

Calcul des réservoirs d'air*

Air tank design

PAR PAUL Sliosberg

INGÉNIEUR A.I.L.G.,
 ANCIEN ASSISTANT A L'UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES,
 INGÉNIEUR AUX ATELIERS DE CONSTRUCTION D'ENSIVAL

Règles pratiques d'utilisation d'une nouvelle méthode graphique pour l'analyse du fonctionnement des réservoirs d'air dans les installations de pompage. Justification de cette méthode déduite d'un bilan énergétique de l'installation dans divers cas : pompe alimentant un château d'eau par le bas ou par le haut, en négligeant ou non les pertes de charge.

Practical instructions concerning the use of a new graphical method for analysing the action of air tanks in pumping installations. The justification of the method is deduced from the distribution of energy in the installation in various cases : pump supplying a storage tank from below or from above, account being taken or not, of head losses.

INTRODUCTION

De nombreuses stations de pompage destinées à élever de l'eau dans un château d'eau sont équipées d'un réservoir d'air branché sur le départ de la conduite de refoulement. La raison d'être d'un tel réservoir est de servir comme organe amortisseur des coups de bélier qui pourraient

se présenter dans la conduite de refoulement lors de l'arrêt d'une des pompes de la station.

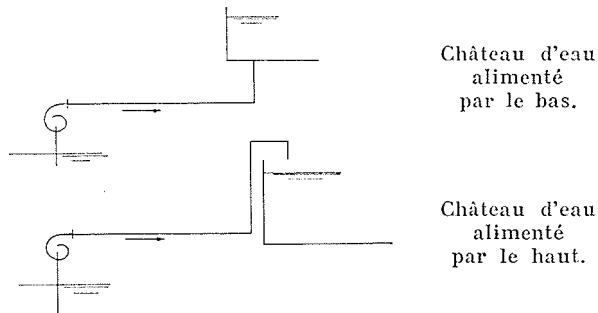
Il est rare que les dimensions de ces réservoirs (1/2 à 10 m³) soient déterminées par le calcul. On manque généralement de temps pour faire une étude complète des phénomènes d'oscillation en

*Ce travail est extrait d'un mémoire présenté en 1950 au concours de la Société Royale Belge des Ingénieurs et des Industriels et a valu à l'auteur le titre de « Lauréat de la S.R.B.I.I. ».

Voir : « L'influence des pertes de charge sur quelques cas d'oscillation en masse » (*Mémoires de la S.R.B.I.I.*, n° 2, 1951).

Voir également :

1. HANOCQ (Ch.). — *Les machines rotatives*, pages 577 et suiv. Béranger, 1935.
2. BINNIE (M.A.). — « Oscillations in closed surge tanks », *Journal of Applied Mechanics*, décembre 1943.
3. Sliosberg (P.). — « L'utilité des réservoirs d'air dans quelques écoulements en régime varié », *Revue Universelle des Mines*, septembre 1949.
4. VIBERT (A.). — « La protection des conduites de refoulement contre les surpressions », *Le Génie Civil*, 15 mars 1950.
5. BERGERON (L.). — *Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité*, Dunod, 1950.



masse à l'aide de la méthode graphique de M. BERGERON. Il en résulte que de nombreux réservoirs déjà construits sont beaucoup trop grands (les beaucoup trop petits se remplacent généralement assez vite!) et leur pression d'épreuve est souvent mal choisie.

La méthode de calcul proposée ci-dessous, ex-

traite d'un mémoire paru dans le bulletin de la S.R.B.I.I., permet, en traçant quelques lignes sur un diagramme établi une fois pour toutes, de déterminer avec une précision suffisante le volume à donner au réservoir afin que la pression maximum ou minimum ne dépasse pas une valeur fixée d'avance. La méthode de calcul tient compte des pertes de charge dans la conduite et du fait que les conduites de refoulement alimentent généralement les châteaux d'eau par le haut. En tenant compte de ces deux dernières conditions, on arrive à réduire assez notablement le poids du réservoir étudié.

Plan de l'Exposé

I. — Application de la méthode de calcul :

a) Définitions et hypothèses;

I. — APPLICATION DE LA MÉTHODE DE CALCUL

a) DÉFINITIONS ET HYPOTHÈSES

Nous choisirons comme exemple l'installation définie par la figure 1. Les dimensions seront les suivantes :

Diamètre de la conduite :
600 mm, section $s = 0,282 \text{ m}^2$;

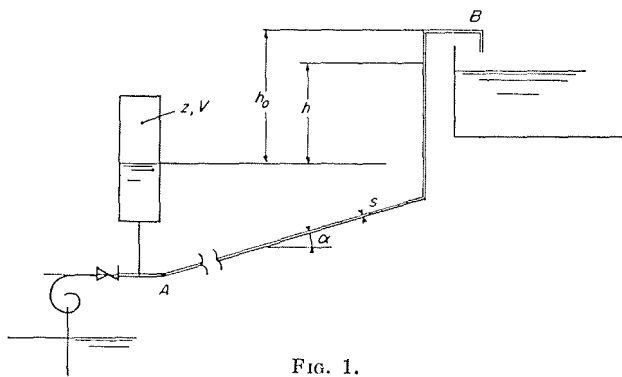


FIG. 1.

- L longueur de la conduite de A jusqu'en B m
- s section de la conduite..... m^2
- V volume d'air dans le réservoir..... m^3
- w vitesse de l'eau dans la conduite..... m/s
- z pression absolue de l'air enfermé dans la cloche = $h + 10 \pm$ perte m C.E.
- h charge statique sur le réservoir..... »
- $\xi z_0 \left(\frac{w}{w_0}\right)^2$ perte de charge entre A et B..... »

L'indice 0 correspond au régime initial :
 z_0 désignera toujours $h_0 + 10$, sans tenir compte de la perte.
 V_0 correspond à la pression z_0 sans tenir compte de la perte.
L'indice 1 correspond à la fin de l'oscillation « aller ».
L'indice 2 correspond à la fin de l'oscillation « retour ».

- b) Cas du château d'eau alimenté par le bas, les pertes de charge sont négligées;
- c) Cas du château d'eau alimenté par le haut, les pertes de charge sont négligées;
- d) Cas du château d'eau alimenté par le bas, compte tenu des pertes de charge;
- e) Cas du château d'eau alimenté par le haut, compte tenu des pertes de charge.

II. — Théorie de la méthode de calcul.

III. — Remarque complémentaire.

La première partie de l'exposé s'adresse aux praticiens en leur donnant les indications quant à l'utilisation de la méthode de calcul.

Les deux autres parties exposent les bases mathématiques du procédé de calcul.

- Longueur de la conduite : 8 km;
- Débit initial : $1.500 \text{ m}^3/\text{h}$;
- Hauteur d'élevation statique : $h_0 = 63,8 \text{ m}$;
- Perte de charge correspondante au débit initial :
26,2 m;
- Volume d'air contenu dans le réservoir à la pression de 63,8 m eff :
 $V_0 = 3,43 \text{ m}^3$ *.

Si l'installation n'était pas munie d'un réservoir d'air, un arrêt du groupe moto-pompe provoquerait un coup de bélier qui conduirait à l'endroit de la pompe à une pression effective de $16,5 \text{ kg/cm}^2$ **.

Analysons à présent l'installation munie d'un réservoir d'air en affinant progressivement notre méthode d'investigation.

Qualitativement, les phénomènes évoluent comme suit :

Lorsque la pompe s'arrête, le clapet de retenue placé à son refoulement retombe instantanément (c'est une hypothèse — en réalité les pompes continuent à débiter plus ou moins longtemps, suivant l'inertie de leurs rotors et le clapet peut fermer plus tard) et c'est le réservoir d'air qui alimente la conduite en air, nous dirons que c'est l'oscillation « aller ».

Le niveau du plan d'eau dans le réservoir descend, en bout de conduite la hauteur reste égale à h_0 .

* Le volume de V_0 est choisi afin de pouvoir comparer les résultats aux calculs précis du Mémoire de la S.R.B.I.I. où $V_0 = 2,75 \text{ m}^3$ sous $63,8 + 26,2 + 10 - 8 = 92 \text{ m abs}$.

** Voir III.

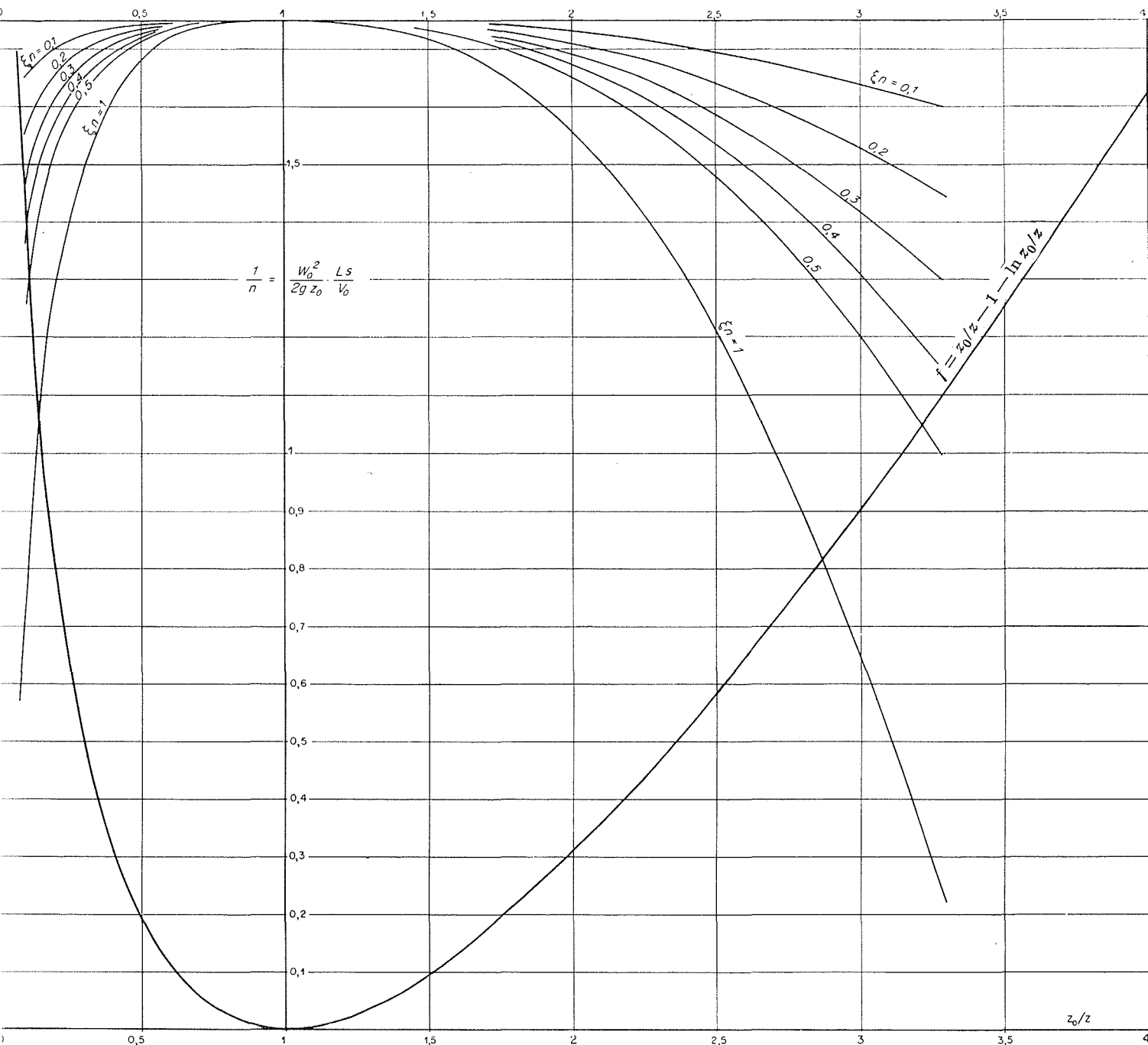


FIG. 2.

Finalement, la vitesse d'écoulement dans la conduite tombe à zéro. Par suite de l'inertie de l'eau, la pression dans le réservoir est à ce moment inférieure à la valeur correspondante à l'équilibre, et le reflux vers le réservoir commence, nous dirons que c'est l'oscillation « retour ».

Lors de l'oscillation « retour », le plan d'eau descend dans la partie verticale de la conduite de refoulement, il remonte dans le réservoir d'air.

La vitesse d'écoulement s'accroît d'abord, diminue ensuite pour tomber à zéro au moment où la pression maximum est atteinte dans le réservoir.

Au point de vue quantitatif, le constructeur doit pouvoir évaluer :

- a) La pression minimum qui fixe le volume du réservoir d'air si l'on désire qu'il ne se vide pas;
- b) La pression maximum qui prouve que l'installation est effectivement protégée.

Nous établirons ces valeurs moyennant les hypothèses suivantes :

1. La compressibilité de l'eau est négligée, de même que la dilatabilité des conduites et réservoirs. Autrement dit : toute la masse d'eau oscille comme un corps solide, c'est ce que l'on désigne par « oscillation en masse ».
2. Les pertes de charge, même en régime varié, sont proportionnelles à la deuxième puissance de la vitesse d'écoulement.
3. Le clapet de retenue retombe instantanément sur son siège et isole la conduite et le réservoir d'air dès l'arrêt des pompes; cette hypothèse n'est admissible que lorsque le

moment d'inertie des masses tournantes est faible.

4. La variation de la position du plan d'eau à l'intérieur du réservoir est négligée.
5. L'hypothèse 1 nous permet de considérer toutes les forces comme étant appliquées au centre de gravité de la masse d'eau qui effectue les oscillations.

Moyennant ces hypothèses, les calculs s'effectuent comme suit :

b) LE CHATEAU D'EAU EST ALIMENTÉ PAR LE BAS, LES PERTES DE CHARGE SONT NÉGLIGÉES.

Le procédé est indiqué par la figure 4.

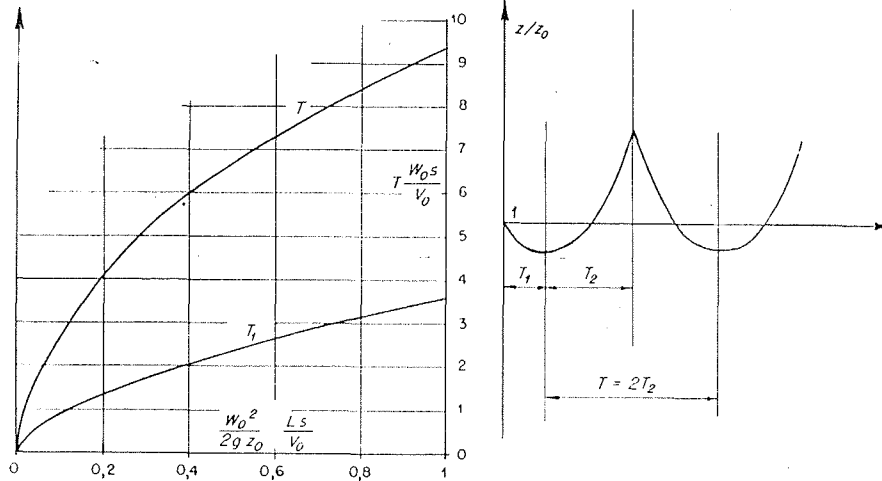


FIG. 3.

On trace sur le diagramme figure 2 une droite distante de :

$$\frac{1}{n} = \frac{w_0^2}{2g z_0} \cdot \frac{Ls}{V_0}$$

de l'axe des abscisses; soit PQ de cette droite.

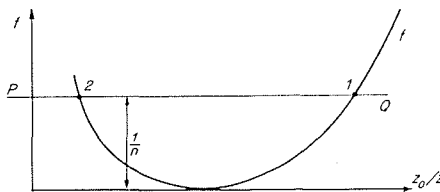


FIG. 4.

Les abscisses des deux points d'intersection 1 et 2 donnent les pressions minimum et maximum auxquelles le réservoir d'air sera soumis.

La même valeur 1/n, portée en abscisse sur le

diagramme des temps figure 3, donne en ordonnée les valeurs $T \frac{w_0^2}{V_0}$. La signification des différents T est donnée par le schéma joint au diagramme des temps.

APPLICATION :

$$\frac{1}{n} = \frac{1,48^2}{19,62 \times 73,8} \times \frac{8.000 \times 0,282}{3,43} = 1$$

On trouve sur le diagramme figure 2 :

$$z_0/z_1 = 3,145 \quad z_1 = 23,4 \text{ m} \quad V_1 = 10,8 \text{ m}^3$$

$$z_0/z_2 = 0,16 \quad z_2 = 460,0 \text{ m} \quad V_2 = 0,55 \text{ m}^3$$

$$T \frac{w_0^2}{V_0} = 9,4 \text{ (fig. 3)} \quad T = \frac{3,43}{1,48 \times 0,282} \times 9,4 = 77,1 \text{ s}$$

Le calcul ci-dessus, simplifié à outrance, conduit à la conclusion que l'installation d'un ré-

servoair aggrave considérablement le danger de rupture par surpression, car la pression maximum est environ quatre fois plus forte que pour l'installation non protégée; nous allons voir qu'il n'en est rien.

c) CHATEAU D'EAU ALIMENTÉ PAR LE HAUT, LES PERTES DE CHARGE SONT NÉGLIGÉES

Le procédé de calcul est indiqué par la figure 5. On trace sur le diagramme de la figure 2 une droite distante de :

$$\frac{1}{n} = \frac{w_0^2}{2g z_0} \frac{Ls}{V_0}$$

de l'axe des abscisses, soit PQ cette droite.

On trace la parabole QR de sommet 1 et d'ordonnée y_1 au point $z_0/z = 1$ avec :

$$y_1 = \frac{V_0}{2s z_0} (z_0/z_1 - 1)^2$$

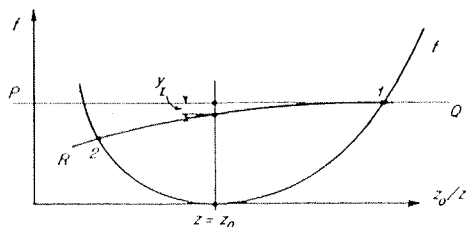


Fig. 5.

Les ordonnées de la parabole doivent être portées vers le bas à partir de PQ. Les abscisses des deux points 1 et 2 donnent les valeurs des pressions minimum et maximum auxquelles le réservoir d'air sera soumis.

APPLICATION :

$$\frac{1}{n} = 1$$

$$z_0/z_1 = 3,145 \quad z_1 = 23,4 \text{ m} \quad V_1 = 10,8 \text{ m}^3$$

$$y_1 = \frac{3,43}{2 \times 0,282 \times 73,8} (3,145 - 1)^2 = 0,38$$

$$z_0/z_2 = 0,37 \quad z_2 = 200 \text{ m} \quad V_2 = 1,27 \text{ m}^3$$

Lorsque la partie ascendante de la conduite fait un angle avec l'horizontale, on multipliera la valeur de y_1 par le sinus de cet angle.

d) CHATEAU D'EAU ALIMENTÉ PAR LE BAS, COMPTE TENU DES PERTES DE CHARGE

Le procédé de calcul est indiqué par la figure 6.

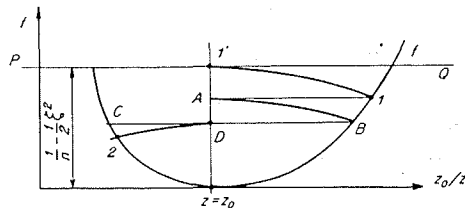


Fig. 6.

On trace sur le diagramme de la figure 2 une droite PQ distante de :

$$\frac{w_0^2}{2g z_0} \frac{Ls}{V_0} - \frac{1}{2} \xi^2$$

de l'axe des abscisses. Sur PQ, le point 1' correspond à l'abscisse $z_0/z = 1$.

Ensuite on trace :

A travers 1', une courbe 1'1 parallèle à la courbe des pertes correspondant aux valeurs ξn du problème.

A1//PQ

A travers A, une nouvelle courbe AB parallèle à la courbe des pertes du problème.

CB//PQ

A travers D, une courbe D2 parallèle à la courbe des pertes du problème. Les abscisses des points 1 et 2 donnent les pressions cherchées.

APPLICATION :

$$\frac{1}{n} = 1 \quad \xi = \frac{26,2}{73,8} = 0,355$$

$$\frac{1}{2} \xi^2 = 0,063 \quad \xi n = 0,355$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \xi^2 = 0,937$$

$$z_0/z_1 = 2,66 \quad z_1 = 27,7 \text{ m} \quad V_1 = 9,1 \text{ m}^3$$

$$z_0/z_2 = 0,33 \quad z_2 = 233,0 \text{ m} \quad V_2 = 1,13 \text{ m}^3$$

e) CHATEAU D'EAU ALIMENTÉ PAR LE HAUT, COMPTE TENU DES PERTES DE CHARGE

Le procédé de calcul est indiqué par la figure 7.

On trace sur le diagramme de la figure 2 les lignes indiquées sous *d*) afin d'obtenir le point 1; ensuite on trace :
la parabole 1R, de sommet 1 et passant par B, avec :

$$AB = \frac{V_0}{2 s z_0} (z_0/z_1 - 1)^2$$

1A//PQ

AD//courbe des pertes

BF = DE

GF//parabole 1R

F2 est construit en portant, à partir de FG vers le bas, les ordonnées de la courbe des pertes du problème.

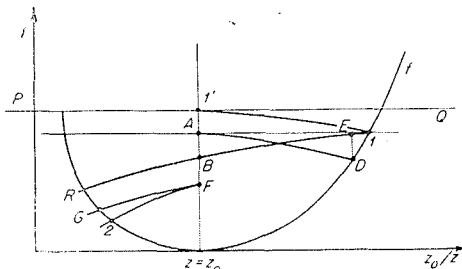


FIG. 7.

Les abscisses des points 1 et 2 donnent les pressions cherchées.

APPLICATION :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \xi^2 = 0,937 \quad \xi n = 0,355$$

$$z_0/z_1 = 2,66 \quad z_1 = 27,7 \text{ m} \quad V_1 = 9,1 \text{ m}^3$$

$$AB = y_1 = \frac{3,43}{2 \times 0,282 \times 73,8} (2,66 - 1)^2 = 0,228$$

$$z_0/z_2 = 0,572 \quad z_2 = 129 \text{ m} \quad V_2 = 1,96 \text{ m}^3$$

REMARQUE : On s'arrange souvent pour que la perte de charge lors de l'oscillation retour soit supérieure à sa valeur lors de l'oscillation aller. Il en résulte un amortissement supplémentaire et la pression maximum atteinte en fin d'oscillation retour diminue encore.

Pour arriver à un tel résultat, on installe souvent un deuxième clapet de retenue, à battant percé, juste à l'entrée de la cloche. Lors de l'oscillation aller, le battant du clapet est levé et l'eau passe à travers la section entière du clapet; par contre, lors de l'oscillation retour, le clapet retombe sur son siège et l'eau passe à travers l'orifice ménagé dans le battant du clapet, ce

qui conduit à une perte supplémentaire, facilement calculable et d'autant plus forte que l'orifice est plus petit.

Dans un tel cas, l'analyse des phénomènes s'effectue encore suivant le procédé de la figure 7, seulement les courbes AD et F2 doivent être tracées avec des valeurs ξn différentes.

CONCLUSIONS

Afin d'apprécier la méthode de calcul, comparons les résultats obtenus à ceux fournis par un calcul analytique précis. (Voir mémoire cité de la S.R.B.I.I.).

Les pressions obtenues à l'aide de cette méthode de calcul sont :

$z_1 = 28,15 \text{ m}$ $z_2 = 117,42 \text{ m}$	}	chiffres obtenus en tenant compte de la variation de la position du plan d'eau à l'intérieur du réservoir d'air et en calculant sans aucune approximation dans la limite des hypothèses faites.
---	---	---

contre :

$z_1 = 27,7 \text{ m}$ $z_2 = 129,0 \text{ m}$	}	valeurs obtenues pour la même installation à l'aide de la méthode graphique exposée ci-dessus et en négligeant la variation de la position du plan d'eau à l'intérieur du réservoir d'air.
---	---	--

Le calcul graphique conduit par rapport au calcul analytique dans ce cas particulier :

à 1/ un réservoir 2 % trop grand;

2/ une pression maximum exagérée de 10 %.

L'approximation est par suite faite dans le sens de la sécurité et l'écart avec un calcul précis ne paraît pas être exagéré.

A) Dans l'industrie on aurait résolu le problème posé en recourant à l'artifice de la ramarque ci-dessus (I_o), ce qui aurait conduit à un réservoir de poids notablement inférieur.

B) Si l'on avait essayé de calculer le réservoir suivant la méthode I b/, tout en limitant $z_2 \leq 129 \text{ m}$, on aurait écrit :

$$\frac{1}{n} = \frac{1,48^2}{19,62 \times 73,8} \times \frac{8.000 \times 0,282}{V_0}$$

$$= f\left(\frac{73,8}{129}\right) = f(0,573) = 0,13$$

d'où :

$$V_0 = 26,4 \text{ m}^3 \quad V_{\text{max}} = 26,4 \times 1,59 = 42 \text{ m}^3$$

Il aurait par suite fallu installer un réservoir de 42 m³ : ce chiffre prouve à lui seul que cette

méthode de calcul conduit souvent à un gaspillage d'équipement.

C) *Lois de similitude.* — Les données qui définissent une installation déterminée interviennent dans les calculs sous la forme de trois rapports sans dimension, à savoir :

$$n = \frac{2g z_0}{w_0^2} \cdot \frac{V_0}{Ls}$$

$$\tau = \frac{V_0}{w_0 s}$$

$$\xi = \frac{\text{perte}}{z_0}$$

En partant de ces trois valeurs, on obtient les

II. — THÉORIE DE LA MÉTHODE DE CALCUL

A) *Les pertes de charge sont négligées.*

(A1) LE CHATEAU D'EAU EST ALIMENTÉ PAR LE BAS

(A11) *Relation entre les vitesses et les pressions et détermination des pressions extrêmes.*

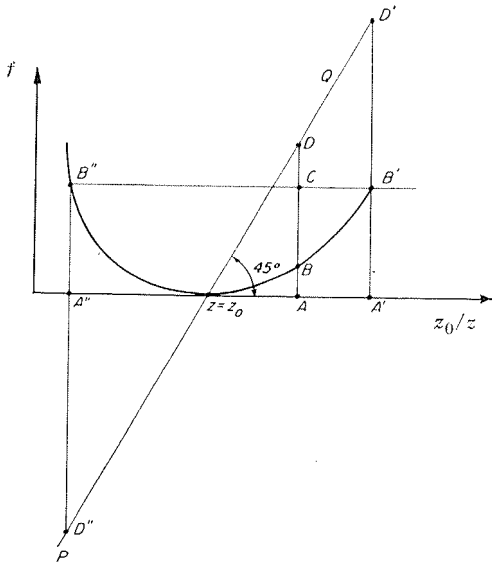


FIG. 8.

Après l'arrêt de la pompe, l'eau de la conduite et l'air du réservoir constituent un système isolé dont l'énergie se conserve (voir fig. 8).

t secondes après l'arrêt :

α) la vitesse dans la conduite sera tombée de w_0 à w et l'énergie cinétique aura diminué de :

$$\frac{w_0^2 - w^2}{2g} Ls \delta \text{ kgm}$$

amplitudes relatives z_0/z_1 et z_0/z_2 , de même que la période T .

Il en résulte que :

« Deux installations différentes auront même amplitude relative et même période, lorsque leurs valeurs caractéristiques n , τ et ξ seront numériquement égales ».

Cette remarque permet l'utilisation de mesures obtenues sur modèle réduit ou encore la comparaison d'une installation projetée à une existante.

Lorsque le château d'eau est alimenté par le haut, il faut en plus que le chiffre $v = \frac{V_0}{sz_0}$ soit le même pour les deux installations que l'on désire comparer.

β) la pression dans la cloche sera tombée à $p \text{ kg/m}^2$ et l'air aura fourni le travail de détente (supposé isothermique) donné par :

$$p_0 V_0 \ln \frac{p_0}{p} \text{ kgm}$$

γ_1) un volume d'eau $V - V_0$ aura été « levé » vers le château d'eau et aura acquis une énergie potentielle de position par rapport au réservoir donné par :

$$(V - V_0) h_0 \delta \text{ kgm}$$

γ_2) ce volume a été expulsé dans le château d'eau tout en travaillant contre la pression atmosphérique (= 10 m) :

$$(V - V_0) 10 \delta \text{ kgm}$$

est le travail correspondant. La somme des travaux γ_1 et γ_2 sera désignée par « énergie potentielle », elle vaut :

$$(V - V_0) (h_0 + 10) \delta = (V - V_0) z_0 \delta \text{ kgm}$$

écrivons que l'énergie du système se conserve :

$$\frac{w_0^2 - w^2}{2g} Ls \delta + p_0 V_0 \ln \frac{p_0}{p} - (V - V_0) z_0 \delta = 0 \tag{1}$$

divisons tous les termes de (1) par :

$$p_0 V_0 = \delta z_0 V_0$$

et remarquons que, par suite de notre hypothèse sur la détente isothermique :

$$\frac{p_0}{p} = \frac{V}{V_0} = \frac{z_0}{z}$$

on obtient :

$$\frac{w_0^2 - w^2}{2g z_0} \frac{Ls}{V_0} + \ln \frac{z_0}{z} - \left(\frac{z_0}{z} - 1 \right) = 0 \quad (2)$$

Les transformations d'énergie définies par la relation (2) peuvent être facilement représentées sur un diagramme :

Traçons (fig. 8) la fonction :

$$f \equiv z_0/z - 1 - \ln z_0/z \quad (3)$$

En fonction de z_0/z , portons sur le même diagramme la droite PQ dont les ordonnées sont :

$$z_0/z - 1 = AD \quad (4)$$

soit encore :

$$A'B' = \frac{w_0^2}{2g z_0} \frac{Ls}{V_0} = AC \neq f(z_0/z) \quad (5)$$

(2) s'écrit alors :

$$\frac{w_0^2 - w^2}{2g z_0} \frac{Ls}{V_0} = f = AB \quad (6)$$

(5) et (6) définissent :

$$\frac{w^2}{2g z_0} \frac{Ls}{V_0} = AC - AB = BC \quad (7)$$

(4) et (3) définissent :

$$\ln z_0/z = z_0/z - 1 - f = AD - AB = BD \quad (8)$$

Les équations (4), (6) et (8) donnent l'interprétation graphique de l'expression (2).

z sera max. ou min. pour $w = 0$ aux points B' et B''; ce sont les valeurs cherchées.

ECHANGES D'ÉNERGIE SANS DISSIPATION

Nous lisons à présent le diagramme 8 comme suit :

A la fin de l'oscillation « aller » — points figuratifs A' B' D', car $w \div BC = 0$ — on a l'égalité :

$$A'B' + B'D' = A'D'$$

ce qui signifie que l'énergie cinétique A' B' et l'énergie de pression B' D' ont été transformées en énergie potentielle A' D'.

A la fin de l'oscillation « retour » — points figuratifs A'' B'' D'' — on a l'égalité :

$$A''B'' + A''D'' = D''B''$$

ce qui signifie que l'énergie cinétique A'' B'' = A' B' et l'énergie potentielle A'' D'' ont été transformées en énergie de pression D'' B''.

L'évolution des trois formes d'énergie est résumée dans le tableau ci-dessous :

z_0/z	min.	1	max.
temps	fin coup « aller »	régime	fin coup « retour »
<i>cinétique</i>	0	<i>max.</i>	0
<i>potentielle</i>	<i>max.</i>	0	<i>min.</i>
<i>pression</i>	<i>min.</i>	0	<i>max.</i>

(A 12) Détermination de la période d'oscillation.

La loi des oscillations est donnée par l'équation (A 11 — 2).

Nous écrivons, pour simplifier les notations :

$$\frac{z_0}{z} = x; \quad f(x) = \ln x - x + 1 = -f \quad (9)$$

Avec ces notations (A 11-2) se transforme en :

$$\frac{w_0^2 - w^2}{2g z_0} \frac{Ls}{V_0} - f = 0$$

ou encore :

$$\frac{w_0^2}{2g z_0} \frac{Ls}{V_0} - \frac{w_0^2}{2g z_0} \frac{Ls}{V_0} \left(\frac{w}{w_0} \right)^2 - f = 0 \quad (10)$$

Avec notre notation habituelle :

$$n = \frac{2g z_0}{w_0^2} \frac{V_0}{sL}$$

on obtient :

$$\left(\frac{w}{w_0} \right)^2 = 1 - nf \quad (11)$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$dV = ws dt \quad (12)$$

Elle peut se mettre sous la forme :

$$d \frac{V}{V_0} = \frac{w_0 s}{V_0} \left(\frac{w}{w_0} \right) dt \quad (13)$$

avec :

$$d \left(\frac{V}{V_0} \right) = d \left(\frac{z_0}{z} \right) = dx \quad (14)$$

On obtient finalement :

$$dx = \frac{w_0 s}{V_0} \left(\frac{w}{w_0} \right) dt \quad (15)$$

ce qui donne, avec (11) :

$$dx = \frac{w_0 s}{V_0} \sqrt{1 - nf} dt \quad (16)$$

Soient encore x_1 et x_2 les racines de l'équation :

$$f = \frac{1}{n} \tag{17}$$

Pour déterminer ces valeurs, correspondant à z min. et z max., il suffit de tracer sur le diagramme de f (fig. 2) l'horizontale $\frac{1}{n} = f$ et de lire les abscisses des points d'intersection.

Soit encore T_1 l'intervalle de temps entre le déclenchement du groupe ($x = 1$) et l'instant où z est minimum ($x = x_1$).

(16) donne alors :

$$\frac{w_0 s}{V_0} T_1 = \int_1^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1-nf}} \tag{18}$$

Comme x_1 est une fonction de n , tout le membre de droite est une fonction de n , ce qui permet de tracer une courbe :

$$\frac{w_0 s}{V_0} T_1 = f(n) \tag{19}$$

De même si T_2 est l'intervalle de temps entre le moment où z est minimum ($x = x_1$) et le moment où z est maximum ($x = x_2$), cet intervalle de temps sera déterminé par :

$$\frac{w_0 s}{V_0} T_2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1-nf}} \tag{20}$$

Comme ci-dessus, on pourra tracer une courbe :

$$\frac{w_0 s}{V_0} T_2 = \varphi(n) \tag{21}$$

Par suite de la symétrie des oscillations, la période (fig. 3) :

$$T = 2 T_2 = 2 \varphi(n) \tag{22}$$

Les courbes (19) et (22) sont tracées sur le diagramme figure 3.

On constate que la période d'oscillation est supérieure d'environ 4 % à la période calculée en admettant que l'amplitude des oscillations est infiniment petite, auquel cas on utilise la formule classique :

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{L \delta V_0}{s p_0 g}} \tag{23}$$

qui peut aussi se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} T \frac{w_0 s}{V_0} &= 2 \pi \sqrt{\frac{w_0^2 s^2 L V_0}{V_0^2 s z_0 g}} = 2 \pi \sqrt{2} \sqrt{\frac{w_0^2 L s}{2 g z_0 V_0}} \\ T \frac{w_0 s}{V_0} &= 2 \sqrt{2} \pi \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{8,9}{\sqrt{n}} \end{aligned} \tag{24}$$

(A 2) LE CHATEAU D'EAU EST ALIMENTÉ PAR LE HAUT.

Pour l'oscillation « aller », tout se passe comme si le château d'eau était alimenté par le bas (hauteur constante en bout de conduite).

Le point caractérisant l'état en fin oscillation « aller » sur le diagramme est A (fig. 9).

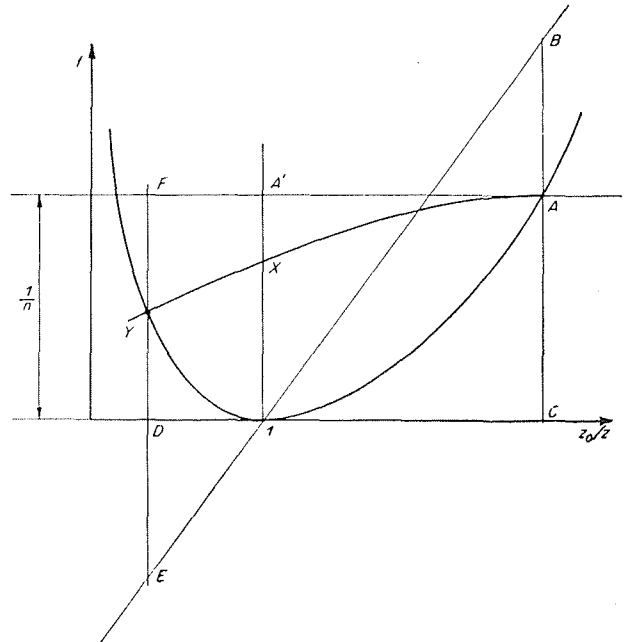


Fig. 9.

D'après ce qui a été exposé plus haut, pour atteindre cet état, on a dépensé :

- a) Du travail de détente AB;
- b) De l'énergie cinétique AC;

et on a obtenu une réserve d'énergie sous forme d'un volume d'eau $V_A - V_0$ qui se trouve dans le château d'eau = BC.

Lors de l'oscillation « retour », on atteindra de nouveau la pression de régime z_0 , à ce moment :

- 1) On aura recomprimé l'air de la cloche et par conséquent dépensé un travail AB;
- 2) Une certaine vitesse w_2 régnera dans la conduite, cela implique la constitution d'une énergie cinétique :

$$\frac{w_2^2}{2 g z_0} \frac{L s}{V_0} = 1 X \tag{25}$$

Ces deux énergies ne peuvent être obtenues qu'en fournissant un travail.

Comme le château d'eau est à présent supposé être alimenté par le haut, ce n'est que l'eau con-

tenue dans la conduite de refoulement qui peut fournir le travail nécessaire à l'obtention de l'énergie cinétique et de la compression de l'air.

Lorsque dans une conduite de section s (m²) le plan d'eau descend de dh , à partir d'une hauteur h , l'énergie potentielle libérée est :

$$dE = (s dh) \delta h$$

Pour une variation de niveau entre les hauteurs h_0 et h_A , l'énergie libérée sera :

$$E_{0A} = \int_{h_A}^{h_0} s dh \delta h = s \delta \frac{1}{2} (h_0^2 - h_A^2) \quad (26)$$

A cela, il faut ajouter le travail de la pression atmosphérique (10 m) qui s'exerce sur la surface s et l'énergie disponible totale s'écrit :

$$E_{\text{pot}} = s \delta \frac{1}{2} (h_0^2 - h_A^2) + s (h_0 - h_A) \delta \times 10 \quad (27)$$

Or, l'eau de la conduite entre dans le réservoir :

$$s (h_0 - h_A) = V_A - V_0$$

et les calculs se développent comme suit :

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= s \delta \frac{1}{2} (h_0 - h_A) [2 h_0 - (h_0 - h_A)] \\ &\quad + s (h_0 - h_A) \delta \times 10 \\ &= s \delta (h_0 - h_A) (h_0 + 10) - \frac{s \delta}{2} (h_0 - h_A)^2 \\ &= \delta (V_A - V_0) z_0 - \frac{\delta}{2s} (V_A - V_0)^2 \quad (28) \end{aligned}$$

Divisons cette expression par l'énergie de référence $V_0 z_0 \delta$ afin d'obtenir une grandeur de même dimension que celles du diagramme 2 :

$$e_{\text{pot}} = \frac{V_A - V_0}{V_0} - \frac{V_0}{2 s z_0} \left(\frac{V_A - V_0}{V_0} \right)^2 \quad (29)$$

ou finalement :

$$e_{\text{pot}} = \left(\frac{z_0}{z_A} - 1 \right) - \frac{V_0}{2 s z_0} \left(\frac{z_0}{z_A} - 1 \right)^2 \quad (30)$$

Dans le cas où le château d'eau est alimenté par le haut, l'énergie potentielle mise en jeu lors de l'oscillation retour est par suite inférieure de :

$$\frac{V_0}{2 s z_0} \left(\frac{z_0}{z_A} - 1 \right)^2 \quad (31)$$

à celle mise en jeu pour une installation où le château d'eau est alimenté par le bas.

L'énergie cinétique atteinte au moment où la pression z_0 se rétablit dans le réservoir sera in-

férieure de la même quantité à celle du régime initial.

Cette remarque permet immédiatement de porter le point X sur le diagramme, car :

$$AC - 1 X = \frac{V_0}{2 s z_0} \left(\frac{z_0}{z_A} - 1 \right)^2 = \frac{V_0}{2 s z_0} \frac{1}{1 C} \quad (32)$$

Comment s'effectue à présent la recompression de l'air dans la cloche?

Si nous comprimons l'air dans la cloche à partir de la pression z_A , non plus jusqu'à z_0 mais jusqu'à une pression z ,

- 1) Le travail de compression de l'air sera identique à celui qui a été nécessaire lorsque le château d'eau était supposé être alimenté par le bas;
- 2) L'énergie cinétique correspondant à la pression z sera inférieure à l'énergie cinétique qui correspond à z_0 dans le cas où le château est supposé être alimenté par le bas, d'une quantité égale à la différence des énergies de position correspondantes.

Cette quantité s'évalue immédiatement à :

$$\frac{V_0}{2 s z_0} \left(\frac{V_A - V}{V_0} \right)^2 = \frac{V_0}{2 s z_0} \left(\frac{z_0}{z_A} - \frac{z_0}{z} \right)^2 \quad (33)$$

Cette expression définit une parabole dont le sommet est A et dont les ordonnées doivent être portées sur le diagramme de AA' vers le bas. Au point $z_0/z = 1$, l'ordonnée vaut :

$$\frac{V_0}{2 s z_0} \left(\frac{z_0}{z_A} - 1 \right)^2$$

valeur déjà obtenue plus haut.

Ainsi :

I), en partant de l'état C, on arrive en 1 :

a) en dépensant une énergie de position
CB — A'X;

b) en créant une énergie cinétique 1 X;

c) en fournissant un travail de compression AB :

$$AB + 1 X = CB - A'X$$

II) en partant de l'état C, on arrive en D :

a) en dépensant une énergie de position
(CB + DE) — FY;

b) en fournissant un travail de compression
AB + EY :

$$AB + EY = (CB + DE) - FY$$

Le point D définit l'amplitude de l'oscillation retour, l'énergie cinétique y est de nouveau nulle.

REMARQUE. — Lorsque la conduite fait un angle α avec l'horizontale, il faut remplacer dans

$$(32) \text{ et } (33) \text{ } s \text{ par } \left(\frac{s}{\sin \alpha} \right).$$

B) Calculs, compte tenu des pertes de charge.

(B1) LE CHATEAU D'EAU EST ALIMENTÉ PAR LE BAS.

(B11) Relation entre les vitesses et les pressions et détermination des pressions extrêmes.

Après l'arrêt de la pompe, l'énergie du système : « eau de la conduite + air du réservoir » ne se conserve pas. Chaque transformation d'énergie au sein de ce système est accompagnée d'une dissipation d'énergie que nous allons évaluer (voir fig. 10).

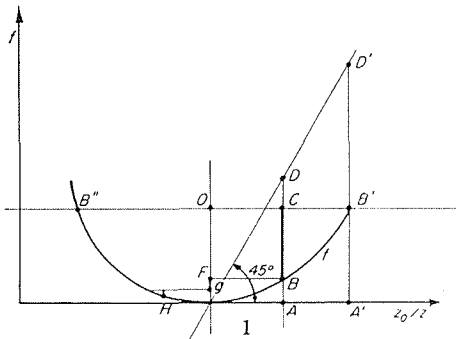


FIG. 10.

L'équation (A11 — 1) n'est plus valable, mais il faut lui substituer l'équation :

$$\frac{w_0^2 - w^2}{2g} L s \delta + p_0 V_0 \ln \frac{p_{01}}{p} - (V - V_{01}) z_0 \delta = E \tag{34}$$

$p_{01} \neq p_0$ et $V_{01} \neq V_0$ à cause de la perte de charge.

E est l'énergie dissipée au cours de la transformation.

En partant d'un état 1 — 0 sur le diagramme de la figure 10, on n'atteindra plus l'état A'B'C' mais un état ABCD; à ce moment on aura transformé l'énergie cinétique AC et le travail des pressions BD en énergie potentielle AD et on aura dissipé l'énergie :

$$E = AC + BD - AD = (AB + BC)$$

$$+ (BC + CD) - (AB + BC + CD) = BC.$$

De même, en partant de B sans dissiper de l'énergie, on serait arrivé en F, l'énergie cinétique correspondante serait 1F, mais comme la transformation BF est elle-même accompagnée d'une dissipation d'énergie, on arrive en G et non en F avec une énergie cinétique 1G < 1F, et ainsi de suite.

Les oscillations ne se feront plus entre les points B' et B'', mais entre les points B, H... etc. de plus en plus rapprochés de l'équilibre 1.

Afin de calculer l'énergie dissipée lors des oscillations, souvenons-nous que cette dissipation est due aux pertes de charge.

$$\text{Soit : } \quad \xi \left(\frac{w}{w_0} \right)^2 z_0 m \tag{35}$$

la perte correspondante au régime à vitesse w ; l'énergie dissipée dans toute la conduite en dt secondes sera :

$$dE = \xi \left(\frac{w}{w_0} \right)^2 z_0 s \delta w dt \tag{36}$$

et l'équation (33) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{w_0^2 - w^2}{2g} L s \delta + p_0 V_0 \ln \frac{p_{01}}{p} - (V - V_{01}) z_0 \delta \\ = \int \xi \left(\frac{w}{w_0} \right)^2 z_0 s \delta w dt \end{aligned} \tag{37}$$

Divisons les deux membres de cette équation par $z_0 \delta V_0$ afin de pouvoir utiliser le diagramme figure 2, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{w_0^2 - w^2}{2g z_0} \frac{Ls}{V_0} + \ln \frac{z_{01}}{z} - \left(\frac{z_0}{z} - \frac{z_0}{z_{01}} \right) \\ = \int \xi \left(\frac{w}{w_0} \right)^2 \frac{s w_0}{V_0} \left(\frac{w}{w_0} \right) dt \end{aligned} \tag{38}$$

Cette relation peut être représentée graphiquement : suivant l'analyse faite ci-dessus, on a sur la figure 11 :

$$\left. \begin{aligned} ST + AE &= \frac{z_0}{z} - \frac{z_0}{z_{01}} \\ BC &= \frac{w^2}{2g z_0} \frac{Ls}{V_0} \\ TO + BE &= \ln \frac{z_{01}}{z} \\ CD &= \int \xi \left(\frac{w}{w_0} \right)^2 \frac{s w_0}{V_0} \left(\frac{w}{w_0} \right) dt \end{aligned} \right\} \tag{39}$$

D'autre part (voir A 12-13) :

$$\frac{s w_0}{V_0} \left(\frac{w}{w_0} \right) dt = d \left(\frac{z_0}{z} \right) \quad (40)$$

On peut, par suite, écrire :

$$\begin{aligned} \xi \left(\frac{w}{w_0} \right)^2 \frac{s w_0}{V_0} \left(\frac{w}{w_0} \right) dt &= \xi \left(\frac{w}{w_0} \right)^2 d \left(\frac{z_0}{z} \right) = \\ &= \xi \left(\frac{w^2}{2 g z_0} \frac{Ls}{V_0} \right) \frac{2 g z_0}{w_0^2} \frac{V_0}{Ls} d \left(\frac{z_0}{z} \right) = \\ &= \xi (BC) \cdot n \cdot d(z_0/z) = \xi n d \Omega \end{aligned} \quad (41)$$

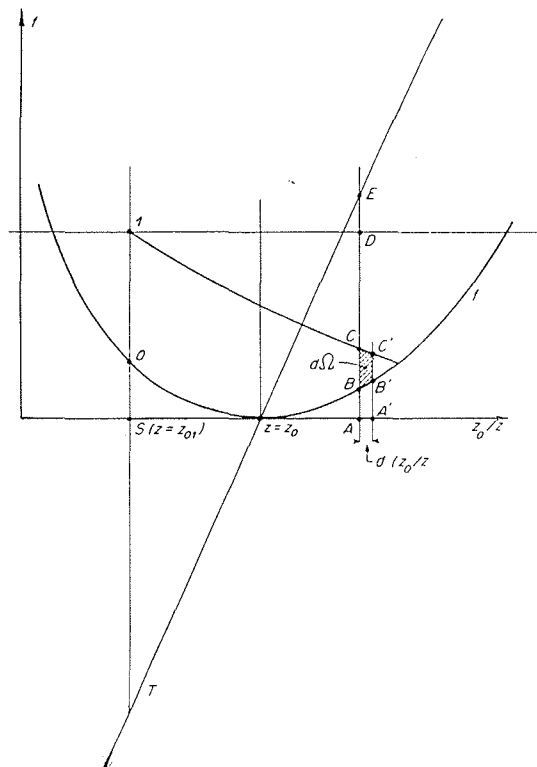


FIG. 11.

$\xi n d \Omega$ représente l'énergie dissipée entre deux états voisins A et A'.

L'énergie dissipée entre les états O1 et AD sera, par suite, $\xi n \Omega$.

Ω représentant la surface OBC 10.

Nous pouvons à présent calculer la courbe 1 C, en intégrant son équation différentielle.

Mesurons les ordonnées de 1 C à partir de 1 D vers le bas et désignons-les par y , écrivons aussi $z_0/z = x$, on a alors :

$$dy = \xi n d \Omega = \xi n (BC) dx \quad (42)$$

Supposons 1 D définie par les valeurs de l'état O1 :

$$\frac{1}{n} = \frac{w_0^2}{2 g z_0} \frac{Ls}{V_0} \text{ et } f_{01} \left(f_{01} \neq 0 \text{ car } z_0/z_{01} \neq 1 \right)$$

$$\text{mais } x_{01} = z_0/z_{01} = \frac{z_0}{z_0 + \xi z_0} = \frac{1}{1 + \xi} \quad (43)$$

on a :

$$BC = \frac{1}{n} + f_{01} - f - y \quad (44)$$

avec :

$$f = z_0/z - 1 - \ln z_0/z = x - 1 - \ln x \quad (45)$$

d'où l'équation différentielle cherchée :

$$dy = \xi n \left(\frac{1}{n} + f_{01} + 1 - x + \ln x - y \right) dx \quad (46)^*$$

qui peut aussi s'écrire :

$$dy + \xi n y dx = \xi n \left(\frac{1}{n} + f_{01} + 1 - x + \ln x \right) dx \quad (47)$$

C'est une équation linéaire du type :

$$\frac{dy}{dx} + P y = Q \quad (48)$$

dont la solution est :

$$y = e^{-\int P dx} \left[\int e^{\int P dx} Q dx + C^te \right] \quad (49)$$

Dans notre cas, on a :

$$P = \xi n \quad Q = \xi n \left(\frac{1}{n} + f_{01} + 1 - x + \ln x \right) \quad (50)$$

et les calculs se développent comme suit :

$$\begin{aligned} \int P dx &= \xi n x \\ \int e^{\int P dx} Q dx &= \xi n \int e^{\xi n x} \left(\frac{1}{n} + f_{01} + 1 - x + \ln x \right) dx \\ \int e^{\xi n x} dx &= \frac{e^{\xi n x}}{\xi n} \\ \int e^{\xi n x} x dx &= \frac{e^{\xi n x}}{\xi^2 n^2} (\xi n x - 1) \\ \int e^{\xi n x} \ln x dx &= \frac{\ln x \cdot e^{\xi n x}}{\xi n} - \frac{1}{\xi n} \text{Ei}(\xi n x) \end{aligned}$$

Ei(x) est la fonction « logarithme intégral » définie par :

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^x}{x} dx$$

* Pour l'oscillation « retour », dx serait à remplacer par « -dx ».

et dont il existe de nombreuses tables.

En effectuant les calculs on trouve

(avec $y_{01} = 0$) :

$$y = \frac{1 + \xi}{\xi n} \left(1 - \frac{e^{\xi n x_{01}}}{e^{\xi n x}} \right) - (x - x_{01}) + \ln \frac{x}{x_{01}} - \frac{Ei(\xi n x) - Ei(\xi n x_{01})}{e^{\xi n x}} \quad (51)$$

C'est l'équation cherchée de la ligne IC; c'est également la valeur de CD, ou également l'expression en termes finis du membre droit de (38). L'équation (38) ainsi complétée permet de trouver la vitesse en fonction de x .

Pour appliquer cette expression, des calculs numériques assez longs sont nécessaires. L'inconvénient pour l'ingénieur chargé du projet réside surtout dans l'impossibilité de confier le travail à quelqu'un ne possédant pas de connaissances mathématiques suffisantes pour chiffrer les formules sans commettre d'erreur. L'ingénieur obligé de « perdre du temps » à des calculs onéreux ne les fera souvent pas et se contentera d'exagérer le volume du réservoir.

Nous allons remplacer la courbe (51) par une autre en nous laissant guider par l'idée que l'industrie ne demande pas un procédé extrêmement précis, mais bien *rapide* et *sûr*.

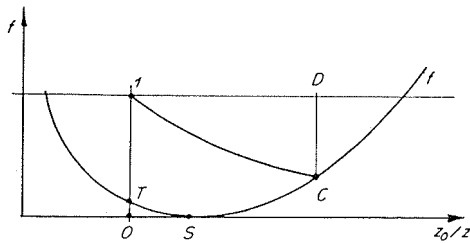


FIG. 12 a.

Nous allons volontairement sous-estimer la dissipation d'énergie. L'amortissement sera inférieur à l'amortissement réel et le calculateur qui appliquera notre méthode sera « couvert », car les valeurs des pressions maxima et minima obtenues par le calcul seront situées au-delà des valeurs réelles.

Analysons d'abord (figure 12 a et b) la première oscillation « aller ». La figure 12 a représente les phénomènes réels. La dissipation DC mesure la surface de T I C S T. Nous allons substituer à cette surface une autre dont il sera plus facile de déterminer l'aire. Sur la figure 12 b, cette surface est figurée en I G U T I + I C' S I. Nous devons à présent démontrer que la surface de substitution est plus petite que la surface I T S C I.

Les surfaces T U S T et I G H I sont très petites et pratiquement équivalentes, il suffit par suite de comparer les surfaces I C' S I et H C S H.

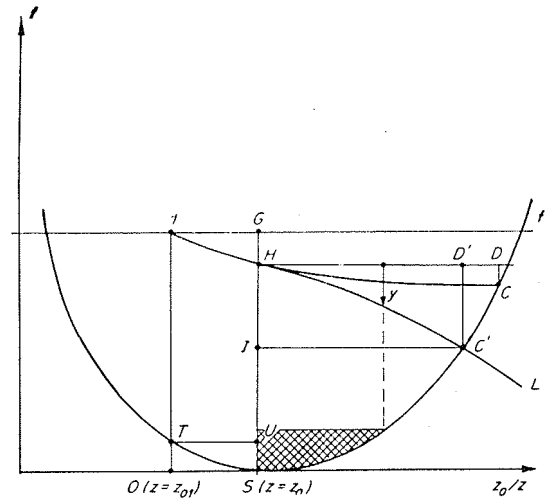


FIG. 12 b.

Pour obtenir la surface I C' S I, nous traçons une courbe HL dont chaque ordonnée y (abscisse x_y) est égale à ξn multiplié par la surface limitée par :

la courbe f ,

la verticale $z_0/z = 1$,

l'horizontale passant par l'intersection de $x = x_y$ avec f .

Nous prolongeons cette courbe jusqu'en C', intersection de HL et de f .

Nous disons que $D'C' < DC$ (le dessin est faux);

Par définition :

DC mesure à l'échelle ξn la surface H S C H,

$D'C'$ mesure à l'échelle ξn la surface I C' S I.

Or, la surface I C' S I est une partie de la surface H C S H, elle est donc nécessairement plus petite; il faut par suite que $D'C' < DC$, c.q.f.d.

L'amortissement fictif obtenu à l'aide des cour-

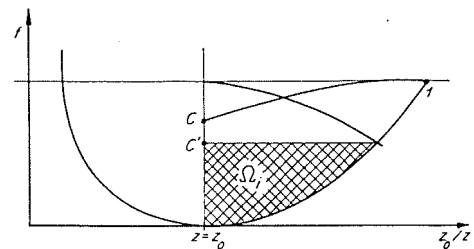


FIG. 13.

bes HL sera toujours inférieur à l'amortissement réel.

Analysons à présent l'oscillation « retour » entre la pression minimum et l'état $z_0/z = 1$. La

figure 13 représente la surface de dissipation réelle C I S C et la surface de substitution Ω_i . A l'aide de ce dessin qui est faux, le lecteur refera facilement une démonstration analogue à celle faite pour l'oscillation « aller » et qui prouve que le point C doit être situé au-dessus de C.

L'approximation se fait par suite toujours dans le sens de la sécurité.

Nous pouvons à présent calculer les différentes surfaces.

a) Position du point H (fig. 12 b) :

$$SH = OT + T1 - \xi n \times \text{surface (T I G U T)}$$

$$OT = f_{01} = \frac{z_0}{z_0 + \xi z_0} - 1 - \ln \frac{z_0}{z_0 + \xi z_0}$$

$$T1 = \frac{1}{n}$$

$$\text{Surface (T I G U T)} = TI \times OS.$$

$$OS = 1 - \frac{z_0}{z_0 + \xi z_0} = 1 - \frac{1}{1 + \xi} = \frac{\xi}{1 + \xi}$$

$$SH = \frac{1}{1 + \xi} - 1 - \ln \frac{1}{1 + \xi} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cdot \frac{\xi}{1 + \xi} \cdot \xi n$$

$$= -\frac{\xi}{1 + \xi} - \frac{\xi^2}{1 + \xi} + \ln(1 + \xi) + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} - \xi + \ln(1 + \xi)$$

ou en développant en série :

$$SH = \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{6} \xi^3 - + \dots$$

on a, avec une approximation suffisante :

$$SH = \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \xi^2$$

b) Calcul des surfaces Ω_i .

Appelons x_i l'une des abscisses correspondant à la valeur f_i de la fonction :

$$f = z_0/z - 1 - \ln z_0/z \equiv x - 1 - \ln x$$

et calculons la surface Ω_i comprise entre l'horizontale $f = f_i$, la verticale $z_0/z = 1$ et la courbe représentative de la fonction f .

Posons, pour simplifier l'écriture :

$$x = z_0/z$$

Pour les valeurs $x_i > 1$, on aura :

$$\Omega_i = f_i(x_i - 1) - \int_1^{x_i} f dx$$

On trouve, en faisant les calculs :

$$\Omega_i = \frac{1}{2} (x_i - 1)^2 - f_i \quad \text{pour } x_i > 1$$

$$\Omega_i = f_i - \frac{1}{2} (x_i - 1)^2 \quad \text{pour } x_i < 1$$

Le tableau ci-dessous donne les différentes valeurs de Ω_i .

z/z_0	x	$\frac{(x-1)^2}{2}$	f	Ω
0,2	5	8	2,3906	5,6094
0,3	3,333	2,7	1,1303	1,5697
0,4	2,5	1,125	0,58371	0,5413
0,5	2	0,5	0,3068	0,1932
0,6	1,666	0,222	0,1559	0,0661
0,7	1,43	0,0925	0,0719	0,0206
0,8	1,25	0,0313	0,0269	0,0042
0,9	1,111	0,00615	0,0057	0,00045
1,0	1	0	0	0
1,1	0,91	0,00405	0,0044	0,00035
1,2	0,834	0,0138	0,0156	0,0018
1,3	0,77	0,0264	0,031	0,0052
1,4	0,714	0,0409	0,0509	0,0100
1,5	0,666	0,0555	0,0722	0,0167
1,75	0,573	0,0915	0,1310	0,0395
2	0,500	0,125	0,1931	0,0681
2,5	0,400	0,18	0,31629	0,1363
3	0,333	0,221	0,43195	0,2109
4	0,25	0,28	0,6363	0,3563
5	0,2	0,32	0,8094	0,4894
6	0,167	0,347	0,9584	0,6114
7	0,143	0,368	1,093	0,725

Les courbes du diagramme 2 représentent à l'échelle la fonction de dissipation $E = \xi n \Omega$ et sont tracées avec les valeurs :

$$\xi n = 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5 \quad 1.$$

Pour d'autres valeurs de ξn , une interpolation linéaire entre ces courbes est nécessaire. Le diagramme 2 permet ainsi un calcul immédiat de l'amortissement.

(B 12). Détermination de la période d'oscillation.

On peut encore établir des courbes donnant la période, mais cette fois-ci à la fois en fonction de n et de ξ .

Les calculs peuvent être conduits comme sous A 12, seulement l'équation (10) devra être remplacée par les relations (38) et (51). On obtiendra comme résultat un tableau à deux entrées, donnant pour chaque couple de valeurs ξ et n la valeur de la période sous la forme :

$$\frac{w_0 s}{V_0} T.$$

Ces calculs sont extrêmement laborieux et l'auteur les abandonne à ceux qui désireront peut-être un jour s'en charger.

(B 2). *Le château d'eau est alimenté par le haut.*

Dans ce cas, on peut encore établir une formule rigoureuse pour la dissipation d'énergie. Il suffit pour cela d'ajouter à l'intérieur de la parenthèse de (46) le terme tenant compte de la diminution de l'énergie potentielle et d'intégrer comme sous B 11. On obtiendra encore une expression très peu maniable.

III. — REMARQUES COMPLÉMENTAIRES

Coup de béliet dans une conduite alimentant un château d'eau « par le haut », compte tenu de la perte de charge de cette conduite.

Nous ferons ce calcul par la méthode de M. BERGERON et nous supposons que le lecteur en connaît le principe.

Pour rendre l'exposé plus concret, nous l'appliquons directement à un cas déterminé :

Long ^r de la conduite..	L = 8.000 m
Diamètre de la conduite	∅ = 600 mm
Débit initial.....	1.500 m ³ /h = 0,418 m ³ /s
Perte de charge.....	26,2 m
Hauteur statique en bout de conduite....	63,8 m
Hauteur manométrique de refoulement.....	90 m

Nous supposons (voir fig. 14) :

- a) Qu'un clapet de retenue se trouve au refoulement de la pompe et que ce clapet retombe instantanément sur son siège lors de l'arrêt de la pompe;
- b) Que toute la perte de charge est concentrée en un point situé entre B et l'orifice de refoulement de la conduite. Cette hypothèse (voir L. BERGERON, « Du coup de béliet en hydraulique au coup de foudre en électricité », page 91), conduit à des résultats exacts aux lieux A et B, mais non en un point quelconque de la conduite.

Sur le bergeron et pour les débits positifs, la caractéristique de B est la parabole de sommet Q = 0, h = 63,8 m et passant par le point Q = 1.500 m³/h, h = 90 m.

Pour les débits négatifs, B est également sur une parabole antisymétrique de la précédente, mais dont l'ordonnée du sommet diminue avec le temps.

Pour aller vite, on procédera comme indiqué au chapitre premier; une nouvelle justification théorique nous semble inutile.

Une théorie en tout point semblable à celle établie dans ce chapitre pour les réservoirs d'air peut être développée pour tout mouvement oscillatoire, dont l'équation est du type :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)_s^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \Pi(x) - \int A \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dx$$

notamment pour les conduites munies d'une cheminée d'équilibre.

Ceci étant posé, admettons que la célérité de l'onde soit de :

$$a = 1.120 \text{ m/s}$$

et choisissons le parcours de A vers B comme unité de temps, soit :

$$\frac{L}{a} = \frac{8.000}{1.120} = 7,15 \text{ s}$$

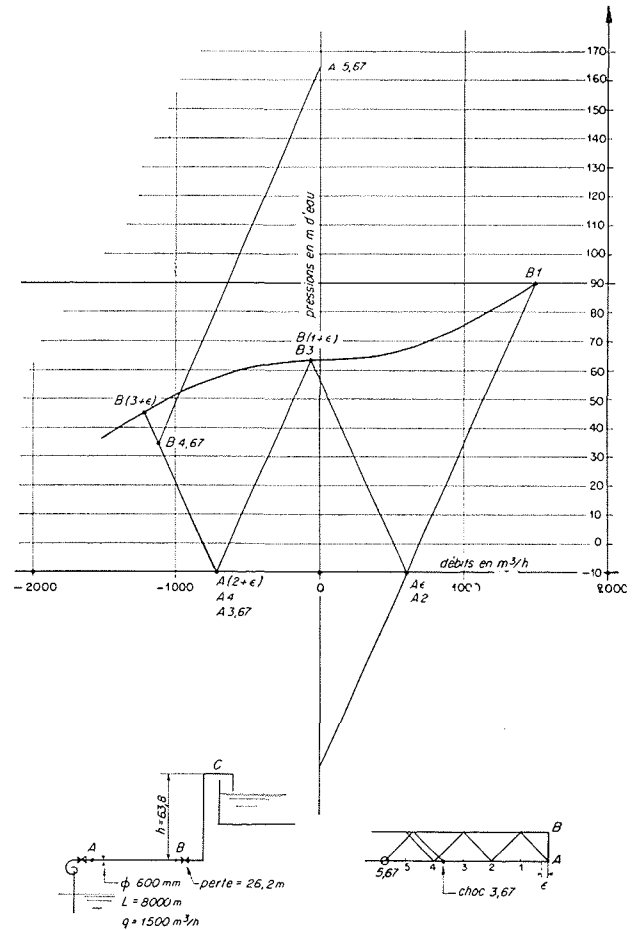


FIG. 14.

Nous comptons les temps à partir de l'instant où la pompe s'arrête ($t = 0$).

Le point initial du bergeron (régimes en A antérieurs au temps 0, régimes en B antérieurs au temps 1) aura comme coordonnées 1.500 m³/h et 90 m. Ce point est coté B. 1 (voir fig. 14).

L'onde partie de A au temps 0 se réfléchit en B au temps 1 et évolue suivant la droite « inverse » B. 1 - A. 2 d'inclinaison :

$$\frac{h}{Q} = \frac{a}{gs} = \frac{1.120}{9,81 \times 0,262} = 405$$

L'intersection de la droite B. 1 - A. 2 avec la caractéristique de A au temps 2 ($h = -10$ m) détermine A. 2.

De même, l'onde partie de B au temps $-1 + \varepsilon$ (ε très petit) détermine A ε qui coïncide avec A. 2.

L'onde partie de A au temps ε évolue suivant la droite « directe » A ε - B (1 + ε), symétrique de la droite « inverse ». L'intersection de cette droite avec la caractéristique de B détermine B (1 + ε). La caractéristique de B au temps 1 + ε est la parabole de sommet + 63,8.

On constate que le débit en B passe au temps 1 instantanément de + 1.500 m³/h à - 60 m³/h. B. 3 se trouve également sur la droite A ε - B (1 + ε), mais la caractéristique de B. 3 n'est plus la même que pour B (1 + ε).

La nouvelle caractéristique est une parabole obtenue en déplaçant la parabole primitive parallèlement à l'axe des pressions, de façon qu'elle coupe la droite A ε - B (1 + ε) au point B. 3 dont le débit q_f est donné par l'expression :

$$-\frac{\Delta t}{s} = \frac{a}{gs} \ln \frac{q_f}{q_i} + 2 \frac{z}{q_0^2} (q_f - q_i)$$

qui s'établit comme suit :

Ecrivons (fig. 14) qu'à l'instant t le débit, à travers l'étranglement de C vers B, est q et qu'il détermine une perte de charge :

$$h - h' = z \left(\frac{q}{q_0} \right)^2 \quad (1)$$

h étant la hauteur du plan d'eau dans la partie verticale de la conduite;

h' la pression en m d'eau en B.

Sous l'effet du débit q , le niveau h diminue en dt seconde de :

$$dh = -\frac{q}{s} dt \quad (2)$$

h' et q sont d'autre part reliés par la loi d'onde

droite : A ε - B (1 + ε); $q = \frac{gs}{a} (h' - h'_{q=0})$ (3)

En dérivant (1), on a :

$$dh - dh' = 2q \frac{z}{q_0^2} dq \quad (4)$$

En dérivant (3), on a :

$$dq = \frac{gs}{a} dh' \quad (5)$$

En éliminant dans (4) dh et dh' à l'aide de (2) et (5), on trouve :

$$-\frac{q}{s} dt - \frac{a}{gs} dq = 2q \frac{z}{q_0^2} dq$$

En divisant les deux membres par q :

$$-\frac{dt}{s} = \frac{a}{gs} \frac{dq}{q} + 2 \frac{z}{q_0^2} dq$$

En intégrant entre les états initial et final :

$$-\frac{\Delta t}{s} = \frac{a}{gs} \ln \frac{q_f}{q_i} + 2 \frac{z}{q_0^2} (q_f - q_i) \quad (6)$$

qui n'est autre que l'équation cherchée.

NOTATIONS :

Δt = intervalle de temps B (1 + ε) = B. 1 à B. 3 pendant lequel le niveau de l'eau baisse dans la partie verticale de la conduite = $2 \times 7,15 = 14,3$ s.

$z = 26,2$ m (perte de charge) $q_0 = 1.500$ m³/h (débit de référence de z).

$a = 1.120$ m/s²

$g = 9,81$ m/s²

$s = \varnothing 600 = 0,282$ m²

(voir plus haut).

$q_i =$ débit au temps (1 + ε) = 1,

soit 60 m³/h = $\frac{1}{60}$ m³/s,

et (1) s'écrit :

$$-\frac{14,3}{0,282} = 405 \ln 60 q_f + 300 \left(q_f - \frac{1}{60} \right)$$

on obtient :

$q_f = \frac{1}{68}$ m³/s = 53 m³/h; débit en B à l'instant 3.

Entre les instants 1 + ε et 3, le débit en B n'aura presque pas varié. A l'échelle du dessin B (1 + ε) et B. 3 coïncident, il en est de même des droites « inverses » B (1 + ε) - A (2 + ε) et B. 3 - A. 4.

Nous interprétons ce bergeron en disant qu'au lieu A il se forme une cavité au temps ε (voisin de zéro) et que cette cavité grandit entre les temps ε et 2 en augmentant de 600 m³ par

heure (= débit de A ε). A partir du temps 2, cette cavité diminue de 720 m³ par heure.

L'image simplifiée que nous nous faisons du phénomène est la suivante : la veine liquide « casse » en A au temps 0 et le « bout » de cette veine s'éloigne de A de façon à augmenter le volume de la cavité comprise entre le clapet de retenue et le « bout » de la veine. Puis le mouvement du « bout » de la veine s'inverse, et au temps X la veine touche de nouveau le clapet; à partir de cet instant, la pression en A monte, c'est l'instant dangereux du coup de bélier.

D'après ce qui précède, l'instant X du « contact » sera donné par :

$$600(2 - 0) = 720(X - 2)$$

$$X = 3,67.$$

A cet instant, une onde part de A, elle arrivera en B au temps 4,67. Pendant ce parcours, les débits et pressions de l'onde sont caractérisés par la droite « directe » issue de A 3,67 = A (2 + ε).

En appliquant le raisonnement qui nous a conduit à B. 3, nous cherchons d'abord B (3 + ε) qui est situé sur A (2 + ε) — B (3 + ε) et sur la caractéristique de B. 3, ensuite nous appliquons à nouveau (6) afin d'obtenir B 4,67; on a :

$$q_i = 1.220 \text{ m}^3/\text{s} = 0,34 \text{ m}^3/\text{s} \text{ [débit de B (3 + ε)]}$$

$$\Delta t = (4,67 - 3) 7,15 = 11,92 \text{ s}$$

d'où :

$$-\frac{11,92}{0,282} = 405 \ln \frac{q_f}{0,34} + 300(q_f - 0,34)$$

on trouve :

$$q_f = 0,313 \text{ m}^3/\text{s} = 1.130 \text{ m}^3/\text{h}$$

Le point B. 4,67 est ainsi déterminé.

L'onde réfléchie en B. 4,67 revient vers A où le débit est toujours nul et y fait monter la pression. L'amplitude maximum du coup de bélier est déterminée par le point A. 5,67, intersection de la caractéristique de A à cet instant (Q = 0) avec la loi de l'onde B. 4,67 — A. 5,67.

Dans le cas qui nous occupe, cela conduit à une surpression de 7,5 kg/cm² qui se fera sentir 5,67 × 7,15 = 40,5 s après l'arrêt de la pompe.

Dans certaines applications, les points B (1 + ε) et B. 3 sont assez écartés. Cet écart s'amplifie encore pour les points A (2 + ε) et A. 4.

Dans un tel cas, on calculera soit par points, soit à l'aide d'une valeur moyenne, ce qui donne généralement une précision suffisante.

