cm/s}$$

$$d = 38,80 \text{ cm}$$

et il n'est pas nécessaire de faire une nouvelle approximation. On vérifie que :

$$u_* = \frac{ku_1}{z} = 19,5 \text{ cm/s}$$

$$R_* = 138,5$$

On est bien en régime R.

$Q = 12,9 \text{ l/s}$. — On commence par examiner le développement de la couche limite à la fin du coursier rectiligne. En ce point :

$$x_1 = \frac{35}{60} = 58,33 \text{ cm}$$

$$q = 428,1 \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$d = \frac{530,5 - 497,4}{60} = 55,17 \text{ cm}$$

D'où :

$$u_1 \# \sqrt{2g(d + H_0)} = 350,8 \text{ cm/s}$$

D'après (14), en régime R :

$$z = 6,168$$

$$u_* = \frac{ku_1}{z} = 22,8 \text{ cm/s}$$

$$R_* = 161$$

On est bien en régime R. Alors :

$$\delta = \frac{\varepsilon e^z}{D} = 1,143 \text{ cm}$$

$$Y = \frac{q}{u_1} + \frac{\delta}{z} = 1,405 \text{ cm}$$

La couche limite n'a pas encore atteint la sur-

face en ce point.

L'évolution ultérieure de la couche limite est régie par l'équation (13) qui s'écrit ici :

$$\frac{dz}{du_1} = \frac{z}{u_1} \frac{\frac{k^2 D}{\varepsilon g \sin i} u_1^2 - e^z (3z - 4)}{e^z (z^2 - 3z + 4)} = f(u_1, z) \quad (44)$$

Il est facile d'obtenir l'équation du profil parabolique; les longueurs étant exprimées en centimètres :

$$x_1 - 58,33 = \frac{-0,010243 (y_1 - 55,17) + 1,614 - \sqrt{-0,05099 (y_1 - 55,17) + 2,6046}}{0,008964} \quad (45)$$

D'où :

$$\operatorname{tg} i = - \frac{0,008964 (x_1 - 58,33) + 0,010243 (y_1 - 55,17) + 1,614}{0,010243 (x_1 - 58,33) + 0,011705 (y_1 - 55,17) + 1} \quad (46)$$

y_1 étant lié à u_1 par :

$$u_1 = \sqrt{2g(H_0 + y_1)} \quad (47)$$

l'équation (44) définit l'évolution de z en fonction de u_1 par l'intermédiaire de (45), (46) et (47). Cette équation a été intégrée pas à pas au moyen de la formule de RUNGE :

$$\Delta z = f \left[u_1 + \frac{1}{2} \Delta u_1, z + \frac{1}{2} f(u_1, z) \Delta u_1 \right] \Delta u_1$$

FIG. 18.

La figure (18) donne les valeurs successives de z , δ et Y en fonction de u_1 . On constate que $\delta = Y$ pour :

$$u_1 = 382,1 \text{ cm/s}$$

D'où :

$$d + H_0 \neq \frac{u_1^2}{2g} = 74,4 \text{ cm}$$

$$d = 66,9 \text{ cm}$$

$Q = 20,7 \text{ l/s}$. — La marche à suivre est exactement la même que ci-dessus. A la fin du coursier rectiligne :

$$q = 687,2 \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$u_1 = 357,7 \text{ cm/s}$$

$$z = 6,199$$

$$u_* = 23,2 \text{ cm/s}$$

$$R_* = 164$$

$$\delta = 1,18 \text{ cm}$$

$$Y = 2,11 \text{ cm}$$

L'évolution ultérieure de la couche limite est régie par l'équation (44) où i vérifie les équations (45), (46) et (47).

On en déduit l'évolution de z , δ et Y en fonction de u , représentée figure 19. Le point critique vérifie :

$$u_1 = 439,5 \text{ cm/s}$$

$$d = 88,4 \text{ cm}$$

$Q' = 3,36 \text{ l/s}$. — L'écart entre les valeurs théoriques et expérimentales du débit étant important et la mesure étant considérée comme imprécise par les opérateurs, nous adoptons de préférence ici la valeur théorique Q' .

Ce cas va nous donner l'occasion d'appliquer la théorie au voisinage de la crête, puisque nous savons que le point critique se situe en amont du profil rectiligne.

On commence donc par tracer l'écoulement à

FIG. 19.

potentiel sur le déversoir CREAGER. La ligne d'eau est inconnue, mais nous savons que :

- 1) La ligne d'eau se confond avec la ligne de charge à l'infini amont.
- 2) La profondeur sur la crête est voisine de la profondeur critique :

$$Y = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

- 3) Assez à l'aval, les courbures étant faibles, une première approximation de u_1 est :

$$u_1 = \sqrt{2g(d + H_0)}$$

d'où :

$$Y \neq \frac{q}{u_1}$$

et une meilleure approximation :

$$u_1 = \sqrt{2g(d + H_0 - Y \cos i)}$$

Grâce à ces remarques, on trace la figure 20 sans trop de tâtonnements et l'on en déduit la variation de u_1 avec l'abscisse curviligne x mesurée à partir de 0, raccordement du déversoir et du parement amont du barrage (fig. 21). Ce

tracé se justifie par le fait que la largeur du déversoir varie peu dans la zone où on l'utilise.

Etant donné la forte convergence de l'écoulement en amont, on peut admettre que la cou-

FIG. 20.

SCHEMA DE L'ECOLEMENT A POTENTIEL SUR LE SEUIL.

$$Q = 3,36 \text{ l/s}$$

che limite commence à se développer en 0 où $u_{1i} = 20 \text{ cm/s}$. La rugosité étant importante, on peut même supposer qu'elle est turbulente dès ce point.

FIG. 21. — $u_1(x)$

Alors, d'après les formules de la première partie, paragraphe V, on a en 0, suivant les valeurs du régime réalisé :

RÉGIME T_1 :

$$z_0 = 3,84$$

$$u_* = 2,08 \text{ cm/s}$$

$$R_* = 14,75$$

RÉGIME T_2 :

$$z_0 = 3,837$$

$$u_* = 2,09 \text{ cm/s}$$

$$R_* = 14,80$$

RÉGIME R :

$$z_0 = 3,39$$

$$u_* = 2,36 \text{ cm/s}$$

$$R_* = 16,75$$

C'est donc le régime T_2 qui s'établit.

L'évolution ultérieure de la couche limite est régie par l'équation (12) qui s'écrit :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{u_1} \frac{Az^n u_1^{1-n} - e^z \frac{du_1}{dx} [(3+n)z - 2(2+n)]}{e^z [z^2 - (3+n)z + 2(2+n)]}$$

L'intégration pas à pas par la formule de RUNGE s'effectue avec les valeurs de D et de n du ré-

FIG. 22.

gime T_2 tant que $R_* < 70,8$, puis avec celles du régime R. Les valeurs de z , u_* , Y et δ ainsi obtenues sont portées figure 22 en fonction de u_1 . En particulier, lorsque $\delta = Y$,

$$u_1 = 223,5 \text{ cm/s}$$

$$d = 22,6 \text{ cm}$$

L'ensemble des résultats théoriques est consigné dans le tableau XX.

TABEAU XX

Q l/s....	3,36	5,9	8,9	12,9	20,7
z.....	5,470	5,828	6,087	6,332	6,708
u_1 cm/s...	223,5	284,2	333,1	382,1	439,5
d cm.....	22,6	38,8	51	66,9	88,4
Y_c cm....	0,59	0,82	1,06	1,36	1,98
u_* cm/s...	16,35	19,5	21,9	24,2	26,2

Notons que, des valeurs de u_* on déduit immédiatement l'effort de renversement exercé par l'eau sur le coursier.

CHAPITRE VI

EXPÉRIENCES SUR LE MODÈLE DE L'OUVRAGE DU BARRAGE NORRIS

Nous allons enfin appliquer la théorie aux résultats expérimentaux publiés par M. HICKOX [21]. Il compare des observations concernant l'entraînement d'air faites sur les passes déversantes du barrage de Norris et sur un modèle de laboratoire du même ouvrage en similitude de FROUDE au $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{72}$. L'hypothèse de l'auteur sur le mécanisme de l'entraînement d'air est identique à celle que nous développerons dans la troisième partie.

I. — Expériences sur modèle

L'emplacement du point critique est déterminé sur des photographies ordinaires prises avec éclairage rasant. L'auteur fournit pour chaque expérience, outre la valeur q du débit, celle Y_c de la profondeur d'eau au point critique. Les résultats publiés sont reportés à l'ouvrage en vraie grandeur; il suffit, pour obtenir les chiffres relatifs au modèle, de diviser les longueurs par μ et les débits unitaires par $\mu^{3/2}$.

D'autre part, M. HICKOX repère les points sur le déversoir à l'aide des distances x comptées à partir de la crête; pour obtenir les charges h correspondantes, on a utilisé le dessin du profil tel qu'on peut par exemple le trouver dans *A Technical Review of the Norris Project*, établi par la T.V.A. (fig. 23) et les résultats d'expérience donnant la charge H_0 sur la crête tels qu'ils résultent d'un autre article de M. HICKOX [22].

Après un déversoir galbé, le coursier est constitué par une paroi plane de pente $i = 55^\circ$. La charge sur la crête en fonction du débit unitaire est donnée, pour le modèle, q étant exprimé en cm^2/s et H_0 en cm, par :

$$q = 15,62 H_0^{1,616}$$

Nous comparerons d'ailleurs cette charge H_0 à la valeur $\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$ obtenue en supposant que l'écoulement est critique au sommet du déversoir, et nous verrons que l'on aurait pu adopter cette approximation sans erreur appréciable si l'on n'avait pas disposé des résultats expérimentaux rappelés plus haut.

Le tableau ci-après résume l'ensemble des mesures faites :

FIG. 23.

TABLEAU XXI

N°	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$q \text{ cm}^2/\text{s} \dots\dots$	66	76,5	107	133	153	202	265	305
$x \text{ cm} \dots\dots\dots$	41,7	46,7	56,6	61,9	67,6	78,6	87	85
$Y \text{ cm} \dots\dots\dots$	0,37	0,4	0,53	0,58	0,61	0,76	0,86	0,94
$h \text{ cm} \dots\dots\dots$	29,9	34,7	43,3	48,3	53,1	62,9	70,6	77,8
$H_0 \text{ cm} \dots\dots\dots$	2,4	2,7	3,3	3,8	4,1	4,9	5,6	6,9
$3/2 \sqrt[3]{q^2/g} \dots\dots$	2,55	2,7	3,45	3,9	4,35	5,1	6	6,9

Ici encore, nous ne possédons aucune donnée sur la valeur de la rugosité équivalente ε du modèle, et nous devons utiliser une des expériences ci-dessus pour la calculer. La justification de ce procédé, développée au chapitre précédent, reste valable; il y a plus : lorsque q et ε sont donnés, la théorie permet de calculer z , h et Y_c au point critique. Nous disposons donc de trois relations indépendantes liant ces cinq quantités. Réciproquement, ici q , h et Y_c sont connus et nous voulons en déduire ε (ainsi que z). Une des données est donc surabondante. Il suffit d'en considérer deux pour calculer ε et z . La troisième équation permettra de vérifier si la valeur calculée de la donnée négligée coïncide avec sa valeur mesurée.

Le choix de l'expérience dont on part est guidé par les considérations exposées au chapitre précédent. On prendra par exemple $q = 133 \text{ cm}^2/\text{s}$. Connaissant les difficultés expérimentales d'une mesure correcte de Y_c , il paraît plus rationnel de se donner les valeurs de q et h mesurées pour calculer ε . Le contrôle portera donc sur la valeur de Y_c . On a :

$$u_1 = \sqrt{2gh} = 308,8 \text{ cm/s}$$

D'où, suivant la nature du régime réalisé au point critique :

a) RÉGIME R :

$$\text{De (43) } \dots z = 10,051$$

$$\text{De (25) } \dots \varepsilon = 0,000614 \text{ cm}$$

$$\text{D'où } \dots u_* = 12,25 \text{ cm/s}$$

$$R_* = 0,755 \text{ impossible}$$

b) RÉGIME T_2 :

$$\text{De (43) } \dots z = 9,968$$

$$\text{De (25) } \dots \varepsilon = 0,00179 \text{ cm}$$

$$\text{D'où } \dots u_* = 12,4 \text{ cm/s}$$

$$R_* = 2,22 \text{ impossible.}$$

c) RÉGIME T_1 :

$$\text{De (43) } \dots z = 10,051$$

$$\text{De (25) } \dots \varepsilon = 0,000953 \text{ cm}$$

$$\text{D'où } \dots u_* = 12,25 \text{ cm/s}$$

$$R_* = 0,117 \text{ impossible}$$

d) RÉGIME L :

ε n'intervient plus dans les équations déterminant le point critique. La seule donnée de q permet donc le calcul de u_1 et Y_c .

$$\text{De (25) } \dots z = 8,732$$

$$\text{De (14) } \dots u_1 = 289,4 \text{ cm/s}$$

$$\text{De (22) } \dots Y_c = 0,52 \text{ cm}$$

$$\text{De (41) } \dots h = 43,0 \text{ cm}$$

L'accord avec les données expérimentales étant assez satisfaisant, il semble bien que l'on se trouve dans le domaine du régime lisse. Le processus de calcul précédent répété pour les différentes valeurs de q fournit alors les valeurs réunies au tableau XXII.

TABLEAU XXII

$q \text{ cm}^2/\text{s} \dots\dots\dots$	66	76,5	107	133	153	202	255	305
$z \dots\dots\dots$	8,115	8,244	8,540	8,732	8,856	9,103	9,311	9,471
$u_1 \text{ cm/s} \dots\dots\dots$	222,8	235,4	266,9	289,4	304,8	338	368,5	393,7
$h \text{ cm} \dots\dots\dots$	25,5	28,5	36,6	43,0	47,7	58,6	69,7	79,5
$Y_c \text{ cm} \dots\dots\dots$	0,34	0,37	0,45	0,52	0,57	0,67	0,78	0,87
$u_* \text{ cm/s} \dots\dots\dots$	11,0	11,45	12,5	13,25	13,75	14,85	15,85	16,65

L'accord est assez bon dans l'ensemble. Les valeurs de Y_c calculées sont trop faibles; nous avons rencontré le même fait et l'avons expliqué dans nos expériences. Il en est de même pour la valeur calculée de h ; ceci peut être dû à la difficulté déjà signalée des mesures sur photogra-

phies. L'influence des parois latérales sur un modèle peu large peut également être sensible : les vitesses étant plus faibles dans leur voisinage, le débit dans l'axe des passes est plus fort que le débit linéaire moyen, ce qui entraîne un déplacement du point critique vers l'aval.

II. — Expériences sur l'ouvrage en vraie grandeur

Les expériences de M. HICKOX sont fort intéressantes, car il a pu observer le point d'apparition de l'eau blanche dans la nature, sur les passes-déversoirs du barrage Norris. Sa position a été mesurée sur des photographies pour quatre valeurs du débit dont trois correspondent à des débits réalisés sur le modèle. Désignant par des lettres accentuées les grandeurs relatives au prototype, les résultats traduits en hauteur de chute sont les suivants :

TABLEAU XXIII

N°	O'	I'	III'	IV'
q' cm ² /s....	12.000	40.000	65.000	81.000
h' cm.....	905	2.500	3.620	3.990
H'_0 cm.....	83	173	238	274
$\mu \cdot h$	—	2.150	3.120	3.480

Supposons que l'eau blanche apparaisse au point critique; la méthode précédente permet de rechercher ϵ' . Pour cela, partons de l'expérience IV'; Y'_c n'étant pas mesuré, nous disposons juste du nombre de données suffisantes; on a :

$$u'_1 = \sqrt{2 g h'} = 2.800 \text{ cm/s}$$

RÉGIME R :

$$\begin{aligned} \text{De (43).... } z' &= 12,099 \\ \text{De (25).... } \epsilon' &= 0,00521 \text{ cm} \\ \text{D'où..... } u'_* &= 92,5 \text{ cm/s} \\ R'_* &= 49,3 \text{ impossible} \end{aligned}$$

RÉGIME T₂ :

$$\begin{aligned} \text{De (43).... } z' &= 12,012 \\ \text{De (25).... } \epsilon' &= 0,00609 \text{ cm} \\ \text{D'où..... } u'_* &= 93,5 \text{ cm/s} \\ R'_* &= 56,9 \text{ possible.} \end{aligned}$$

RÉGIME T₁ :

$$\begin{aligned} \text{De (43).... } z' &= 12,099 \\ \text{De (25).... } \epsilon' &= 0,008085 \text{ cm} \\ \text{D'où..... } u'_* &= 92,5 \text{ cm/s} \\ R'_* &= 74,8 \text{ impossible} \end{aligned}$$

RÉGIME L :

La donnée de q' permet de calculer u'_1 :

$$\begin{aligned} \text{De (25).... } z' &= 14,581 \\ \text{De (24).... } u'_1 &= 2,977 \text{ cm/s} \\ \text{D'où..... } h' &= 4,420 \text{ cm} \\ u'_* &= 82 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

L'accord sur les valeurs de h' est assez bon; mais ce régime exigerait :

$$\epsilon' < \frac{5,08 \nu}{u_*} = 0,000062 \text{ cm}$$

ce qui est peu vraisemblable. On doit donc se trouver en régime T₂ avec $\epsilon = 0,00609 \text{ cm}$. Calculons alors h' pour l'expérience III' :

$$\begin{aligned} \text{De (28).... } z &= 11,91 \\ \text{De (14).... } u'_1 &= 2,640 \text{ cm/s} \\ h' &= 3,543 \text{ cm} \\ u'_* &= 88,7 \text{ cm/s} \\ R'_* &= 54 \\ \text{De (23).... } Y' &= 26,8 \text{ cm} \end{aligned}$$

La même méthode appliquée aux expériences O' et I' permet d'établir le tableau XXIV des résultats théoriques.

L'accord est assez satisfaisant, si l'on tient compte de la difficulté d'une mesure précise sur photographie. Il semble donc bien que l'eau blanche apparaisse au point critique. On notera dans le tableau XXIII que h' est supérieur à $\mu \cdot h$, ainsi que nous l'avons établi dans la première partie.

TABLEAU XXIV

N°	O'	I'	III'	IV'
q' cm ² /s....	12.100	40.000	65.000	81.000
z'	10,97	11,71	11,91	12,01
u'_1 cm/s....	1.450	2.310	2.640	2.800
h' cm.....	1.080	2.730	3.540	3.990
Y'_c cm.....	9,2	18,9	26,8	31,6
u'_* cm/s....	53	79	88,7	93,5
R'_*	32,1	48,4	54	56,9

BIBLIOGRAPHIE

19. POWELL (R.). — Flow in a channel of definite roughness. *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, vol. III, 1946, p. 531.
20. DAVIS (C.). — *Hand book of applied hydraulics*. New-York and London, Mac Graw-Hill Co., 1942, p. 341.
21. HICKOX (G.H.). — Air entrainment on spillway faces. *Civil Engineering*, déc. 1945, vol. 15, n° 12, p. 562.
22. HICKOX (G.H.). — Spillway Coefficients, Norris Dam. *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, vol. 109, 1944, p. 68.

(A suivre.)