

# Comportement et stabilité des régulateurs contenant des éléments à caractéristique non linéaire

(Précédé d'un aperçu de la méthode de Nyquist et des méthodes dérivées  
appliquées à l'hydraulique.)

## Behaviour and stability of governors with elements of non-linear characteristics

(Preceded by an outline of the Nyquist method and methods derived from it applied to hydraulics.)

PAR R. MEYER

INGÉNIEUR AUX ÉTABLISSEMENTS NEYRPIG (GRENOBLE)

*Analyse des installations de régulation et définition des termes employés. Théories et méthodes d'étude des régulateurs à éléments linéaires.*

*Ceci constitue une introduction à l'étude du comportement des installations automatiques en hydraulique.*

*On se contente habituellement d'étudier des équations différentielles linéaires. Effectivement, les systèmes linéaires constituent, dans certains cas, une première approximation que l'on a alors intérêt à examiner en premier lieu à cause de sa grande simplicité et du fait qu'elle est parfois suffisante.*

*Si cette approximation est impossible ou si elle s'avère insuffisante, il convient de revenir aux bases physiques, afin de prendre en considération ce que la linéarisation conduit à négliger. L'auteur commence par l'étude, à partir de leur base physique, des systèmes dans le domaine linéaire. Cette étude, déjà intéressante en elle-même, sert d'introduction à une étude beaucoup plus générale qui doit être publiée ultérieurement.*

*Governors and governing study methods. Analysis of governing installations and definition of terms used. Theories and study methods of linear element governors.*

*This forms an introduction to the study of the behaviour of automatic, hydraulic installations. It is usual to study but the differential linear equations. In some cases, linear systems do indeed form a first approximation which it is wise to examine from the start, given its great simplicity and the fact that it is sometimes sufficient.*

*If it is not possible to make this approximation, or if it proves to be insufficient, the physical bases should be reverted to, in order to take into consideration that which linearization excludes.*

*The authors first studies the linear type systems, starting from their physical bases. This study, which is itself of great interest, serves as an introduction to a far more general investigation to be published at a later date.*

### SOMMAIRE

#### I. — INTRODUCTION.

#### II. — LES RÉGULATEURS ET LES MÉTHODES D'ÉTUDE DE LA RÉGULATION.

- II-1. — Ce qu'on demande à un régulateur.
- II-2. — Les installations automatiques et les méthodes d'étude de la régulation.
- II-3. — Avantages spécifiques de la méthode de NYQUIST et des méthodes dérivées.

#### II-4. — Cas où les méthodes de HURWITZ-ROUTH sont intéressantes.

#### III. — DESCRIPTION DES INSTALLATIONS DE RÉGULATION ET DÉFINITION DES TERMES EMPLOYÉS.

- III-1. — Description de deux installations industrielles simples.
- III-2. — Les différents régulateurs employés.
- III-3. — Décomposition des éléments des boucles de régulation.

III-4. — Les quadripôles généralisés.

III-5. — Etude des éléments des boucles de régulation.

III-6. — Les comparateurs (ou discriminateurs).

#### IV. — THÉORIES ET MÉTHODES D'ÉTUDE DES INSTALLATIONS AUTOMATIQUES A ÉLÉMENTS LINÉAIRES.

IV-1. — Méthodes d'HURWITZ-ROUTH, LÉONHARD, etc...

IV-2. — Méthode de NYQUIST.

IV-3. — Systèmes à minimum de phase.

IV-4. — Les installations automatiques en tant qu'intégrateurs.

(Seuls, ces quatre premiers chapitres sont publiés dans le présent numéro.)

#### V. — ÉTUDE DES INSTALLATIONS A ÉLÉMENTS NON LINÉAIRES. EXTENSION DU CRITÈRE DE NYQUIST. LIMITES DE L'EXTENSION.

V-1. — L'étude se limite aux installations automatiques industrielles.

V-2. — Description des installations non li-

néaires et légitimation de la méthode employée.

V-3. — Différence entre éléments linéaires et non linéaires.

V-4. — Stabilité des cycles limites.

V-5. — Emploi pratique de la méthode.

#### VI. — EXEMPLES.

VI-1. — Cas élémentaires où les résultats sont connus par méthode directe.

— Régulateur direct de niveau avec jeu et adduction par une conduite courte.

— Régulateur à tout ou rien avec adduction à coups de béliet de masse.

VI-2. — Cas solubles uniquement par la méthode de NYQUIST généralisée.

— Régulateur par tout ou rien et coups de béliet d'onde dans l'adduction.

— Régulateur par tout ou rien et cheminée d'équilibre.

— Régulateur à vitesse proportionnelle à l'écart avec jeu et installation avec coup de béliet.

#### VII. — RÉSUMÉ FINAL ET CONCLUSIONS.

## I. — INTRODUCTION

Depuis les années d'après-guerre, le problème de la régulation a fait l'objet de nombreuses publications et tout particulièrement dans *la Houille Blanche* qui a facilité le dialogue entre les spécialistes en la matière. Ces derniers avaient surtout en vue de préciser les notions de stabilité d'un régulateur automatique de vitesse d'une turbine hydraulique et de définir les conditions optimum de réglage de la fréquence des réseaux de distribution électrique. Mais en hydraulique la régulation ne se limite pas à ce simple cas, et c'est là l'excuse que nous alléguerons pour oser revenir sur cette question. En effet, le récent développement des grands réseaux d'irrigation, où il convient de régler débits et niveaux, a conduit les techniciens à concevoir des appareils automatiques (vannes, obturateurs, etc.) qui, placés dans l'ensemble maillé d'une surface irriguée, doivent coordonner leur fonctionnement et contribuer ainsi à la stabilité de marche du réseau. De même encore les Laboratoires d'Hydraulique par nécessité d'une précision toujours plus grande dans les mesures, font très souvent appel à des systèmes à commande indirecte asservie, que peuvent soulever des problèmes de régulation fort complexes.

Aussi, pour la commodité de notre discours, nous désignerons les différents appareils auxquels nous venons de faire allusion (régulateur de turbine, vannes et obturateurs automatiques, etc.) sous le vocable général de « régulateurs hydro-

liques ». Cependant, que l'on ne s'y trompe pas, cette dénomination unique rappelant le but commun de ces appareils (réglage d'une grandeur physique) cache la grande diversité de leur structure et si les régulateurs de turbines hydrauliques évoquent à l'esprit des lecteurs un dispositif suffisamment bien défini, les systèmes mis en jeu aussi bien pour l'irrigation que pour les mesures restent trop divers pour les résumer par un schéma de principe unique; corrélativement on conçoit donc que leur régulation soit souvent fort complexe et surtout constitue chaque fois un cas particulier à examiner attentivement.

Aussi, pour mettre de l'ordre dans notre étude, serons-nous amenés à classer ces systèmes en tenant compte des difficultés plus ou moins grandes que soulève théoriquement leur régulation.

Nous distinguerons donc essentiellement les systèmes « linéaires » et les systèmes « non linéaires » dont les définitions seront précisées dans le corps de notre article. Dans l'état actuel de la théorie, pour les premiers seuls il est possible de déterminer d'une manière précise les relations auxquelles ils doivent satisfaire dans les divers cas envisagés. Plusieurs méthodes sont utilisées; les unes purement mathématiques, comme celle d'HURWITZ-ROUTH, permettent d'obtenir un résultat général de forme simple, extrêmement précieux pour contrôler rapidement la stabilité d'une installation; cet avantage a rendu d'ailleurs courante leur utilisation. D'autres,

apparentées à la méthode de NYQUIST, font appel à des considérations graphiques; elles ont été jusqu'à présent moins connues des ingénieurs hydrauliciens, mais nous pensons que l'avenir leur rendra justice car elles sont susceptibles d'extension et par là peuvent devenir un guide fort utile pour l'étude des problèmes « non linéaires ».

L'une de ces extensions constitue l'objet principal de notre exposé; nous avons en effet profité des particularités spéciales des systèmes de régulation industrielle pour calculer leur stabilité et éventuellement leur cycle limite de pompage. Ces particularités sont évidemment des restrictions du point de vue des systèmes phy-

siques en général, mais non du point de vue des régulateurs hydrauliques qui seuls nous intéressent. Certes, nous serons conduits à consentir également certaines approximations, mais nous ne le ferons qu'après les avoir justifiées pour tous les problèmes que nous avons en vue.

Chemin faisant, nous ferons quelques digressions pour rappeler certaines définitions et comparer les méthodes entre elles; que l'on nous pardonne ces redites, mais il nous a paru plus agréable de bien préciser les termes employés et les théories utilisées afin d'éviter tout malentendu entre nous et de ne pas lasser l'attention de nos lecteurs par un texte trop concis et par là trop elliptique.

## II. — LES RÉGULATEURS ET LES MÉTHODES D'ÉTUDE DE LA RÉGULATION

### II-1. — Ce qu'on demande à un régulateur.

Un régulateur est employé pour régler une grandeur à une valeur donnée à l'avance, en agissant sur le système à régler.

*Exemple :* dans un modèle réduit, on se propose de reproduire une loi de marée : hauteur d'eau en fonction du temps :  $h = h(t)$ . On peut agir sur le débit entrant dans le modèle (fig. 1).

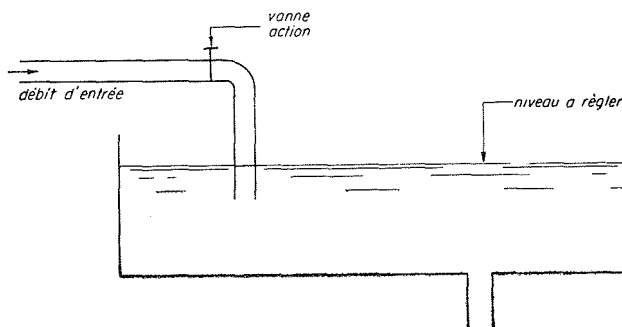


FIG. 1. — Schéma (simplifié à l'extrême) d'une installation à niveau réglé.

Souvent le problème consiste à maintenir une grandeur à une valeur constante.

*Exemple :* la fréquence d'un réseau électrique.

Malheureusement, il n'existe pas de régulateur permettant d'obtenir un réglage parfait : le régulateur n'agit que s'il détecte une erreur de réglage; sans erreur, pas d'action possible du régulateur. D'ailleurs, très souvent, on ne recherche aucunement un réglage parfait (surtout en hydraulique). Dans une installation hydro-électrique, ou dans une installation d'adduction d'eau, un réglage parfait provoquerait des coups

de bélier funestes dans les conduites et galeries d'amenée d'eau. Bien d'autres causes peuvent rendre désirable la limitation de la précision; ainsi, un correcteur de niveau pour modèle réduit (voir fig. 1) ne doit pas « essayer de corriger » les fluctuations turbulentes ou les rides et vagues superficielles dues à l'agitation désordonnée du plan d'eau (on verra plus loin ce qu'on attend de lui).

La question centrale de la régulation est donc la précision. Or, la précision n'est pas une propriété bien définie et ne peut pas être caractérisée dans tous les cas par une seule grandeur. Nous allons voir que, selon l'emploi du régulateur, différentes définitions peuvent être adoptées.

Ainsi, pour le correcteur de niveau dont il a été question plus haut, on peut définir une précision en fonction de la fréquence. Une perturbation sinusoïdale établie en régime permanent :  $A \cos \omega t$ , ne doit pas donner naissance à une erreur plus grande que  $\varepsilon A \cos(\omega t + \varphi)$ . Dans le cas qui nous intéresse,  $\varepsilon(\omega)$  doit avoir une allure comparable à la figure 2.

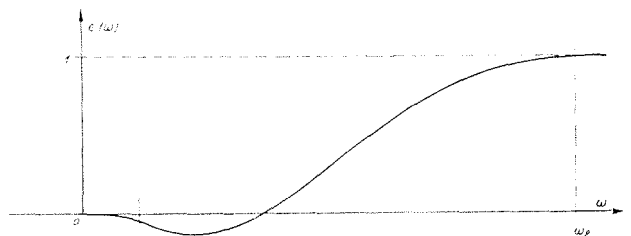


FIG. 2.

Si  $\omega \rightarrow 0$ , il faut que  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour que le niveau moyen soit correct. De plus, la marée dont la période fondamentale est  $\omega_1$  doit être reproduite correctement (avec, par exemple, 5 premières

harmoniques). A la fréquence  $\omega = \omega_2$  qui correspond à l'ordre de grandeur de la fréquence d'agitation générale du modèle, le régulateur ne doit plus répondre : l'erreur est égale à la perturbation.

On peut définir bien d'autres grandeurs caractérisant la précision. Par exemple, on peut essayer de minimiser (de différentes manières d'ailleurs) l'erreur que commet le système s'il est soumis à une perturbation accidentelle de forme donnée.

La figure 3 en montre un exemple.

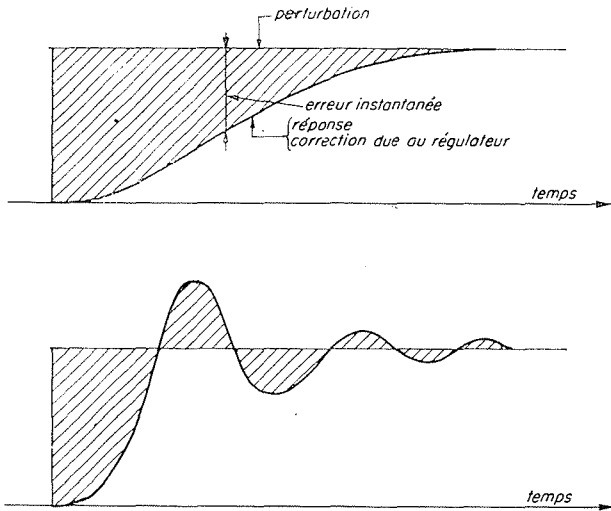


FIG. 3.

On peut chercher à minimiser la surface hachurée et définir un temps de réponse : « aire hachurée » divisée par « hauteur de la perturbation ».

Pour de plus amples discussions à ce sujet, on peut voir les références<sup>1</sup> : [21] [34] [39] [41] [42] [49] [52] [54].

Bien que la précision ne soit pas définie d'une façon unique, on peut quand même classer les installations automatiques, en hydraulique, *grosso modo* de la façon suivante, en ce qui concerne la précision demandée :

*Très grande précision* : appareils de réglage de modèles réduits et appareils de mesures.

*Bonne précision moyenne* : réglage fréquence-puissance des réseaux électriques.

*Précision plus faible* : appareillages automatiques d'irrigation et adduction d'eau.

Néanmoins, il existe un critère toujours nécessaire pour qu'on puisse parler de précision (quelle

que soit la définition qu'on en donne) : il faut que l'installation automatique envisagée soit suffisamment stable. Ceci veut dire qu'à l'intérieur du champ de fonctionnement du système l'erreur *en régime établi* doit être inférieure à une valeur donnée jugée admissible<sup>2</sup>.

La stabilité n'est qu'un cas particulier de la précision : c'est la précision quand depuis longtemps il n'y a plus eu de perturbations (voir fig. 4) :

Si «  $a$  » est suffisamment petit, on dit que la stabilité est suffisante.

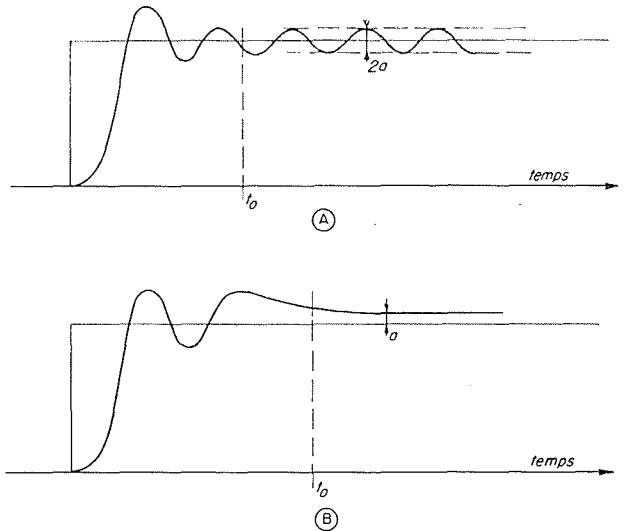


FIG. 4.

A partir du temps  $t_0$  après une perturbation (échelon unité) le système considéré en 4 A oscille avec une amplitude pratiquement constante et égale à «  $a$  », celui en 4 B a une erreur constante égale à «  $a$  ».

Il est à remarquer, que jusqu'à présent, à peu près tous les auteurs définissent la stabilité par  $a = 0$ . Ceci provient du fait qu'ils n'étudient que les systèmes dits « linéaires » (voir définition plus loin) et revient à étudier, en première approximation (linéarisation) certaines installations. Il est clair que, d'une façon générale, on n'a pas besoin d'annuler complètement «  $a$  » (voir, par exemple, [52] — linéarisation par balayage). D'ailleurs, il n'est jamais possible d'annuler «  $a$  » en toute rigueur.

En dehors de la stabilité qui est caractérisée par «  $a$  », on cherche souvent la loi suivant laquelle le système perturbé tend vers son régime d'équilibre, loi permettant de définir ce que l'on appelle le degré de stabilité [52]. Cette loi n'est pas unique (sauf pour les systèmes linéaires).

2. On sait que pour les systèmes linéaires (les seuls étudiés jusqu'ici), la stabilité exige entre autre la « constance dans le temps » pour  $t \rightarrow \infty$ . On est obligé, ici, d'élargir le sens.

1. Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie à la fin de l'article.

Elle est liée à la précision dynamique qui, elle non plus, n'est pas susceptible d'une définition unique.

Pour qu'une installation automatique soit acceptable, il faut qu'elle tende très rapidement vers le régime établi; néanmoins, d'autres considérations de précision peuvent intervenir [40].

Dans cet article, nous allons surtout nous intéresser à la stabilité et à la précision des installations automatiques.

Toutefois, il convient de ne pas perdre de vue que les régulateurs ont souvent des fonctions annexes très importantes, par exemple la limitation des coups de bélier dans les conduites forcées et galeries des installations hydro-électriques ou d'adduction d'eau (et d'une façon plus générale l'actionnement de divers dispositifs de sécurité).

## II-2. — Les installations automatiques et les méthodes d'étude de la régulation.

Les installations automatiques se composent d'une façon générale de l'installation à régler (par exemple ce qui est représenté sur la figure 1) et du régulateur [53]. Dans la littérature allemande, on trouve les termes « Regels-trecke » et « Regler ». Le régulateur est donc un appareil qui sert à régler au mieux une installation donnée.

Selon la complexité du système à régler et la précision demandée, le régulateur sera plus ou moins compliqué et la méthode d'étude de la régulation devra être plus ou moins puissante.

A notre connaissance, les méthodes suivantes ont été employées en hydraulique :

1. Méthode directe, appliquée dans [45] [50].
2. Méthode d'HURWITZ-ROUTH et ses généralisations, décrites dans [21] [33] [42] [44] [45] [46] [47], appliquées dans [1] [2] [3] [4] [5] [22] [24] [31] [35] [58].
3. Méthode de LÉONHARD et ses généralisations décrite dans [42] [47], appliquée dans [42] et au cours de plusieurs études NEYR-PIC non publiées.
4. Méthode de NYQUIST appliquée dans [5] [16] [18] [19] [21] [29] [32].

Une méthode intéressante a été mise au point par M. NASSE [53]; elle met en évidence la division du système automatique en système à régler et régulateur.

De plus, il existe différentes méthodes dérivées de celle de NYQUIST et différentes améliorations qui sont employées par les electriciens [52]. Nous les décrirons plus loin. Il existe également

d'autres méthodes moins connues comme celles dites « des séparatrices » [38] <sup>1</sup>.

Toutes ces méthodes, sauf les méthodes directes, s'appliquaient jusqu'à présent uniquement aux systèmes dits « linéaires ». Une partie des systèmes hydrauliques peuvent être considérés comme tels en toute première approximation.

En ce qui concerne les systèmes non linéaires seuls quelques cas particuliers très élémentaires (et par conséquent n'ayant pas de grandes applications pratiques) ont pu être étudiés jusqu'à ces derniers temps [51] [59]. Récemment, une méthode plus puissante a été mise au point (séparément) par M. KOCHENBURGER et M. DUTILH [27] [36]. Nous nous proposons de décrire et de justifier une méthode plus générale permettant de traiter tous les cas que nous connaissons <sup>2</sup>.

La comparaison des différentes méthodes s'appliquant aux systèmes linéaires est très délicate. M. CUÉNOD écrit [10] en parlant de « certaines méthodes nouvelles » (il parle de la méthode NYQUIST) :

« 1. Elle permettent de traiter des cas où la méthode classique d'HURWITZ conduirait à des calculs inextricables, sinon impossibles à effectuer, en remplaçant les développements mathématiques par une construction graphique ou semi-graphique.

« 2. Elles permettent de se faire une représentation très concrète des phénomènes dynamiques intervenant dans les problèmes de réglage.

« 3. Elles facilitent le calcul des variations de la grandeur à régler résultant d'une perturbation du dispositif de réglage. »

Il est à remarquer que M. CUÉNOD ne se sert pratiquement pas des dernières améliorations de la méthode de NYQUIST (il est vrai que la régulation des turbines en fréquence-puissance fait *toujours* intervenir des systèmes « non à minimum de phase » <sup>3</sup>, néanmoins, on peut souvent facilement tenir compte d'un déphaseur pur connu).

Personnellement, nous pensons que la méthode de NYQUIST est, dans beaucoup de cas, la meilleure.

1. Physiquement, cette méthode se confond très rapidement avec celle de Nyquist : on teste le système avec des excitations sinusoidales. Elle ne présente néanmoins pas tous les avantages physiques de cette dernière; par contre, il semblerait qu'elle se prête mieux à certains calculs.

2. Nous avons appris récemment, au cours d'une conférence que M. LÖEB a tenue à Grenoble le 25 avril 1951, que celui-ci a fait des recherches dans la même direction. Nous avons aussi appris par la suite qu'il a publié un article dans les *Annales des Télécommunications* de décembre 1951.

(N.D.L.R. — Ce manuscrit de M. MEYER nous a été remis en octobre 1951.)

3. Voir plus loin la définition.

leure. Elle est, jusqu'à présent, la seule applicable aux systèmes non linéaires. Néanmoins, pour les systèmes simples et pour une première étude (linéarisation), la méthode d'HURWITZ-ROUTH est souvent aussi bonne (ou même meilleure). Cela dépend essentiellement de l'entraînement de l'opérateur.

### II-3. — Avantages spécifiques de la méthode de Nyquist et des méthodes dérivées.

L'un des aspects les plus intéressants de cette catégorie de méthodes est leur généralité : elles permettent de traiter tous les cas qui se présentent en hydraulique (jusqu'à présent). Ainsi, on peut étudier les installations contenant des éléments siège de coups de bélier d'onde, ou d'une façon générale des éléments dont les équations sont aux dérivées partielles.

Les méthodes d'HURWITZ-ROUTH ne permettent pas de tenir compte de ces éléments. La méthode de LÉONHARD généralisée [47] ne permet pas non plus (jusqu'à présent) de tenir compte de ces systèmes, sauf s'ils sont du type « onde sans perte ».

Or, on rencontre fréquemment en hydraulique des systèmes régis par des équations aux dérivées partielles. Ce sont :

a) Les conduites « longues »<sup>1</sup>, sièges de coups de bélier.

Dans le cas des installations hydro-électriques, elles peuvent être pratiquement considérées comme appartenant au type « sans pertes » (de charge). Elles sont, par contre, très souvent à fortes pertes de charge dans les cas d'installations d'irrigation ou d'adduction d'eau.

b) Les canaux.

Les canaux sont le siège d'ondes de translation.

Les bassins « à niveau réglé » des installations d'irrigation et d'adduction d'eau doivent souvent être considérés comme des canaux courts, dans lesquels il peut y avoir des ondes. Il en est de même des modèles réduits réglés en niveau d'eau (voir figure 1)<sup>2</sup>.

c) Les liaisons élastiques.

Souvent, les tringleries, câbles, etc., ne peuvent pas être considérés comme infiniment rigides et sont suffisamment longs pour pouvoir donner lieu à des phénomènes d'ondes. Parfois même

tout un ensemble d'appareils mécaniques peut être secoué par des vibrations élastiques sans que l'on puisse localiser une pièce plus élastique que les autres.

De plus, la méthode de NYQUIST, convenablement généralisée, nous permettra d'étudier les systèmes non linéaires.

On peut classer l'ensemble de ces systèmes de la façon suivante :

a) Systèmes techniquement linéaires dans certaines limites : résistance électrique métallique ou au carbone; capacité électrique; dash-pot à huile; certains ressorts, etc...

b) Systèmes techniquement linéaires pour les oscillations infiniment petites, mais non linéaires pour les oscillations finies (même petites) : self-induction contenant du fer; conduite avec vanne; pertes de charge en régime turbulent, etc.

c) Systèmes qu'on ne peut jamais considérer comme linéaires : régulateur par tout ou rien; appareils contenant des relais; appareils ayant un jeu; appareils ayant un frottement sec; recouvrement dans les tiroirs des régulateurs, etc.

Si ces méthodes ont l'avantage de la généralité, elles permettent également de tenir compte rationnellement du comportement physique des systèmes. Pour se rendre compte de la stabilité d'une installation, on est obligé :

— Soit d'admettre que les différents organes ou appareils se comportent d'après des équations données à priori,

— Soit de « tester » un certain nombre d'entre eux et d'en déduire leur comportement.

Avec ces différentes données, on peut employer l'une des méthodes d'investigation connues.

Les méthodes d'HURWITZ-ROUTH ou de LÉONHARD ne permettent pas de se rendre compte rationnellement des approximations qu'on a le droit de faire sur les équations de départ. Ainsi, toutes les adductions d'eau sont le siège de coups de bélier d'onde; quand a-t-on le droit de négliger les ondes? Avec les méthodes autres que celles de NYQUIST, on en est réduit à une estimation « au jugé ». Cette estimation est parfois suffisante, compte tenu de l'expérience de l'opérateur.

La méthode de NYQUIST est bien plus puissante, car elle permet de connaître d'une façon exacte dans quelle mesure on a le droit de faire telle ou telle approximation au départ. Ce seul fait simplifie souvent considérablement les calculs des installations de complexité moyenne. Il permet par ailleurs l'étude d'installations inaccessibles au calcul par d'autres procédés.

Cette méthode permet aussi, pour chaque or-

1. On sait que la longueur n'est pas le seul paramètre qui intervient.

2. La vitesse des ondes dans les canaux est beaucoup plus petite que celle dans les conduites, c'est pour cela que les canaux, même courts, sont le siège d'ondes.

gane, de faire correspondre une équation déterminée à un domaine déterminé d'amplitude et de fréquence; ceci permet donc de tenir compte du comportement physique exact de cet organe. On peut également employer des données expérimentales, ce qui serait impossible par ailleurs.

*Exemple de domaine de validité* de différentes équations (plus ou moins simplifiées) pour un même organe.

Ce domaine de validité, tracé dans le plan amplitude-fréquence, est, en général, défini pour des excitations sinusoïdales (pour les cas non linéaires, on devrait tenir compte en plus d'autres excitations, mais on verra par la suite que les excitations sinusoïdales suffisent).

Pour une conduite fermée par une vanne, on peut employer les équations suivantes :

A) *Equation linéarisée à coefficients constants :*

Aa) coups de bélier en masse,

Ab) coups de bélier d'onde.

B) *Equation linéarisée à paramètre variable :*

Ba) masse,

Bb) onde.

C) *Equations non linéaires simplifiées :*

$Q = K Y \sqrt{H}$ ,

Q = débit,

H = perte de charge,

Y = ouverture de la vanne,

Ca) masse,

Cb) onde.

D) *Equations non linéarisées plus exactes :*

Da) masse,

Db) onde.

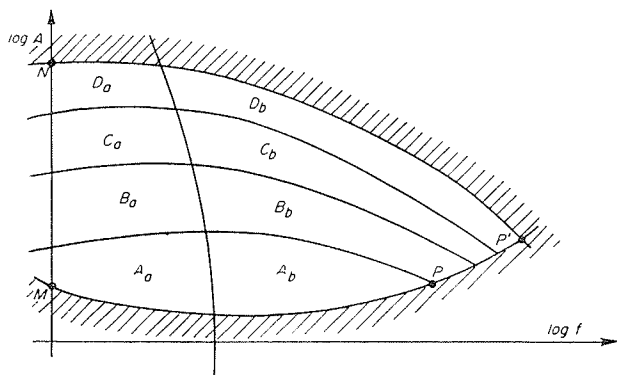


FIG. 5.

Dans le plan amplitude-fréquence, les domaines de validité (très schématiques) sont données par la figure 5.

Dans ces domaines, l'« erreur commise » (définie plus loin), ne dépasse pas une valeur donnée, connue à l'avance.

L'équation Aa est valable dans le domaine Aa.

L'équation Ba dans l'ensemble des domaines Aa et Ba, etc.

On porte sur les axes :  $\log A$  et  $\log f$  ( $A$  : amplitude —  $f$  : fréquence). Dans la région hachurée, ou bien la conduite « ne répond plus » aux excitations, ou bien il est absurde de se placer en de tels points. Les courbes ainsi tracées sont, en général, appelées courbes de WEYGEL; l'ensemble forme les citrons de WEYGEL (à cause de la forme des courbes). La courbe MP s'appelle la courbe de « seuil », la courbe NP est celle de la « saturation ».

En pratique, on assimile les « citrons » de WEYGEL à des rectangles (fig. 6).

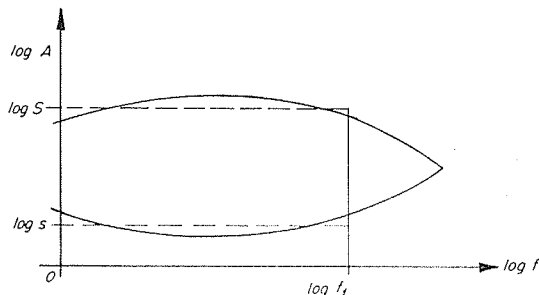


FIG. 6.

On appelle l'intervalle  $0 - f_1$  la bande de fréquence admissible ou passante;  $s$ , le seuil,  $S$ , la saturation. L'axe des «  $\log f$  » est gradué en octaves (ou décades), l'axe des «  $\log A$  » en décibels par rapport à  $s^2$ . Le nombre  $\log \frac{S}{s}$  est une constante essentielle d'un appareil. Pour un bon appareil de mesure électrique  $\log \frac{S}{s} \approx 60$  db pour une très bonne balance de chimiste 120 à 130 db<sup>2</sup>, pour un très bon moteur électrique (type ONERA) 55 db. En régulation, c'est beaucoup moins en général.

1. Une octave correspond à un rapport  $\frac{f_1}{f_2} = 2$ ;  $\log \frac{f_1}{f_2} \approx 0.3$ . De même, le nombre D en décibels est défini par  $D = 20 \log \frac{A}{s}$ . A un nombre  $\frac{A}{s} = 2$  correspond  $D = 6$ ;  $\frac{A}{s} = 5$ ,  $D = 14$ ;  $\frac{A}{s} = 10$ ,  $D = 20$ , etc.

2. Cette comparaison paraît désavantageuse pour les électriciens. En réalité, la balance est un appareil différentiel comme un pont de Wheatstone.

Dans le domaine plus limité des systèmes linéaires, la méthode de NYQUIST permet de trouver assez facilement la fréquence propre la moins amortie et la valeur de son amortissement. Elle permet aussi d'indiquer s'il existe une deuxième période propre dont l'amortissement ne serait pas beaucoup plus grand que celui de la première. En général, les systèmes de régulation ont une période propre dont l'amortissement est nettement plus faible que celui des autres. Une excitation unique produit alors un mouvement tendant très rapidement vers :

$$A e^{\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$$

où  $\lambda$  est l'amortissement le plus faible et  $\omega$  la période correspondante.

On connaît donc le degré de stabilité. Les méthodes HURWITZ-ROUTH classiques ne permettent pas de connaître l'amortissement. Leurs généralisations permettent de fixer une limite inférieure, mais les calculs sont en général beaucoup plus compliqués que l'application de la méthode d'HURWITZ ordinaire.

Pour les systèmes non linéaires, la détermination de l'amortissement reste toujours délicate, mais ceci est un fait inhérent à la nature de ces systèmes, comme on le verra plus loin. Néanmoins, la méthode de NYQUIST est à même de donner des indications très utiles.

La méthode de NYQUIST permet également de se faire facilement une idée générale de la précision du réglage et des améliorations susceptibles d'être apportées aux installations moyennement ou très compliquées.

Il faut distinguer ici quatre cas :

a) *Les systèmes linéaires à « minimum de phase »* (voir définition plus loin).

On rencontre très souvent ces systèmes quand on « linéarise » (voir plus loin) les problèmes de régulation. Ce n'est *jamais* le cas des turbines réglées en fréquence-puissance.

Pour ces systèmes, il existe une méthode d'avant-projet extrêmement simple.

b) *Les systèmes linéaires non à minimum de phase, mais contenant des déphaseurs purs simples.*

C'est le cas de beaucoup de systèmes linéarisés (en particulier en ce qui concerne la régulation en fréquence-puissance des turbines).

c) *Les systèmes linéaires non à minimum de phase et à déphaseur « compliqué ».*

C'est le cas des installations à coup de bélier d'onde par exemple.

Il faut alors avoir recours à la méthode de NYQUIST originale.

d) *Les systèmes non linéaires.*

En réalité, c'est le cas de tous les systèmes, c'est aussi le cas de beaucoup d'entre eux, même en première approximation.

Pour les cas b) et c), la méthode de M. NASSE est souvent intéressante [53].

La méthode de NYQUIST a également permis de mettre en lumière deux sortes de stabilité. On sait que certaines installations parfaitement stables sont néanmoins à déconseiller en pratique. En effet, le vieillissement des appareils ou les petits accidents (par exemple bouchage d'un tuyau d'huile, d'un régulateur) entraîne souvent une instabilité due à une diminution de l'amplification des divers organes. Grâce au diagramme de NYQUIST, on peut distinguer dans ce cas la stabilité dite « absolue » et la stabilité « théorique ». Ces termes sont consacrés par l'usage [34] [52]. Les autres méthodes ne permettent pas de définir ces notions.

Enfin, un autre avantage de la méthode de NYQUIST est sa simplicité : elle permet de décomposer les installations automatiques en éléments simples. A chaque élément est attachée une courbe. En général, ce sont les mêmes éléments combinés différemment qui servent toujours. Le nombre de ces éléments est relativement petit en hydraulique. Il suffit chaque fois de combiner les éléments qui constituent le système automatique pour connaître la stabilité et la précision. On peut donc dresser un « catalogue » d'éléments contenant les courbes caractéristiques de chaque élément (courbe de transfert, de WEYGEL, etc.).

La méthode de NYQUIST ne nécessite alors plus que des calculs simples (règles de trois) et des graphiques. Les problèmes de stabilité peuvent alors être facilement résolus par un bureau d'études. Les autres méthodes nécessitent à peu près toujours l'intervention de mathématiciens (ce qui n'est pas toujours sans inconvénients pour le technicien).

La méthode graphique est, d'ailleurs, en général, infiniment plus rapide, surtout quand il s'agit de systèmes à minimum de phase ou à déphaseur simple (systèmes dont il était déjà question plus haut).

#### II-4. — Cas où les méthodes de Hurwitz-Routh sont intéressantes.

Comme déjà signalé, il y a des cas où les méthodes d'HURWITZ-ROUTH, où même la résolution



directe d'une équation caractéristique, sont intéressantes.

Il faut, pour cela :

- a) Que le système soit linéaire;
- b) Qu'il ne contienne pas d'organe siège d'ondes;

- c) Que le degré de son équation caractéristique ne dépasse pas 4;
- d) Que les perturbations soient inconnues ou du genre « échelon unité ».

Ces cas se rencontrent en hydraulique [1] [2] [3] [4], etc.

### III. — DESCRIPTION DES INSTALLATIONS DE RÉGULATION ET DÉFINITION DES TERMES EMPLOYÉS

Les méthodes dont il est question ici (NYQUIST, BODE, etc.) sont basées sur une conception nouvelle des régulateurs. Pour les comprendre et les appliquer, il faut d'abord connaître la description des installations de régulation qui est à leur base.

Les autres méthodes connues et employées jusqu'à présent ne tenaient pas compte des particularités très grandes des installations de régulation par rapport à ce qu'on appellera les « systèmes physiques » (définis plus bas). Ces méthodes s'appliquaient à des systèmes bien plus généraux que les installations de régulation. C'est d'ailleurs pour cela qu'elles sont d'un maniement bien plus difficile et ne présentent pas les avantages cités dans le parag. II-3.

Après la description des installations qui nous intéressent, le point le plus important est l'analyse harmonique, c'est-à-dire l'étude des systèmes soumis à des excitations sinusoïdales. C'est pratiquement une extension des calculs avec nombres complexes dont se servent si souvent les électriciens (impédances complexes du genre :

$$\left( R + j \omega L + \frac{1}{j \omega C} \right)$$

La détermination de l'amortissement et de la précision met en jeu un mode de calcul analogue au calcul symbolique; le calcul symbolique n'est évidemment pas nécessaire pour la compréhension de la majeure partie de ce qui suit.

#### III-1. — Description de deux installations industrielles simples.

(Cf. fig. 7)

Ces installations sont évidemment des installations industrielles, telles qu'elles se construisent. Ce sont des « stations brise-charge » pour l'aduction d'eau des grandes villes. Rappelons, en quelques lignes, leur but et leur fonctionnement.

Pour alimenter les grandes villes en eau potable, il faut parfois chercher cette eau très loin. Admettons que cette eau soit captée dans une

grande retenue, dont le niveau est nettement supérieur à l'altitude de la ville. Ceci est, par exemple, le cas pour la ville de Tunis. Pour pouvoir distribuer l'eau à une pression convenable, on intercale sur la conduite d'aménée une station

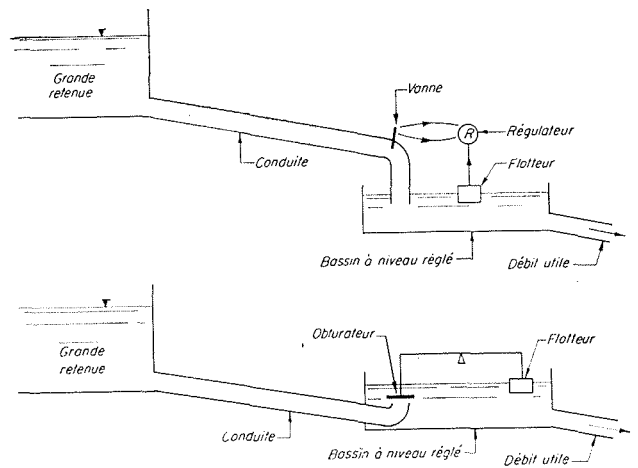


FIG. 7.

« brise-charge ». Elle doit permettre de fournir en permanence le débit demandé avec la charge imposée par un « bassin à niveau réglé » (voir figure 7). Le réglage de ce niveau se fait par un système de régulation, qui maintient le niveau pratiquement constant, quelles que soient les variations du débit demandé à l'aval.

Comment marchent ces stations brise-charge ? :

*Première station.* — Le flotteur détecte le niveau du bassin aval et le transmet au régulateur. Le régulateur manœuvre la vanne en conséquence.

Si le niveau est trop haut, la vanne se ferme et inversement.

*Deuxième station.* — Le flotteur agit directement sur un obturateur (de la même façon que plus haut).

On voit que les installations sont composées d'appareils agissant les uns sur les autres. On peut représenter ces installations d'une façon

encore plus schématique : chaque rond symbolise un appareil, les traits les joignant indiquent les actions possibles entre les appareils.

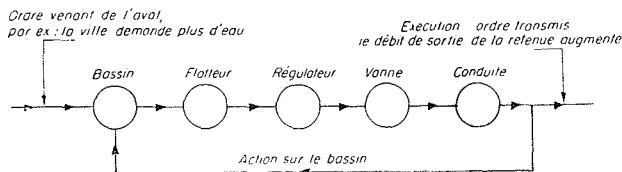


FIG. 8.

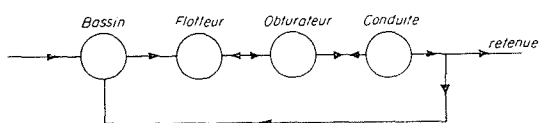


FIG. 9.

Il est très important de bien voir qu'effectivement chaque trait indique une action et qu'aucune autre action n'est possible.

Nous appellerons liaisons les actions possibles entre les appareils et symbolisées par les traits des figures 8 et 9. Nous allons étudier ces liaisons. Cette étude est absolument fondamentale pour la suite.

Remarquons d'abord qu'il y a deux sortes de liaisons entièrement différentes :

a) Les liaisons dites « sans réaction » ou encore « à sens unique » ; nous les schématiserons par un trait et une seule flèche (fig. 10).

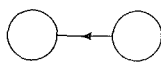


FIG. 10

Elles permettent l'action d'un appareil sur un autre, mais non inversement.

*Exemple :* Considérons les deux appareils flotteur et régulateur ; si le flotteur bouge, il fait obligatoirement marcher le moteur du régulateur. Par contre, la marche du moteur n'a aucune action directe, c'est-à-dire sans l'intervention d'un autre organe, sur la position du flotteur. (Il y a une action indirecte à travers l'ensemble du système vanne, conduite, bassin, mais pas par le trait reliant directement le flotteur au régulateur.)

C'est pourquoi le trait joignant le flotteur au régulateur n'a qu'une flèche qui indique le sens de l'action possible. De même, il y a d'autres liaisons sans réaction qui sont également indiquées par une seule flèche.

b) Les liaisons à réaction. Elles permettent l'action d'un appareil sur un autre et inversement. Nous les schématiserons par un trait et deux flèches en sens inverse (fig. 11).

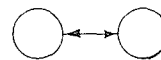


FIG. 11.

*Exemple :* Considérons le deuxième schéma. Le flotteur peut déplacer l'obturateur, **mais** la surpression dans la conduite soulève l'obturateur et agit sur le flotteur (fig. 12).

Pour l'ensemble des « systèmes physiques » (voir définition plus loin), les liaisons avec réaction sont, de loin, les plus nombreuses<sup>1</sup>. Par con-

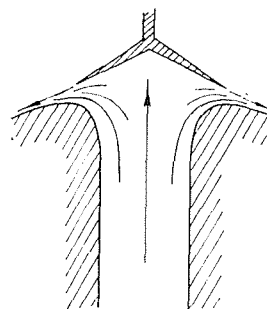


FIG. 12.

tre, dans les installations de régulation, il y a toujours au moins trois liaisons sans réaction dont on verra la disposition plus loin. Ceci est justement une des particularités des installations à régulation automatique. Expliquons pourquoi il y a obligatoirement des liaisons sans réaction dans les installations de régulation. Pour donner un ordre correctement, il faut que l'organe auquel on donne cet ordre ne se « raidisse pas », c'est-à-dire ne réagisse pas. Il faut que cet organe soit « docile » et transmette cet ordre sans la moindre réaction sur l'appareil qui le lui donne.

Donnons une explication plus physique : on veut faire varier arbitrairement le débit dans un canal en agissant à l'amont de celui-ci. Si l'écoulement y est quelque part torrentiel, c'est-à-dire s'il ne permet pas de réaction de l'aval sur l'amont, ceci est facile. Par contre, si l'écoulement est partout fluvial et permet, par conséquent, la réaction de l'aval sur l'amont, ceci n'est plus possible : le débit dépend outre de l'amont, aussi de la bonne ou mauvaise volonté de l'aval.

Après avoir décrit les liaisons entre organes,

1. En réalité, il n'existe en toute rigueur pas de liaison sans aucune réaction, ce n'est qu'une idéalisation. (Voir plus loin dans le § III-4.)

études ces derniers. On classe les divers organes ou appareils en deux catégories :

a) Ceux qui ont deux liaisons avec l'extérieur :

*Exemple* : flotteur, régulateur, vanne, obturateur...

b) Ceux qui ont trois liaisons avec l'extérieur :

*Exemple* : bassin...

On constate que :

- 1) Dans toutes les installations de régulation hydraulique, il n'existe que ces deux types d'organes;
- 2) Les organes à trois liaisons ont toujours une position spéciale que nous préciserons par la suite.

*Définition* : On appelle élément, un organe ou un ensemble d'organes couplés ensemble et ayant chacun **deux liaisons** et tel que cet organe ou ensemble débute et finit par une liaison sans réaction.

Des organes et des éléments, seuls ces derniers ont une individualité suffisante pour qu'on puisse facilement étudier l'ensemble de l'installation en les prenant seuls en considération.

Comme on l'a vu, les installations de régulation contiennent toujours des liaisons sans réaction; il est donc toujours possible de les décomposer en éléments.

Les deux installations (fig. 8 et 9) contiennent les éléments suivants :

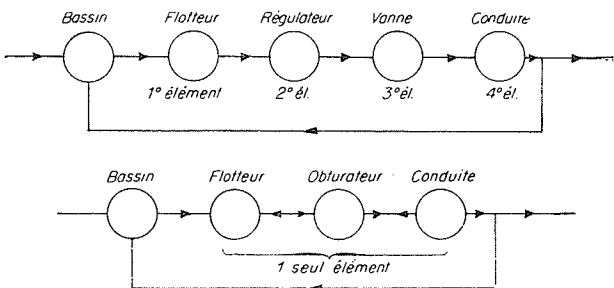


FIG. 13.

Le bassin ayant trois liaisons, ne peut pas faire partie d'un élément ou être un élément.

Étudiions plus en détail ce dernier organe. Nous voyons (fig. 13) que les installations schématisées contiennent chacune des éléments et un bassin. D'une façon générale, toutes les installations de régulation contiennent des éléments et des organes à trois liaisons avec l'extérieur. Ces derniers organes ont toujours le même rôle; ils comparent deux grandeurs et font agir en conséquence le régulateur.

*Exemple* : L'équation du bassin (fig. 13) est :

$$S \frac{dN}{dt} = q_s - q_e$$

$q_s$  : débit sortant;

$q_e$  : débit entrant;

S : surface du bassin;

N : niveau (compté positivement vers le bas).

Si  $q_s = q_e$ , le régulateur est à l'arrêt.

Selon que  $q_s \geq q_e$ , le régulateur ouvre ou ferme la vanne.

Pour l'ensemble de ces raisons, on appelle les organes analogues au bassin de la figure 13 des comparateurs ou discriminateurs.

Pour des commodités de raisonnements, on définit le comparateur idéal : le comparateur compare le débit entrant  $q_s$  et le débit sortant  $q_e$  en agissant sur le flotteur par la grandeur  $q = q_s - q_e$ .

En réalité, les comparateurs établissent en général une relation plus compliquée. Ainsi, un bassin donne *en plus* la relation :

$$S \frac{dN}{dt} = q.$$

On décompose alors le bassin en un comparateur idéal et un élément fictif qui établit la relation voulue. Ceci sera expliqué plus en détail au § III-6.

Les deux installations simples de la figure 7 se schématisent finalement comme suit :

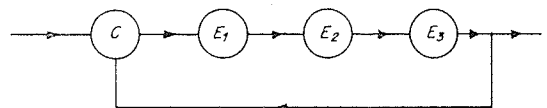


FIG. 14.

C est le comparateur,

$E_1, E_2$ , etc., sont les éléments.

L'ensemble a la forme d'une boucle fermée. On l'appelle la boucle de régulation. Les installations relativement simples (et de loin les plus nombreuses en hydraulique) sont constituées par une seule boucle<sup>1</sup>.

Cette boucle contient toujours un comparateur et un certain nombre d'éléments, comme le montre la figure 14. Elle ne contient jamais autre chose.

1. En réalité, l'asservissement est aussi une « petite boucle », mais elle n'offre jamais de difficultés spéciales.

### III-2. — Les différents régulateurs employés.

Outre les régulateurs à une boucle, il existe beaucoup d'autres sortes de régulateurs.

Régulateurs à plusieurs boucles (fig. 15) :

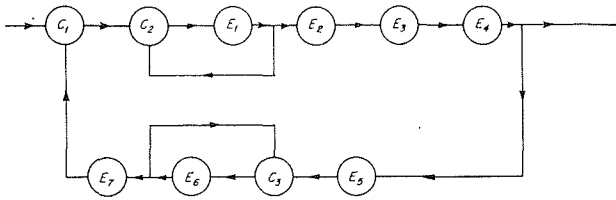


FIG. 15.

$C_1, C_2, C_3$ , sont des comparateurs.

$E_1, E_2, E_3$ , sont des éléments.

On distingue la boucle principale et les boucles secondaires, tertiaires, etc... Ces régulateurs s'appellent régulateurs à boucles.

On constate que :

1. Toutes les installations de régulation employées en hydraulique (et probablement d'une façon générale en technique) sont des régulateurs à boucles;
2. Une boucle de régulation ne contient que des éléments, éventuellement des boucles d'ordre inférieur, et un comparateur.

Les méthodes exposées ici s'appliquent essentiellement aux régulateurs à boucles.

On peut concevoir des régulateurs bien plus compliqués que les régulateurs à boucles. La figure 16 en donne un exemple.

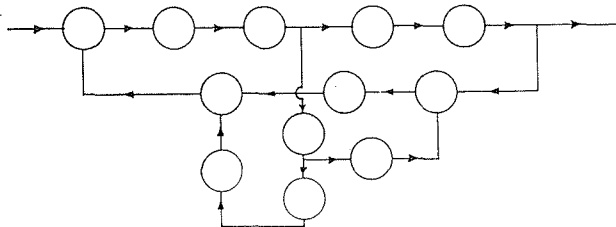


FIG. 16.

Ces régulateurs sont à connexion maillée. Ils ne rentrent pas dans le cadre des méthodes employées ici. A notre connaissance, de tels systèmes n'ont pratiquement jamais été employés en hydraulique. Néanmoins, si on veut les étudier, on peut voir [37].

Régulateurs réglant plusieurs paramètres. Il y en a deux sortes :

- a) Ceux qui sont composés de la juxtaposition de plusieurs régulateurs à un paramètre. Ils ne posent pas de problèmes vraiment nouveaux.

*Exemple* : Régulation de fréquence et de tension des réseaux de distribution électrique;

- b) Ceux qui ne sont pas de simples juxtapositions.

Leur étude sortirait du cadre de cet article; nous ne faisons que les mentionner ici [54].

### III-3. — Décomposition des éléments des boucles de régulation.

Rappelons qu'un élément est un ensemble d'organes couplés à deux liaisons et qui débute et finit par une liaison sans réaction (fig. 17).

Nous allons étudier d'une façon plus précise quels sont les organes susceptibles d'entrer dans la composition d'un élément; et aussi quelles

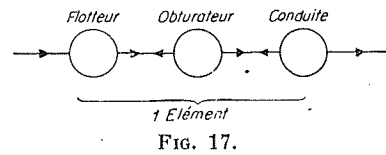


FIG. 17.

sont les propriétés de tels organes. On en déduira ensuite les propriétés des éléments.

Les organes et appareils intervenant dans les installations de régulation font partie de la grande famille des « systèmes physiques ». C'est pour cela que nous allons commencer à décrire et classer les « systèmes physiques » en général.

Employé par plusieurs auteurs [26] [65], ce mot de « systèmes physiques » n'a pas, à notre connaissance, été nettement défini; nous essayerons, ici, de préciser sa signification<sup>1</sup>.

Un « système physique » est un ensemble de corps occupant une région de l'espace, limitée par une frontière bien définie; c'est là une caractéristique géométrique, commune d'ailleurs à un grand nombre de systèmes. L'intérieur de cet ensemble est le siège de phénomènes physiques. Mais, en outre, de par sa structure interne, un système physique ne reste pas indifférent à l'espace environnant; il établit sur ses frontières ou sur une partie de ses frontières des relations entre des *grandeurs physiques* (et c'est là sa *caractéristique essentiellement physique*); on dit

1. Nous n'entrerons pas dans les détails, étant donné que ces questions dépassent les problème qui nous préoccupent.

alors qu'il y a entre lui et l'espace extérieur des liaisons. Ces liaisons sont exprimées mathématiquement par les relations en question.

Ainsi, cette notion de « système physique » déborde largement le cadre de la régulation. Des exemples permettront de mieux saisir la définition nécessairement générale donnée ci-dessus.

Considérons une conduite d'eau; elle est formée de la conduite proprement dite et du fluide (l'eau) qui s'écoule par cette conduite. Elle constitue un « système physique ». Ses frontières sont, d'une part, les parois, d'autre part, les sections d'entrée et de sortie. Les grandeurs physiques intéressantes sont le débit et la pression; les débits et pressions sur les frontières sont liés par une relation (BERNOULLI, par exemple).

De même, un port de mer, une self-induction électrique constituent des « systèmes physiques ».

On classe généralement les systèmes physiques d'après le nombre de dimensions spatiales, ou, d'une façon plus exacte, d'après le nombre minimum de coordonnées intervenant dans les équations régissant les phénomènes physiques considérés.

Ainsi, dans les équations de propagation de la houle à l'intérieur d'un port, trois coordonnées interviennent : c'est un « système physique » à trois dimensions. Les équations de l'écoulement de l'eau dans une conduite font intervenir une seule coordonnée (l'abscisse curviligne de la ligne moyenne de la conduite : une conduite sera classée « système physique » à une dimension<sup>1</sup>).

Une self électrique ou un moteur au contraire ne font intervenir aucune coordonnée spatiale; on les classe comme « systèmes physiques à constantes localisées ». Pourquoi cette dénomination bizarre? Sur une ligne électrique, la self-induction est *répartie* le long de la ligne; au contraire, dans un appareil électronique, la self est *localisée* au point où on la place. D'où le nom de « constante localisée ».

Ainsi apparaissent quatre classes de systèmes physiques :

- a) A trois dimensions,
- b) A deux dimensions,
- c) A une dimension,
- d) A constante localisée.

Si l'on compare le nombre de dimensions d'un système avec le nombre de dimensions de sa frontière, on trouve les résultats indiqués dans le tableau suivant :

SYSTÈMES	FRONTIÈRES
3 dimensions	1 dimension
2 —	2 dimensions
1 dimension	ponctuelles
Constante local.	ponctuelles

Les systèmes des deux dernières classes ont les mêmes frontières, c'est pourquoi ils présentent un grand nombre de propriétés communes (par exemple, ils ont une impédance).

FRONTIÈRES. — Il convient maintenant de revenir sur la notion de frontières.

Prenons l'exemple d'un port, nous remarquons que la frontière (digues, fond, surface libre, passe d'entrée) ne constitue pas un tout uniforme : les digues et le fond isolent le fluide de l'espace extérieur, de même à travers la surface libre il n'y a en général pas d'action<sup>2</sup>; la passe d'entrée, au contraire, permet la communication avec l'extérieur; sur les digues, il n'y a pas, à proprement parler, relation entre la hauteur d'eau et le débit; dans la passe d'entrée, au contraire, ces deux grandeurs sont liées par une loi et quand une de ces grandeurs variera, l'autre variera conformément à cette loi. Aussi, nous sommes amenés à distinguer différentes sortes de frontières : les digues, le fond et la surface libre sont des frontières hermétiques ou fixes, la passe d'entrée une frontière mobile. Autrement dit, les frontières des systèmes à deux ou trois dimensions peuvent être partiellement bloquées (digues, fond), les frontières restantes étant libres. Ces *frontières libres* peuvent se réduire à des points. Ces systèmes ont — vus de l'extérieur — des propriétés analogues à celles des systèmes à constantes localisées ou à une dimension. On appelle l'ensemble de ces systèmes les systèmes à liai-

1. En toute rigueur, il y a évidemment toujours trois dimensions. La discussion des cas où on peut ne tenir compte que de une ou deux dimensions déborde le cadre de cet article. Rappelons néanmoins que non seulement les caractéristiques du système, mais aussi celles de l'excitation interviennent. Pour chaque système, on peut tracer dans un plan amplitude-fréquence des domaines de validité des différentes approximations (cf. courbes de Weygel). Une caractéristique essentielle pour pouvoir négliger une dimension est le rapport du temps de propagation d'une onde suivant cette dimension au temps fondamental de l'excitation; néanmoins, pour certaines excitations, ce rapport ne joue pas (exemple : théorie des prismes infinis non sollicités parallèlement à leurs génératrices).

2. En faisant abstraction du vent.

sons ponctuelles avec l'extérieur, systèmes que nous examinerons plus attentivement à l'aide d'exemples empruntés au sujet même de notre article, c'est-à-dire aux régulateurs. Les *installations de régulation ne contiennent que des « systèmes physiques à liaisons ponctuelles avec l'extérieur »*. Signalons cependant une remarque relative aux liaisons analogues à celle faite au sujet des dimensions : c'est uniquement l'équation qui fait apparaître la liaison ponctuelle, mais en réalité cette liaison a toujours plusieurs dimensions.

**EXEMPLES DE SYSTÈMES A LIAISONS PONCTUELLES.**

Nous énumérerons un certain nombre de ces systèmes qui se rencontrent en régulation (voir en particulier fig. 7).

**a) SYSTÈMES A CONSTANTE LOCALISÉE.**

*Régulateur* : Lorsque la tige du flotteur se déplace, ce déplacement agit sur le régulateur; cette action est dite « action d'entrée » ou, dans un langage plus concis encore, « entrée ».

De même le régulateur va agir à son tour sur la poulie du moteur de la vanne; on désigne cette action sous le nom de « sortie ».

*Flotteur* : Avec la même terminologie « entrée » et « sortie », on aura pour le flotteur :

- Pour l'entrée : déplacement du centre de poussée hydraulique.
- Pour la sortie : tige du flotteur.

*Vanne* :

- Pour l'entrée : position de la vanne;
- Pour la sortie : relation perte de charge/débit.

**b) SYSTÈMES A UNE DIMENSION.**

Pour l'exemple de la conduite (coup de bélier d'onde), on a pour :

- Entrée : position de la vanne;
- Sortie : débit de sortie.

**c) SYSTÈMES A DEUX DIMENSIONS, MAIS A LIAISONS PONCTUELLES.**

Nous avons vu que les systèmes physiques à constantes localisées et ceux à une dimension ont toujours des liaisons ponctuelles. Les systèmes à deux ou trois dimensions peuvent également avoir des liaisons ponctuelles avec l'extérieur. C'est d'ailleurs uniquement de cette façon qu'ils interviennent en régulation.

*Exemple* : Un grand bassin rectangulaire soumis à un mouvement sinusoïdal.

Les équations font bien intervenir deux coordonnées spatiales dans le plan, mais les entrées et sorties peuvent être considérées comme ponctuelles.

Il se peut que plusieurs systèmes physiques simples aient des liaisons à plusieurs dimensions, mais on peut toujours trouver un système plus grand les englobant et ayant des liaisons ponctuelles.

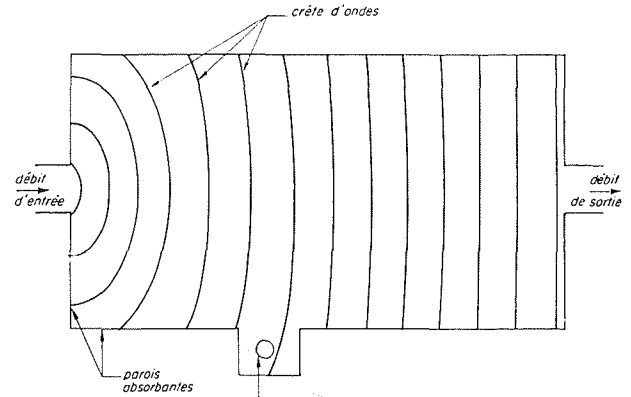


FIG. 18.

Pour classer correctement les systèmes à liaisons ponctuelles, il faut d'abord élucider un point délicat à propos des grandeurs intervenant dans les systèmes physiques en général.

On a vu qu'un système physique établissait (par sa structure interne) certaines relations entre les grandeurs mesurées sur ses limites.

*Exemple* : Un réseau d'adduction d'eau établit des relations entre les pressions et les débits d'alimentation et de distribution. Une poutre établit une relation entre les charges qu'elles portent et ses déplacements, etc. On constate que, dans tous les systèmes physiques, il existe deux sortes de grandeur<sup>1</sup> :

1. Les grandeurs dites de « tension »;
2. Les grandeurs dites de « débit ».

EXEMPLE	TENSION	DÉBIT
Electricité . . . . .	tension.	courant
Mécanique . . . . .	force.	vitesse
Hydraulique . . . . .	pression, charge.	débit
Thermodynamique . . . . .	température.	entropie

1. Nous n'avons nullement l'intention de discuter ici la valeur des analogies physiques (voir à ce sujet, par exemple : [43], [15], [28], [55]). Nous voulons simplement nous en servir.

Ces grandeurs ne sont pas arbitraires : l'une est du type « covariant », l'autre du type « contravariant » ; leur produit est une puissance.

La tension est toujours mesurée par rapport à une tension de référence; cette référence est, en électricité : « la masse » ; en mécanique : « le trièdre de référence » ; en hydraulique : « le plan de référence des charges » ; en thermodynamique : « le zéro de température ».

Ce « zéro » de référence lie le système à l'extérieur (mathématiquement et surtout aussi physiquement). Il faut absolument tenir compte de cette liaison. Parfois elle existe matériellement, parfois elle est invisible; c'est ce qui rend difficile le décompte du nombre des liaisons ponctuelles. Ceci rend aussi difficiles les « analogies » physiques entre systèmes électriques et mécanique par exemple. En électricité, la liaison « zéro de tension » est un fil, en mécanique, c'est un « trièdre invisible ».

Nous comptérons systématiquement le « zéro de tension » comme une liaison, même s'il n'est pas visible.

Il ne peut pas alors exister de système à une seule liaison ponctuelle. Les systèmes à deux liaisons ponctuelles s'appellent dipôles.

*Exemple :* (A et B sont des liaisons).

Self (fig. 19 a);

Pendule (fig. 19 b);

Cheminée d'équilibre (fig. 19 c).

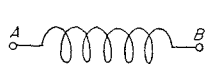


FIG. 19 a.

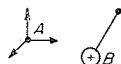


FIG. 19 b.

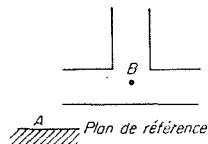


FIG. 19 c.

On définit de même les tripôles, quadripôles, etc. En réalité, on ne parle jamais de tripôles; on les classe avec les quadripôles. Les tripôles n'ont pas de propriétés plus simples que les quadripôles.

*Exemple :*

devient

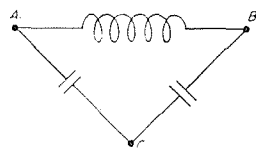
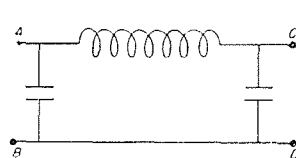


FIG. 20.



Ce que nous avons appelé liaison dans les nos III-1 et suivants, ne constituait pas, en réalité, les uniques liaisons des organes envisagés. Ces organes sont, en réalité, tous des quadripôles

(ou des tripôles) (voir fig. 21); on ne parlera, par la suite, plus que de quadripôles.

Les quadripôles ont un débit d'entrée et un débit de sortie  $I_e$  et  $I_s$  ; de même deux tensions  $U_e$  et  $U_s$ <sup>1</sup> :

*Exemple :* CONDUITE (fig. 21 a) :

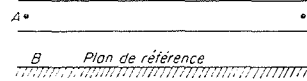


FIG. 21 a.

Tension : entrée : charge A,

sortie : charge C.

Débits : entrée : débit A,

sortie : débit C.

*Exemple :* MOTEUR ÉLECTRIQUE (fig. 21 b).

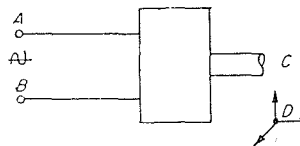


FIG. 21 b.

Tension : entrée : électrique,

sortie : couple mécanique.

Débits : entrée : courant électrique.

sortie : vitesse de rotation.

*Exemple :* OBTURATEUR (fig. 21 c).

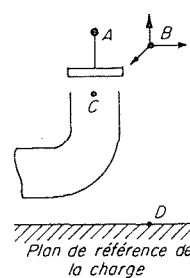


FIG. 21 c.

Tension : entrée : force,

sortie : charge.

Débits : entrée : vitesse de déplacement,

sortie : débit d'eau.

On constate que les éléments de régulation ne contiennent que des quadripôles.

1. Une discussion serait à faire, à ce sujet, comme on sait; nous la passons ici.

C'est pour cela que nous allons étudier plus en détail ces systèmes physiques.

**III-4. — Les quadripôles généralisés.**

L'état d'un quadripôle est défini par sa tension d'entrée  $U_e$ , sa tension de sortie  $U_s$  et ses débits d'entrée et de sortie  $i_e$  et  $i_s$ .

Le quadripôle établit (de par sa structure interne) deux relations entre ces quatre grandeurs. Ces deux relations caractérisent le quadripôle. Admettons qu'elles soient :

$$U_e = f_1(i_e ; i_s) \tag{1}$$

$$U_s = f_2(i_e ; i_s)$$

Nous allons, maintenant, classer les quadripôles d'après la nature de leurs relations fondamentales.

Définissons la nature d'une relation en général.

On dit qu'une relation :

$$\Phi \left( x ; y ; z ; \frac{dx}{dt} ; \frac{dy}{dt} ; \frac{dz}{dt} ; \frac{d^2x}{dt^2} \dots \right) = 0$$

est linéaire si elle se met sous la forme :

$$\begin{aligned} & a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + \dots \\ & + a_{21} \frac{dx}{dt} + a_{22} \frac{dy}{dt} + \dots \\ & + a_{31} \frac{d^2x}{dt^2} + \dots \end{aligned}$$

les  $a_{ij}$  étant des constantes ou des fonctions de  $t$  seul<sup>2</sup>.

On dit qu'une relation  $\Phi(x, y) = 0$  est linéarisable pour  $x = x_0, y = y_0$  si la courbe représentant  $\Phi(x, y) = 0$  dans le plan  $(x, y)$  admet une tangente et une seule au point :

$$x = x_0 ; y = y_0$$

De même, pour une relation  $\Phi(x, y, z) = 0$ , la surface représentative doit admettre un plan tangent, et un seul.

De même pour :

$$\Phi \left( x ; y ; z ; \frac{dx}{dt} ; \frac{dy}{dt} \dots \right) = 0$$

1. On ne peut pas toujours les mettre sous cette forme, mais les conclusions ultérieures restent.

2. En réalité, on admet en général, sans le dire, que les  $a_{ij}$  sont des constantes. Le cas où les  $a_{ij}$  dépendent de  $t$  sera traité avec les cas non linéaires; en effet, les théories classiques des systèmes dits « linéaires » ne s'appliquent pas (impédance symbolique, critère de Nyquist, etc.).

Les autres relations sont dites « non linéarisables » au point envisagé.

Un quadripôle est linéaire si ses deux relations fondamentales sont linéaires. Il est linéarisable si les deux relations sont linéarisables ou si une est linéaire, l'autre linéarisable. Autrement il est non linéarisable.

La même classification peut être faite pour tous les systèmes physiques.

On voit que cette classification est purement mathématique. Il se trouve, néanmoins, que les systèmes linéaires ont des propriétés physiques remarquables. En outre ce sont pratiquement les seuls qui se laissent aborder par le calcul. Il se trouve qu'en se qui concerne les régulateurs et en employant la méthode de NYQUIST, les systèmes non linéaires se laissent traiter presque de la même façon que les systèmes linéaires. C'est pour cela qu'on peut les étudier dans ce cas très particulier.

Puisque les systèmes non linéaires vont être traités d'une façon analogue aux systèmes linéaires, nous commencerons par étudier ces derniers.

*Linéarisation des quadripôles linéarisables.*

Si une relation  $y = f(x)$  est linéarisable, près du point  $x = x_0, y = y_0$ , on peut écrire :

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

Quand on ne s'intéresse qu'aux valeurs telles que  $(x - x_0) < \epsilon$  ( $y - y_0 < \eta_0$ ), on peut, en première approximation, écrire :

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

On obtient une relation linéaire, c'est ce qu'on appelle linéariser une relation.

On peut de même linéariser un quadripôle linéarisable. Par la suite, tout ce qu'on dira au sujet des systèmes linéaires s'applique également aux systèmes linéarisés<sup>1</sup>.

Jusqu'à présent, nous avons fait surtout de la description. Nous allons maintenant entrer dans la partie plus mathématique de cet exposé. Les systèmes linéaires s'étudient par l'« analyse harmonique », c'est-à-dire par l'étude de leurs oscillations sinusoïdales. Nous allons d'abord définir quelques expressions utilisées, puis nous allons montrer que la connaissance des oscillations forcées sinusoïdales suffit pour connaître entièrement le quadripôle linéaire.

Il existe dans la littérature beaucoup de livres sur les quadripôles [8] [12] [25]; pour les systèmes en général, on peut également voir [10] et [13].

Rappelons que l'analyse harmonique se confond pratiquement avec le calcul des impédances com-

1. Tant que  $x - x_0 < \epsilon$  et  $y - y_0 < \eta_0$ .



plexes en électricité [6] [25]. Ainsi le schéma figure 22 se traduit en régime établi, par :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_0 \cos \omega t$$

ou par :

$$(\omega L + R) I = E_0$$

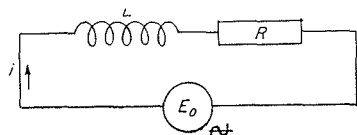


Fig. 22.

Pour étudier le quadripôle, nous ferons varier par exemple  $i_e$  sinusoïdalement. Cette variation s'appelle l'excitation ou le signal d'entrée. La variation de  $U_e$  ou  $U_s$ , qui en est la conséquence, s'appelle la réponse.

Montrons qu'un quadripôle est entièrement défini par l'ensemble de ses réponses aux excitations sinusoïdales. Pour montrer ceci, nous nous servirons du principe de superposition des états d'équilibre dynamiques. Ce principe dit :

Si :

$$U_{e1}(t); U_{s1}(t); i_{e1}(t); i_{s1}(t)$$

sont quatre fonctions satisfaisant aux équations (1) de la page précédente, et si de même :

$$U_{e2}(t); U_{s2}(t); i_{e2}(t); i_{s2}(t)$$

satisfont aux équations (1),

les fonctions :

$$C_1 U_{e1}(t) + C_2 U_{e2}(t); C_1 U_{s1}(t) + C_2 U_{s2}(t), \text{ etc.}$$

satisfont également à ces équations,  $C_1, C_2, \text{ etc.}$ , étant des constantes.

On vérifie facilement ce principe directement.

Que veut dire : « un quadripôle est défini par... » ? Cela veut dire : étant donné  $i_e(t)$  et  $i_s(t)$  quelconques, on peut déterminer les fonctions  $U_e(t)$  et  $U_s(t)$  correspondantes. Si on connaît la réponse du quadripôle à toutes les excitations sinusoïdales, on commence à décomposer  $i_s(t)$  et  $i_e(t)$  en sinusoïdes élémentaires<sup>1</sup>. On cherche les réponses pour chaque sinusoïde élémentaire; il suffit de recombinaison les réponses pour avoir  $U_e(t)$  et  $U_s(t)$ . Au lieu de prendre comme fonctions fondamentales les sinusoïdes, on pourrait prendre d'autres fonctions, par exemple les fonctions de BESSEL. Seulement, les sinusoïdes donnent les

résultats les plus simples (à cause de leur liaison avec les équations différentielles linéaires).

ETUDE DES QUADRIPOLES EN RÉGIME SINUSOÏDAL.

Il suffit maintenant de poser :

$$i_e = I_e \cos \omega t$$

$$i_s = I_s \cos (\omega t + \varphi)$$

et déterminer  $U_e$  et  $U_s$  pour définir le quadripôle.

Ici, nous arrivons au point le plus délicat de cet article. Au lieu de poser :

$$i_e = I_e \cos \omega t$$

on écrit :

$$i_e = I_e R (e^{j\omega t})$$

$R(\dots)$  veut dire : partie réelle de...

En effet :

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

d'où :

$$R(e^{j\omega t}) = \cos \omega t.$$

On écrit alors :

$$i_s = I_s R (e^{j\omega t + \varphi}) = R (I_s e^{j\omega t + \varphi})$$

On peut inclure  $e^{j\varphi}$  dans  $I_s$  et écrire :

$$i_s = R (I_s e^{j\omega t})$$

Donc :

$$i_e = R (I_e e^{j\omega t})$$

$$i_s = R (I_s e^{j\omega t})$$

Que signifie le nouveau  $I_s$  dans lequel on a inclue  $e^{j\varphi}$ ?  $I_s$  est maintenant un nombre complexe. Il a gardé sa valeur absolue mais possède un argument  $\varphi$ .

La valeur absolue donne toujours la valeur correcte de l'amplitude, l'argument  $\varphi$  donne le déphasage entre  $i_e$  et  $i_s$ . On peut choisir une origine de temps arbitraire telle que  $i_e$  devienne proportionnel à  $\cos (\omega t + \psi)$ . Alors  $I_e$  et  $I_s$  sont deux nombres complexes indiquant l'amplitude et la phase par rapport au zéro de phase arbitraire.

On en tire :

$$\frac{di_e}{dt} = R [j \omega I_e e^{j\omega t}]$$

$$\frac{d^n i_e}{dt^n} = R \{ (j \omega)^n I_e e^{j\omega t} \}$$

de même pour  $i_s$ .

1. Ceci est pratiquement toujours possible; si  $i_s(t)$  et  $i_e(t)$  sont périodiques, on obtient des séries de Fourier; sinon, on obtient une intégrale de Fourier.

D'où :

$$u_e = R \{ [A_{11}(j\omega) I_e + A_{12}(j\omega) I_s] e^{j\omega t} \}$$

$$u_s = R \{ [A_{21}(j\omega) I_e + A_{22}(j\omega) I_s] e^{j\omega t} \}$$

Les fonctions  $A_{ik}(j\omega)$  proviennent de la mise en facteur de  $I_e e^{j\omega t}$  et  $I_s e^{j\omega t}$ .

$u_e$  et  $u_s$  sont également sinusoïdaux et ont la même fréquence que  $i_e$  et  $i_s$ . Leur amplitude est visiblement donnée par les valeurs absolues de :

$$A_{11}(j\omega) I_e + A_{12}(j\omega) I_s$$

et :

$$A_{21}(j\omega) I_e + A_{22}(j\omega) I_s$$

puisque le facteur  $e^{j\omega t}$  ne change pas la valeur absolue, mais uniquement les arguments.

De même, les phases de  $u_e$  et  $u_s$  sont données par ces deux expressions. En définissant  $U_e$  et  $U_s$ , deux nombres complexes ayant pour valeur absolue l'amplitude de  $u_e$  et  $u_s$  et comme argument la phase, obtient donc :

$$U_e = A_{11}(j\omega) I_e + A_{12}(j\omega) I_s$$

$$U_s = A_{21}(j\omega) I_e + A_{22}(j\omega) I_s$$

$U_e$  et  $U_s$  sont alors des nombres complexes de la même façon que  $I_e$  et  $I_s$ .

On les schématise par des vecteurs dans le plan complexe (fig. 23).

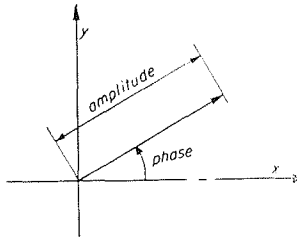


Fig. 23.

Ces quatre fonctions  $A_{ik}(j\omega)$  caractérisent, comme on l'a vu, entièrement le quadripôle.

On démontre que si le quadripôle est à constantes localisées, les  $A_{ik}(j\omega)$  sont des fractions rationnelles de  $j\omega$ . Si le quadripôle est un système physique à une dimension, les  $A_{ik}(j\omega)$  sont des fractions rationnelles de fonctions entières (comme cas particulier important, les  $A_{ik}(j\omega)$  ne dépendent que de  $j\omega$  et de  $e^{\sqrt{\alpha + \beta j\omega + \gamma \omega^2}}$ ).

On voit que la différence entre les diverses

classes de systèmes à liaisons ponctuelles est très petite avec cette méthode.

Nous écrirons :

$$A_{ik}(j\omega) = a_{ik}(\omega) + j x_{ik}(\omega)$$

$a_{ik}$  et  $x_{ik}$  étant réels.

Une question importante est l'énergie absorbée par un système. On démontre que l'énergie absorbée à l'entrée ou la sortie du quadripôle est respectivement :

$$U_e \cdot \bar{I}_e = \bar{U}_e \cdot I_e \quad \text{et} \quad U_s \cdot \bar{I}_s = \bar{U}_s \cdot I_s$$

Le trait surligné signifie : nombre complexe conjugué ( $j \rightarrow -j$ ).

On démontre la proposition directement en partant de :

$$u_e = \cos(\omega t + \varphi) \quad i_e = \cos(\omega t + \psi)$$

#### RAPPEL DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES QUADRIPOLES LINÉAIRES

(voir références citées avant).

a)  $a_{11}$  et  $a_{22}$  :

Si on fait  $I_s = 0$  (par exemple : moteur électrique bloqué à la sortie de l'arbre ou conduite bouchée à une extrémité), le signe de l'énergie absorbée à l'entrée est  $a_{11}$ .

De même, si on fait  $I_e = 0$ , le signe de l'énergie absorbée est  $a_{22}$ .

Si  $a_{11} > 0$ , on dit que le quadripôle est passif à l'entrée lorsqu'il est en court-circuit à la sortie : il ne peut alors qu'absorber de l'énergie.

De même pour  $a_{22}$ .

b) COUPLAGE INTERNE DES QUADRIPOLES.

On appelle couplage le coefficient A donné par :

$$A^2 = -\frac{A_{12}}{A_{21}}$$

Si  $A^2 = 1$ , le quadripôle est représentable par un schéma électrique ne contenant que des résistances, selfs et capacités (qui peuvent néanmoins être négatives). On l'appelle quadripôle du genre « Kirchhoff ».

Les quadripôles de Kirchhoff ont, en plus, les propriétés suivantes :

$$a_{11} > 0 ; \quad a_{22} > 0 ; \quad a_{12} < a_{11}$$

Ils sont toujours passifs, c'est-à-dire ne peuvent qu'absorber de l'énergie en toutes circonstances.

1. On sait qu'on ne peut pas toujours mettre les relations fondamentales sous cette forme, mais ceci est sans importance ici.

Si  $A = 0$  ou  $\infty$ , le quadripôle est dit « orienté ». Ces quadripôles ont les propriétés remarquables suivantes :

- La sortie ne réagit pas sur l'entrée;
- L'énergie à la sortie n'a rien à voir avec l'énergie à l'entrée, elle provient d'une source auxiliaire.

On retrouve donc ici la notion de liaison sans réaction qui a servi à décomposer les installations de régulation au début de cet article.

COUPLAGE DES QUADRIPOLES ENTRE EUX

On peut coupler les quadripôles de trois manières : en série — en parallèle — en chaîne (fig. 24).

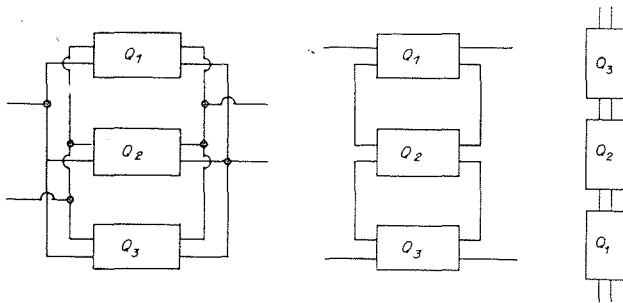


FIG. 24.

On peut évidemment associer les divers modes de couplage. En général<sup>1</sup>, quand il reste quatre liaisons libres, l'ensemble forme encore quadripôle. Si un ensemble de quadripôles contient un quadripôle orienté couplé en chaîne, l'ensemble est également un quadripôle orienté. Ces deux dernières propositions se démontrent directement par l'élimination des variables intermédiaires.

III-5. — Etude des éléments des boucles de régulation.

D'après ce qui ressort du paragraphe III-4, les éléments sont des quadripôles orientés; en effet, ils débutent par une liaison sans réaction.

Leurs relations fondamentales sont donc, par exemple :

$$U_e = A_{11} I_e$$

$$U_s = A_{21} I_e + A_{22} I_s$$

$A_{12} = 0$  puisque :

$$A^2 = - \frac{A_{12}}{A_{21}} = 0 \quad (\text{ou } A_{21} = 0 \text{ si } A^2 = \infty)$$

1. Nous ne ferons pas la discussion complète ici.

Couplons les éléments en chaîne, comme cela est le cas dans les boucles de régulation (fig. 25):

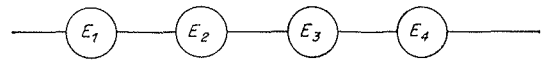


FIG. 25.

On a alors :

$$U_{e1} = A_{11} I_{e1}$$

$$U_{s1} = A_{21} I_{e1} + A_{22} I_{s1}$$

$$U_{e2} = B_{11} I_{e2}$$

$$U_{s2} = B_{21} I_{e2} + B_{22} I_{s2}$$

$$U_{e3} = C_{11} I_{e3}$$

$$U_{s3} = C_{21} I_{e3} + C_{22} I_{s3}$$

En plus :

$$U_{s1} = U_{e2}; \quad I_{s1} = I_{e2}$$

$$U_{s2} = U_{e3}; \quad I_{s2} = I_{e3}, \text{ etc.}$$

En éliminant, on obtient :

$$U_{s1} = \frac{A_{21}}{A_{11}} \frac{1}{1 - \frac{A_{22}}{B_{11}}} U_{e1} \tag{2}$$

$$U_{s2} = \frac{B_{21}}{B_{11}} \frac{1}{1 - \frac{B_{22}}{C_{11}}} U_{e2}$$

Chaque équation du type (2) caractérise un élément. Les éléments sont donc caractérisés par une seule équation, tandis qu'un quadripôle est caractérisé par deux équations. C'est pour cette raison (qui découle des liaisons sans réaction) que seuls les éléments ont une individualité marquée.

$B_{11}$  est l'impédance d'entrée du premier quadripôle (celui qui est orienté) du deuxième élément. On peut considérer que  $B_{11}$  fait partie de l'élément  $E_1$ . L'élément est bien une « unité » puisque  $B_{11}$  ne dépend pas des autres quadripôles de  $E_2$  (d'ailleurs très souvent  $B_{11} = 0$ ) et on peut effectivement faire un « catalogue » des éléments, comme indiqué au n° II-3.

On a alors :

$$U_{s2} = F_2(j\omega) \cdot U_{e2}$$

$$U_{s1} = F_1(j\omega) \cdot U_{e1}$$

Chaque élément est caractérisé par une seule fonction  $F(j\omega)$ . Les éléments sont bien plus simples à manier que les quadripôles.

On appelle  $F(j\omega)$  la fonction de transfert de

l'élément; elle le caractérise entièrement comme il ressort de tout ce qui a été dit jusqu'ici. Rappelons la signification de  $F(j\omega)$ . Si on injecte un signal :  $U_e = A \cos \omega t$  dans l'élément, il sort :

$$U_s = B \cos(\omega t + \varphi)$$

$\frac{B}{A}$  est la valeur absolue de  $F(j\omega)$ ;  $\varphi$  est l'argument de  $F(j\omega)$ . Si  $U_e = A \cos(\omega t + \psi)$ , on peut représenter  $U_e$  par un vecteur dans le plan complexe, sa longueur est  $A$ , son angle avec  $Ox$  est  $\psi$ .  $U_s$  est alors le vecteur obtenu par la multiplication des nombres complexes  $U_e$  et  $F(j\omega)$ .

Quand  $\omega$  varie, le point représentant  $F(j\omega)$  dans le plan complexe  $xoy$  varie : il décrit une courbe graduée en  $\omega$ . Cette courbe est la courbe de transfert (fig. 26).

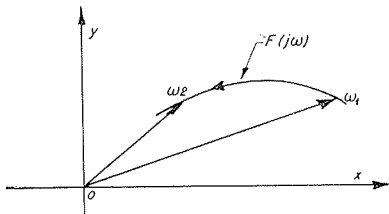


FIG. 26.

On lui associe une flèche montrant le sens de parcours quand  $\omega$  augmente.

Étudions maintenant le couplage en chaîne des éléments linéaires.

De :

$$U_{s1} = F_1(j\omega) U_{e1}$$

$$U_{s2} = F_2(j\omega) U_{e2}$$

et :

$$U_{1s} = U_{e2},$$

il résulte :

$$U_{s2} = F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega) U_{e1} = F(j\omega) \cdot U_{e1}$$

La fonction de transfert  $F(j\omega)$  est égale au produit  $F_1(j\omega)$  par  $F_2(j\omega)$ . L'ordre n'intervient donc pas dans le couplage. La courbe de transfert résultant du couplage est obtenue par multiplication de nombres complexes à partir des courbes de transfert élémentaires. On fait la construction en général graphiquement. C'est ici l'origine de la méthode graphique (voir II-3).

Exemples :

1. COURBE DE TRANSFERT D'UNE CONDUITE (linéarisée) EN PRENANT EN CONSIDÉRATION LE SEUL COUP DE BÉLIER EN MASSE.

Equation non linéaire.

$$H - \frac{L}{g\sigma} \frac{dQ}{dt} - K_1 Q_2 = \frac{KQ^2}{Y^2}$$

$H$  : hauteur géométrique;

$L$  : longueur de la conduite;

$g$  : 9,81 m/s<sup>2</sup>;

$\sigma$  : section de la conduite;

$K_1$  : coefficient de perte de charge de la conduite;

$K$  : coefficient de débit de la vanne,

$Y$  : ouverture de la vanne,

$q$  : débit.

Pour linéariser, on pose :

$$Y = Y_1 + y$$

$$Q = Q_1 + q$$

D'où :

$$T \frac{dq}{dt} + 2q = 2\beta \frac{Q_1}{Y_1} y$$

$$T = \frac{L}{g\sigma} \frac{Q_1}{H}$$

$\beta$  pourcentage de pertes de charge dans la vanne.

La fonction de transfert est donnée par :

$$q_0 = \frac{2\beta Q_1}{Y_1} \frac{1}{2 + j\omega T} y_0^*$$

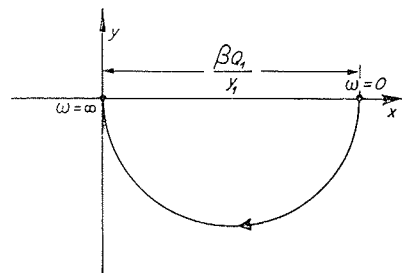


FIG. 27.

La courbe de transfert est un cercle :

2. COURBE DE TRANSFERT D'UN RÉGULATEUR A VITESSE PROPORTIONNELLE A L'ÉCART :

Equation :

$$\frac{dy}{dt} = K_0(N - my)$$

\* Elle provient de  $T \frac{dq}{dt} + 2q = 2\beta \frac{Q_1}{Y_1} y$ , où on a posé  $q = q_0 e^{j\omega t}$ ,  $y = y_0 e^{j\omega t}$ .

- $K_0$  : rapidité de réponse;
- $m$  : degré d'asservissement;
- $N$  : niveau dans le « bassin à niveau réglé »;
- $Y$  : ouverture.

Fonction de transfert :

$$y_0 = \frac{k_0}{j\omega + m} N_0$$

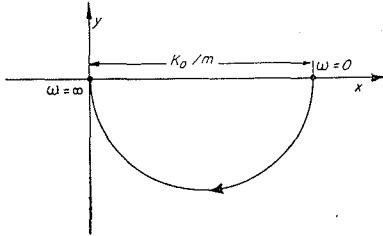


FIG. 28.

La courbe de transfert est également un cercle.

3. COUPLAGE EN CHAÎNE : CONDUITE + RÉGULATEUR, COURBE DE TRANSFERT, FIGURE 29.

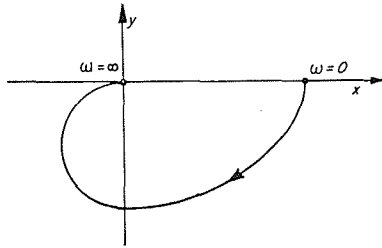


FIG. 29.

Nous nous sommes efforcés, jusqu'ici, de montrer toutes les particularités des boucles de régulation en nous tenant à des considérations élémentaires. Nous verrons le parti qu'on peut en tirer plus loin. Il reste néanmoins une dernière particularisation qui, quoique n'étant pas toujours applicable, est néanmoins souvent d'un secours très puissant. Cette dernière particularisation ne se laisse malheureusement pas décrire d'une façon simple (du moins pas à notre connaissance). Il s'agit des relations entre l'amplification et le déphasage produit par chacun des éléments.

Reprenons l'analyse harmonique à ses débuts. Nous avons étudié la réponse d'un élément ou d'un quadripôle à une excitation  $A \cos \omega t$ ; nous allons maintenant étudier la réponse à :

$$A e^{+\lambda t} \cos \omega t.$$

Au lieu de :

$$A e^{+\lambda t} \cos \omega t,$$

nous pouvons écrire :

$$R [A e^{(\lambda + j\omega)t}].$$

$R(\dots)$  veut toujours dire partie réelle de... On peut alors refaire toute la théorie en remplaçant  $j\omega$  par  $(\lambda + j\omega)$  [ou  $p$ , comme on écrit en calcul symbolique  $(\lambda + j\omega = p)$ ].

On aboutit à la fonction de transfert :

$$F(p) = F(\lambda + j\omega)$$

dont  $F(j\omega)$  est le cas particulier,  $\lambda = 0$ .

Soit encore  $x$  et  $y$  les longueurs portées sur les axes du plan complexe dans lequel on trace les courbes de transfert  $F(j\omega)$  et  $F(\lambda + j\omega)$ .

Alors à chaque valeur de  $p = \lambda + j\omega$  correspond un vecteur, donc une valeur :

$$z = x + jy$$

et on a :

$$z = x + jy = F(\lambda + j\omega) \quad \text{ou} \quad z = F(p).$$

Les courbes  $\lambda = C^{ste}$  et  $\omega = C^{ste}$  sont orthogonales et définissent le champ à potentiel de la fonction analytique  $z = F(p)$  ou de la fonction inverse  $p = \Phi(z)$ , telle que  $\Phi[F(z)] \equiv z$ .

Pour la suite, il nous faudra faire appel aux propriétés de fonctions analytiques. Nous supposons connues un grand nombre de leurs propriétés. On pourra trouver celles-ci par exemple dans [61].

La fonction de transfert  $F(\lambda + j\omega) = F(p)$  fait correspondre au nombre  $p = \lambda + j\omega$  un nombre  $z = x + jy$  :

$$x + jy = F(\lambda + j\omega).$$

On peut aussi en tirer :

$$\lambda + j\omega = \Phi(x + jy);$$

$\Phi$  étant la fonction inverse de  $F$ ,  $\Phi$  permet de tracer dans un plan  $\lambda, \omega$  des courbes  $x = C^{ste}$  et  $y = C^{ste}$  (fig. 30).

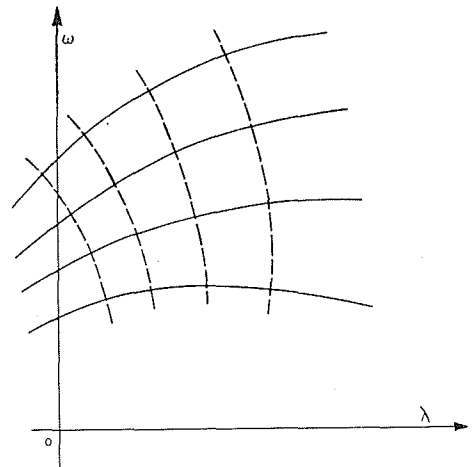


FIG. 30.

Ces courbes définissent la fonction analytique inverse :  $p = \Phi(z)$ . La connaissance de la courbe de transfert  $F(j\omega)$  dans le plan des  $z$  donne les valeurs de  $x$  et de  $y$  sur le demi-axe positif du plan  $p$ . Les coefficients de la fonction  $F(j\omega)$  (fonctions entières de  $z$  et  $e^{\sqrt{\alpha+\beta z+\gamma z^2}}$  dans la pratique) étant réels, on connaît les valeurs de  $x$  et  $y$  pour les valeurs négatives de l'axe  $o\omega$  par symétrie. Or la connaissance des valeurs de  $x$  ou de  $y$  sur l'axe  $o\omega$  et la connaissance des singularités de la fonction  $F(p)$  dans un des demi-plans limité par l'axe  $o\omega$  suffit pour déterminer  $x$  et  $y$  dans tout le plan. Nous voyons donc que si on connaît les singularités dans un des demi-plans, la donnée de la courbe de transfert  $F(j\omega)$  est **surabondante**. Or, les points singuliers sont très souvent des données physiques puisque ce sont eux qui « engendrent » toute la fonction. C'est ceci qui est à la base de la simplification que nous allons décrire.

En réalité, ce ne sont pas les fonctions  $x(\lambda; \omega)$  et  $y(\lambda; \omega)$  qui sont les plus intéressantes, mais les fonctions  $1/2 \log(x^2 + y^2)$  et  $\text{Arc tg } \frac{y}{x}$ ; c'est-à-dire logarithme de l'amplification et déphasage. Ces deux fonctions sont les parties réelles et imaginaires de  $\log(x + jy)$ .

Avant de passer au plan  $(\lambda; \omega)$ , on fait donc une transformation conforme du plan  $xoy$  :

$$Z = \log z$$

Les courbes  $\log A = C^{\text{ste}}$  et  $\varphi = C^{\text{ste}}$  définissent donc également une fonction analytique dans le plan  $(\lambda; \omega)$ .

Si cette fonction n'a pas de singularité dans le demi-plan, à droite de l'axe  $o\omega$ , on dit que l'élément caractérisé par cette équation est « à minimum de phase ». (On verra la raison de cette dénomination plus loin.)

Dans ce cas, il suffit donc de connaître  $\log A$  en fonction de  $\omega$ ;  $\varphi$  s'en déduit d'une façon unique.

Pour qu'un élément soit à minimum de phase,

Si on constitue un catalogue d'éléments, on peut décomposer une fois pour toutes chaque élément en élément à déphasage minimum et déphaseur pur. D'ailleurs, la plupart des éléments ne contiennent pas de déphaseur pur. D'après ce qui précède, il existe pour les éléments à minimum de phase une relation entre le déphasage et l'amplification. Cette relation est :

$$\Phi_0 = \frac{\pi}{12} \left( \frac{d \log A}{d \mu} \right)_0 + \frac{1}{6\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{d \log A}{d \mu} \right) - \left( \frac{d \log A}{d \mu} \right)_0 \right] \log \coth \frac{|\mu|}{2} d\mu$$

avec :

$$\mu = \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

(Voir [52] et [56])

Le déphasage au point d'indice zéro dépend donc de toute la courbe d'amplification.

$\frac{d \log A}{d \mu}$  est la pente en  $db/octave$ ;  $\Phi$  est en radians.

il faut donc que  $F(p)$  ne devienne ni nul ni infini dans le demi-plan à gauche de  $o\omega$ . On a vu que les éléments ne contenant que des systèmes à constantes localisées avaient une fonction de transfert du type : fraction rationnelle de  $\lambda + j\omega = p$ . Dans ce cas, il suffit que cette fraction rationnelle n'ait pas de pôle ni de zéro à droite de l'axe  $o\omega$ . On verra qu'il n'y a, en général, pas de pôle dans cette région.

Les éléments qui n'ont pas les propriétés requises pour être à minimum de phase s'appellent éléments « non à minimum de phase » (terme consacré par l'usage). D'une façon générale, on peut décomposer ces éléments en un élément à minimum de phase et un autre élément appelé « déphaseur pur ».

Nous allons montrer cette décomposition sur un exemple :

Soit :

$$F(p) = g(p) \cdot (p - p_0)$$

$g(p)$  n'ayant pas zéro au pôle à droite de  $o\omega$  et  $p_0 > 0$ .

On écrit :

$$F(p) = g(p) (p + p_0) \times \frac{p - p_0}{p + p_0}$$

On vérifie que l'amplification de  $\frac{p - p_0}{p + p_0}$  est égale à 1, c'est pour cela qu'on appelle un tel élément un « déphaseur pur ». En plus, ces éléments produisent toujours un déphasage négatif. C'est de cela que provient le nom : « à déphasage (négatif) <sup>1</sup> minimum » donné aux éléments ne contenant pas de déphaseur pur; dès qu'on ajoute un déphaseur pour constituer un élément non à minimum de phase, le déphasage (négatif) croît.

Pour plus de renseignements à ce sujet, on peut voir [9] [56].

1. On verra que c'est le déphasage négatif qui est en général néfaste.

En pratique, la fonction de pondération  $\log \coth \frac{|u|}{2}$  n'a une valeur non négligeable qu'au voisinage de  $f=f_0$ . Donc le déphasage en un point ne dépend pratiquement que de la pente de la courbe d'amplification en ce point, à une pente  $n \text{ db/octave}$  correspond un déphasage de  $-n \frac{\pi}{2}$ ,

avec l'approximation  $\coth \frac{|u|}{2} = 0$  pour  $f \neq f_0$ .

Pour les systèmes non à minimum de phase, il faut ajouter le déphasage produit par le déphaseur pur.

Rappelons qu'en régulation des turbines en fréquence-puissance, il existe *toujours* quelque part un déphaseur pur. Ceci est physiquement dû au fait que la puissance peut rester constante si le débit baisse (convenablement) et que la pression augmente dans la conduite forcée (due au coup de bélier). On peut en général trouver une raison physique pour expliquer pourquoi tel ou tel élément est à déphasage minimum ou non.

Revenons maintenant aux éléments non linéaires. Pour les définir, il faut définir le quadripôle non linéaire orienté.

Ce dernier a une de ses deux relations fondamentales ne contenant que deux des quatre variables  $U$  et  $i$ .

On voit alors que l'élément non linéaire se définit exactement comme l'élément linéaire. Il est caractérisé par une relation non linéaire entre  $U_c$  et  $U_s$  et leurs dérivées et intégrales par rapport au temps :

$$\Phi(U_c; U_s) = 0 \tag{3}$$

Cette relation définit entièrement l'élément.

On verra qu'en ce qui concerne la stabilité des boucles de régulation, l'élément est caractérisé par un ensemble de courbe de transfert. Pour l'instant, on ne peut pas aller plus loin que la relation (3).

### III-6. — Les comparateurs (ou discriminateurs).

Pour terminer l'étude des régulateurs à boucles, il suffit maintenant d'étudier les comparateurs. Comme on l'a déjà vu, ils n'établissent

## IV. — THÉORIES ET MÉTHODES D'ÉTUDE DES INSTALLATIONS AUTOMATIQUES

### IV-1. — Méthodes d'Hürwitz-Routh, Léonhard, etc.

Les premières méthodes appliquées aux régulateurs étaient valables pour *tous* les systèmes physiques à constantes localisées.

pas, en général, la relation simple  $q = q_s - q_c$ , mais d'une manière générale :

$$F_1(j\omega) q = F_2(j\omega) q_s + F_3(j\omega) q_c$$

On les décompose alors en trois éléments fictifs et un comparateur idéal (fig. 31) :

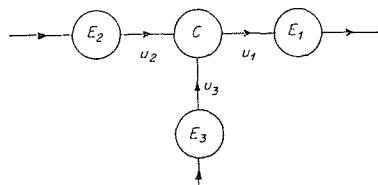


FIG. 31.

$$E_3 \text{ donne } u_3 = -F_3(j\omega) q_c$$

$$E_2 \text{ donne } u_2 = F_2(j\omega) q_s$$

$$E_1 \text{ donne } u_1 = F_1(j\omega) q$$

$$C \text{ donne } u_1 = u_2 - u_3$$

Les éléments fictifs ont toutes les propriétés des éléments ordinaires.

Le même processus est possible pour les comparateurs non linéaires.

On peut alors affirmer qu'un régulateur à boucles se compose uniquement d'éléments et de comparateurs idéaux.

*Exemple :* Un bassin donne la relation :

$$S \frac{dN}{dt} = q_s - q_c$$

comme on a déjà vu.

On le décompose en :

$$q = q_s - q_c$$

et l'élément E :

$$q = S \frac{dN}{dt}$$

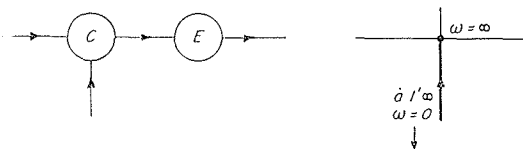


FIG. 32.

La courbe de transfert de E est une droite.

On partait des équations du système et on déterminait ses fréquences propres : en particulier, on regardait si toutes ses fréquences étaient amorties ou non, d'où stabilité ou instabilité du système.

Il est clair que la résolution d'un problème

aussi général est plus compliquée que celle du problème très particulier posé par les régulateurs à boucles. C'est le grand mérite de NYQUIST d'avoir indiqué une méthode plus particulière englobant néanmoins à peu près tous les régulateurs à asservissements.

IV-2. — Méthode de Nyquist.

[11], [34], [52], [54], [14], [48]

La méthode NYQUIST est basée sur la notion d'élément. Revenons à l'installation ayant une seule boucle. Elle se schématise par :

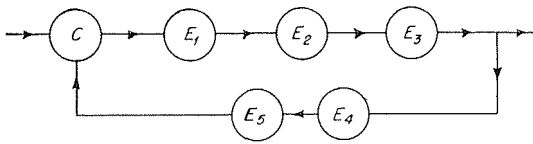


FIG. 33.

où C est le comparateur, E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub>, E<sub>3</sub>, E<sub>4</sub>, E<sub>5</sub>, les éléments.

Un ensemble d'éléments couplés en chaîne ayant une fonction de transfert tout comme un seul élément, on peut aussi considérer le schéma suivant :

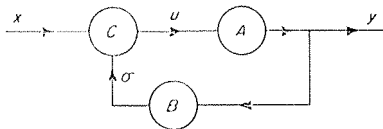


FIG. 34.

A et B sont des ensembles d'éléments ayant les fonctions de transfert A(jω) et B(jω).

L'ordre donné à l'installation sera désigné par x, l'exécution par y, la grandeur réglée par u.

Les équations reliant ces grandeurs sont :

$$u = x - \sigma$$

$$y = A(j\omega) u$$

$$\sigma = B(j\omega) y$$

D'où :

$$y = x \frac{A(j\omega)}{1 + A(j\omega) B(j\omega)}$$

La valeur réglée u est :

$$u = \frac{x}{1 + A(j\omega) B(j\omega)}$$

Pour que l'exécution y soit égale à l'ordre x

ou que le paramètre réglé soit constant, il faut que :

$$A(j\omega) = 1 + A(j\omega) B(j\omega).$$

En hydraulique, on a presque toujours B(jω) = 1, il ne reste donc que la condition A(jω) = ∞.

Le régulateur exécute d'autant mieux l'ordre que cette condition est vérifiée par un plus grand nombre de valeurs ω.

En pratique, on réalise A(jω) = ∞ toujours pour ω → 0, et ceci au moyen d'un intégrateur. En effet, si U<sub>s</sub> = ∫ U<sub>e</sub> dt, on a, en jω :

$$U_s = \frac{U_e}{j\omega} \quad \text{et} \quad F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

Donc F(jω) → ∞ quand ω → 0. Cette condition garantit un niveau moyen correct de la valeur à régler.

On voit aussi pourquoi les installations à régulation automatique et les systèmes de commande indirecte asservis sont très voisins. En effet, x = y est équivalent à u = 0.

Donnons quelques exemples d'installations automatiques : on va regarder quelles sont les significations des symboles x, u, y, A, C, et de l'intégrateur dans quelques cas industriels comme la régulation des turbines ou la régulation d'un niveau constant en irrigation.

Régulation des turbines

- x = puissance demandée par le réseau P<sub>n</sub>,
- y = puissance ωQH fournie par la retenue à l'installation P<sub>u</sub>,
- u = différence des puissances x et y.

La vitesse de rotation Ω du groupe est liée à u par :

$$I \frac{d\Omega}{dt} = u \quad (\text{I moment d'inertie du groupe})$$

Si :

$$u = 0 \quad \Omega = C^{ste}$$

Comparateur C : les pièces tournantes; elles donnent :

$$I \frac{d\Omega}{dt} = P_a - P_u = u$$

De même que le bassin examiné dans un exemple antérieur, les pièces tournantes jouent à la fois un rôle de comparateur et d'intégrateur :

$$\Omega = \frac{1}{I} \int_0^t u dt$$



Réglage d'un niveau dans un bassin

- $x$  : débit demandé par le réseau d'adduction d'eau,
- $y$  : débit demandé à la retenue,
- $u$  : différence des débits  $x$  et  $y$ .

Le niveau réglé  $N$  est lié à  $u$  par :

$$\frac{dN}{dt} = u$$

Si :

$$u = 0 \quad N = C^{ste}$$

$C$  : le bassin (il est également intégrateur).

Appareil de mesure à asservissement

- $x$  : valeur de la grandeur à mesurer,
- $y$  : valeur de la grandeur indiquée sur le cadran de l'appareil,
- $u$  : erreur :
- $C$  : le comparateur est, en général, un pont de Wheatstone dans les appareils électriques ou électroniques.

$B$  peut exister dans ce cas.

Pour perfectionner la boucle de régulation, on pourrait s'arranger pour que  $A(j\omega) = \infty$  pour de nombreuses valeurs de  $\omega$ . En réalité, ceci ne serait pas prudent pour un appareil mécanique ou hydraulique non destiné au laboratoire. En effet,  $A(j\omega) = \infty$  veut dire amplification infinie; les boucles contenant des amplifications trop grandes deviennent facilement instables, comme on verra plus loin.

Stabilité

Une boucle est stable si, à un ordre  $x$  très petit, correspond une exécution  $y$  très petite aussi.

Si  $1 + A(j\omega)B(j\omega) = 0$ , à  $x = \epsilon$  correspond  $y = \infty$  : l'installation est instable.

Regardons de plus près la condition :

$$A(j\omega) \cdot B(j\omega) = -1$$

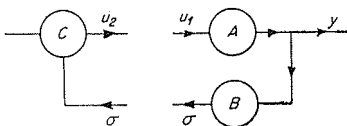


FIG. 35.

Le produit  $A(j\omega) \cdot B(j\omega)$  est la fonction de transfert de la boucle ouverte sans comparateur\*.

En effet, admettons que  $u_1 = A \cos \omega t$ ; dans ce cas, on tire de :

$$A(j\omega) \cdot B(j\omega) = -1 :$$

$$\sigma = -A \cos \omega t; \quad \sigma = -u_1.$$

Or, le comparateur donne  $u_2 = -\sigma$ ; donc, dans ce cas,  $u_1 = u_2$  : si  $A(j\omega) \cdot B(j\omega) = -1$ , l'excitation  $u_1 = A \cos \omega t$  produit une réponse  $u_2 = u_1$  et lorsqu'on reforme la chaîne, elle est susceptible d'osciller avec la fréquence  $\omega$ .

Traçons (fig. 36) la courbe de transfert de la chaîne ouverte :

$$F(j\omega) = A(j\omega) B(j\omega).$$

Si elle passe par  $-1$ , la stabilité est juste limite.  $A \cos \omega t$  n'est ni amorti ni amplifié, mais juste entretenu quand la chaîne est fermée.

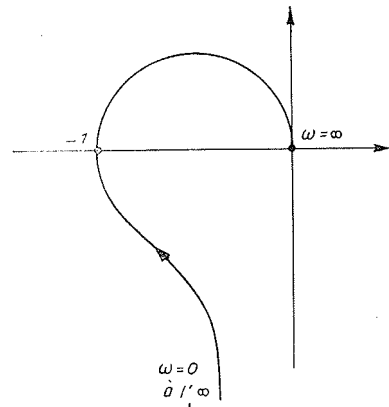


FIG. 36.

Si la courbe passe près du point  $-1$ , l'oscillation  $A \cos \omega t$  est légèrement amortie ou légèrement amplifiée dans la chaîne fermée<sup>2</sup>. On voit pourquoi le point  $-1$  joue un rôle essentiel.

NYQUIST a montré que l'installation est stable si la courbe de transfert de la chaîne ouverte décrite de  $\omega = 0$  vers  $\omega = \infty$  laisse le point  $-1$  à sa gauche.

Les mathématiciens ont vivement critiqué le critère de NYQUIST. Effectivement, il convient de le compléter en disant : l'installation est stable, si le critère de NYQUIST est satisfait et si la chaîne ouverte est stable elle aussi, c'est-à-dire si :

$$A(j\omega) \neq \infty \quad \text{pour } \omega \neq 0.$$

\* On pourrait prendre  $+1$  comme point critique, mais on verra par la suite qu'il est préférable de prendre  $-1$ .  
 2.  $F(j\omega) = A(j\omega) \cdot B(j\omega)$  est la fonction de transfert de la chaîne ouverte, mais la stabilité considérée ici est une propriété de la chaîne formée.

On a déjà vu que  $A(j\omega) = \infty$  améliorerait la précision, mais en pratique on s'arrange pour que  $A(j\omega) \neq \infty$  pour  $\omega \neq 0$ .

En effet, une ouverture accidentelle de la boucle (bouchage de circuit d'huile d'un régulateur, etc.) pourrait provoquer un pompage détériorant l'installation.

Par ailleurs, on montre physiquement que pour les éléments  $A(j\omega)$  est toujours différent de l'infini. Seule l'existence de boucles secondaires instables pourrait donner  $A(j\omega) = \infty$  (ceci tant qu'on se limite au domaine linéaire).

S'il y a  $n$  valeurs  $\omega$  telles que  $A(j\omega) = \infty$ , le critère de NYQUIST devient : la chaîne fermée est stable si la courbe de transfert de la chaîne ouverte tourne  $n$  fois autour du point  $-1^{\circ}$ . Ce point se trouvant à gauche de la courbe décrite dans le sens  $\omega = 0$  à  $\omega = \infty$ .

*Définition de la stabilité absolue*

On dit qu'une installation est absolument stable si les points de la courbe de transfert correspondante situés sur l'axe réel sont tous à droite du point  $-1$ .

En effet, les vieillissements et les accidents produisent à peu près toujours des diminutions d'amplitude dans la chaîne fermée.

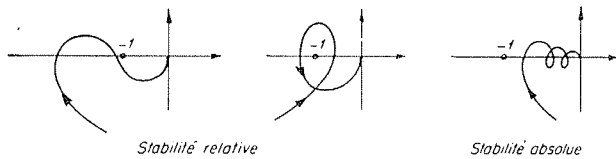


FIG. 37.

Les installations à stabilité relative sont stables mais dangereuses pour l'avenir.

Le diagramme de NYQUIST peut aussi servir à déterminer la fréquence dont l'amortissement est le plus petit et cet amortissement :  $\omega_0$  et  $\lambda_0$  [29]. Cette détermination se déduit tout de suite de l'analyse harmonique généralisée décrite à propos des éléments à minimum de phase. On injecte  $A e^{M} \cos \omega t$ . Si  $A(\lambda + j\omega) \cdot B(\lambda + j\omega) = -1$ ,  $\lambda$  et  $\omega$  définissent un mouvement possible.

On a vu que les courbes  $\lambda = C^{ste}$  et  $\omega = C^{ste}$  sont orthogonales et constituent les lignes d'un champ à potentiel. Connaissant une des lignes  $\lambda = C^{ste}$  du champ (par exemple :  $\lambda = 0$ ) graduée en  $\omega$ , on peut trouver l'ensemble des lignes du champ.

Cette détermination peut se faire graphiquement par la méthode dite des « petits carreaux ».

3. Il faut compter la valeur  $\omega = \omega_1$  pour «  $k$  » valeurs si  $A(j\omega_1)$  devient  $\infty$  d'ordre  $k$ .

Connaissant ce champ, partout on peut résoudre l'équation :

$$F(\lambda + j\omega) \equiv F(p) = -1$$

donc les solutions  $\lambda$  et  $\omega$  sont des fréquences propres de la chaîne fermée.

En effet, la chaîne fermée oscille si :

$$F(\lambda + j\omega) + 1 = 0,$$

comme on a vu plus haut.

D'ailleurs, l'existence de la fonction analytique  $F(\lambda + j\omega)$  permet de démontrer rigoureusement le critère de NYQUIST. Ici nous voulons simplement mentionner que la construction graphique par « petits carreaux » qui permet d'obtenir un des couples de valeurs  $\lambda$  et  $\omega$  correspondant au point  $-1$ . On démontre que c'est en général le couple de valeur ayant entre tous la valeur la plus petits de  $\lambda$ , donc correspondant à l'oscillation la moins amortie.

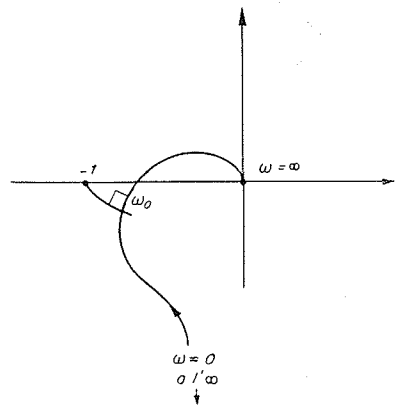


FIG. 38.

En pratique, il suffit d'abaisser une « normale courbe » du point  $-1$  à la courbe  $F(j\omega)$ .

En général, on ne peut pas abaisser facilement plusieurs « normale courbe » du point  $-1$  à la

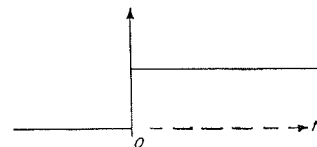


FIG. 39.

courbe de transfert. Cela signifie que les autres oscillations propres sont nettement plus amorties que la première. Une perturbation du genre échelon unité (fig. 39) donne alors naissance à des oscillations très rapidement voisines de :

$$A e^{-\lambda_0 t} \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

$\lambda_0$  ou  $\frac{\lambda_0}{\omega_0}$  caractérise donc bien l'amortissement des oscillations de la chaîne.

*Retour aux courbes de Weygel*

Si on a pour les différentes régions du plan fréquence amplitude (n° II-3, fig. 5) différentes courbes de transfert, on les limite aux fréquences pour lesquelles elles sont acceptables et on trace les différentes normales courbes du point -1.

*Exemple :*

$C_1$  est valable pour  $\omega$  compris entre 0 et  $\omega_1$ .

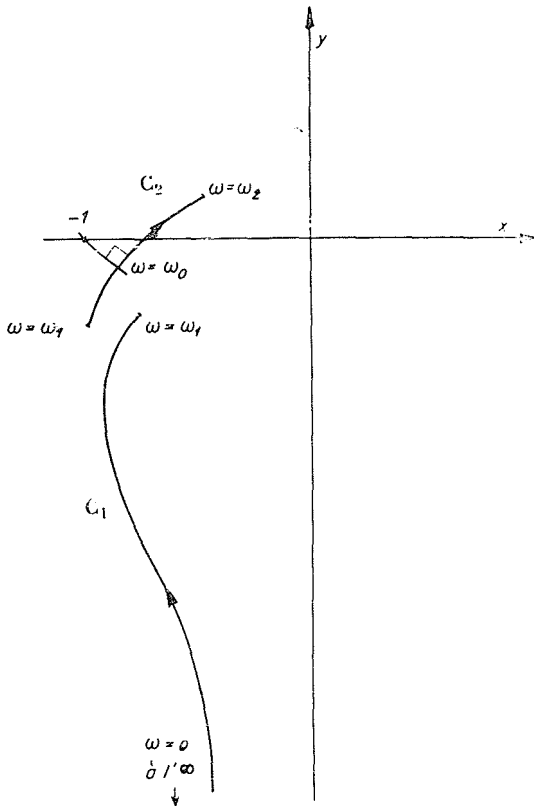


FIG. 40.

$C_2$  pour  $\omega$  compris entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

Si  $\omega > \omega_2$ , le système ne laisse plus rien passer. On en déduit  $\omega_0^*$ .

**IV-3. — Systèmes à minimum de phase.**

Nous avons vu que pour les systèmes à minimum de phase, la donnée de la courbe de trans-

\* Théoriquement, cette méthode est sujette à caution. Pratiquement, elle marche toujours.

fert était surabondante; il suffit de se donner  $\log A$  en fonction de  $\log f$ . Ceci est très important puisqu'il suffit de s'occuper de deux variables au lieu de trois.

On verra dans le paragraphe suivant que le déphasage est pratiquement toujours négatif. Il en résulte que la courbe  $\log A$  en fonction de  $\log f$  est toujours descendante. (D'après ce qu'on a vu au paragraphe III-5.) Comme, en plus,  $A$  est en général infini pour  $\omega = 0$  (d'après ce qu'on a vu à propos de la précision), la courbe  $\log A / \log f$  coupe l'axe  $\log A = 0$ , en un seul point, c'est-à-dire en un point et un seul de l'axe  $of$ , on a :  $A = 1$ ; soit ce point :  $f = f_1$ .

On appelle cette fréquence  $f_1$  : fréquence de coupure. La figure 41 montre sa position sur le diagramme de NYQUIST :

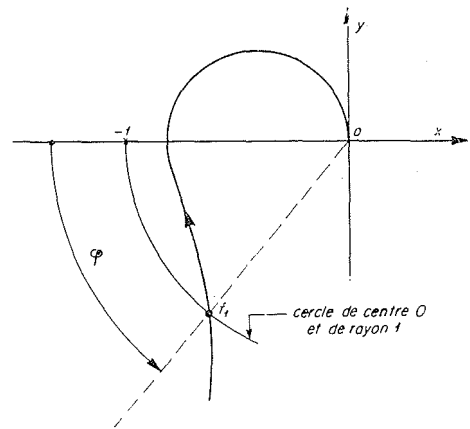


FIG. 41.

L'angle  $\varphi$  s'appelle marge de phase : il est compté à partir de l'axe négatif  $ox$ . Pour que le système soit stable, il faut donc que  $\varphi > 0$ . D'après ce qu'on a vu à propos des systèmes à minimum de phase, il faut pour ceci que :

$$\frac{d(\log A)}{d \log f} < 12 \text{ db/octave.}$$

pour la fréquence de coupure  $f_1$ .

Il suffit donc, pour ces systèmes, de tracer  $\log A$  en fonction de  $\log f$  et de vérifier que  $\frac{d \log A}{d \log f} < 12 \text{ db/octave}$  pour la fréquence telle que  $\log A = 0$  pour être sûr de leur stabilité.

Si le système contient un déphaseur pur, il faut calculer son déphasage  $\Psi$  pour  $f = f_1$  et vérifier la relation  $\frac{d \log A}{d \log f} < 12 \left(1 - \frac{\Psi}{\pi}\right) \text{ db/octave}$ ;  $\Psi$  en radians.

Pour les éléments couplés en chaîne, les diagrammes  $\log A / \log f$  se combinent facilement par simple addition :  $\log A = \log A_1 + \log A_2$ .

La recherche de la stabilité est donc très simple pour les systèmes à minimum de phase et même pour ceux qui contiennent des déphaseurs purs simples.

#### IV.4. — Les installations automatiques en tant qu'intégrateurs.

Nous avons décrit, jusqu'à présent, les régulateurs en mettant en valeur toutes les particularités qui permettent d'employer rationnellement

la méthode de NYQUIST pour les installations linéaires.

En réalité, les installations de régulation ont encore une particularité importante. Elle nous servira pour étudier les installations non linéaires. Cette particularité est la suivante : la très grande majorité des éléments déphasent en arrière. L'angle de  $F(j\omega)$  est alors toujours négatif. Ainsi les intégrateurs, les inerties, les régulateurs à vitesse proportionnelle à l'écart, etc...

Chaque déphasage de  $\frac{\pi}{2}$  en arrière correspond à peu près à une intégration. Le point — 1 correspond à deux intégrations.

(A suivre.)

#### Bibliographie

- 1 — ALMÉRAS : Influence de l'inertie de l'eau sur la stabilité d'un groupe hydro-électrique.  
*Houille Blanche*, nov. 1945, p. 81 (suite, mars 1946).
- 2 — ALMÉRAS : Stabilité des groupes hydro-électriques.  
*Houille Blanche*, nov.-déc. 1946, p. 407.
- 3 — ALMÉRAS : Caractéristiques des régulateurs.  
*Houille Blanche*, n° 6/1947, nov.-déc.
- 4 — ALMÉRAS : Procédés d'amélioration des qualités de réglage des groupes hydro-électriques.  
*Houille Blanche*, n° 1/1949, p. 38.
- 5 — ALMÉRAS : Cours de régulation.  
Professé à l'École des Ingénieurs Hydrauliciens de Grenoble.
- 6 — ANGOT : Compléments de mathématiques.  
Éditions de la *Revue d'Optique*, 1949.
- 7 — APPELL : Traité de mécanique rationnelle, vol. II, p. 395.  
Édition *Gauthier-Villars*, Paris, 1931.
- 8 — BAYARD : Cours d'électricité théorique.  
Professé à l'École Nationale Supérieure des Télécommunications, tome I, 1943.
- 9 — BAYARD : Relation entre les parties réelles et imaginaires des impédances et détermination des impédances en fonction de l'une des parties.  
*R.G.E.*, mai 1935, p. 659.
- 10 — BIOT et VON KARMAN : Les méthodes mathématiques de l'ingénieur-éditeur.  
Éditeur : *Librairie Polytechnique Charles Béranger*, Paris-Liège, 1949.
- 11 — BODE : Network analysis and feedback amplifier design.  
Éditeur : *Van Nostrand*, New-York, 1945.
- 12 — L. BOÉ : Dipôles et quadripôles.  
Édition : *E. Chiron*, Paris.
- 13 — BOUTHILLON : Quelques théorèmes sur les oscillations propres des systèmes de circuits.  
*R.G.E.*, mai 1922, p. 656.
- 14 — BROWN et CAMPBELL : Principles of Servomechanisms.  
Éditeur : *J. Wiley and Sons, Inc.*, New-York, 1948.
- 15 — CAHEN : Nouvelles analogies électromécaniques.  
*Bulletin S.F.E.*, 1950, p. 288.
- 16 — CAHN et DUSHKES : Analysis of some hydraulic components used in regulators and servomechanisms.  
*A.S.M.E., Paper 54, A 22*, 1952.
- 17 — COUFFIGNAL : Sur les conditions de stabilité des systèmes oscillants.  
*C.R.A.S.*, p. 594, 2° sem. 1943.
- 18 — CUENOD : Etude des propriétés d'un réglage automatique.  
*Bulletin technique de la Suisse Romande*, avril 1947, n° 9, p. 105.
- 19 — CUENOD : Influence des phénomènes de coups de bélier sur le réglage de la vitesse des turbines hydrauliques.  
*Houille Blanche*, mars-avril 1949, p. 163.
- 20 — CUENOD : Contribution à l'étude d'un réglage automatique.  
*Bulletin Association Suisse des Electriciens*, n° 18, 1950, p. 673.
- 21 — DANIEL : Accélération du réglage de la vitesse des turbines hydrauliques.  
Thèse de doctorat, publiée dans *la Houille Blanche*, n° 1-2, 1948.
- 22 — DANIEL : Le statisme des régulateurs et son élimination.  
*Houille Blanche*, n° 1/1950, p. 15.
- 23 — DANIEL : L'évolution des méthodes de répartition de la charge dans les réseaux interconnectés.  
*R.G.E.*, octobre 1946, p. 403.
- 24 — DEJON : Considérations sur les régulateurs des groupes générateurs hydro-électriques de basse chute.  
*R.G.E.*, août 1948, p. 315.
- 25 — DENIS-PAPIN KAUFMAN : Cours de calcul matriciel.  
Édition : *Albin Michel*, Paris, 1951.
- 26 — DESTOUCHES : Principes fondamentaux de physique théorique, tome II.  
Édition : *Hermann et Cie*, Paris, 1942.
- 27 — DUTILH : Théorie des servomécanismes à relais.  
*Onde Electrique*, octobre 1950, p. 438.
- 28 — FAVRE : Sur la généralisation d'une analogie entre cinq phénomènes de la mécanique.  
*Bulletin technique de la Suisse Romande*, 11/25 nov et 9 déc. 1944.
- 29 — GADEN : Etude de la stabilité d'un réglage automatique de vitesse par des diagrammes vectoriels en vue de l'utilisation du critère de Nyquist.  
*Informations techniques Charmilles*, n° 2, p. 1 (aussi en livre).
- 30 — GADEN : Asservissement temporaire et accéléromètre.  
*Bulletin technique de la Suisse romande*, 13 et 27 mars 1948, pp. 61 et 77. — Aussi en livre, éditeur : *E. Rouge et Cie*, Lausanne, Suisse.
- 31 — GADEN : Influence de certaines caractéristiques intervenant dans la condition de stabilité.  
*La Houille Blanche*, n° 3/1948, mai-juin. — Légèrement modifié dans un livre. Éditeur : *Éditions la Concorde*, Lausanne, Suisse, 1949.

- 32 — GADEN : Considérations sur le problème de stabilité.  
Editions : *La Concorde*, Lausanne, Suisse.
- 33 — HERMANN et SOURIAN : Un critère de stabilité pour les équations caractéristiques à coefficients réels ou complexes.  
*La Recherche Aéronautique*, mai-juin 1949, p. 19.
- 34 — JAMES, NICHOLS et PHILIPPS : Theory of Servomechanisms.  
Editeur : *McGraw Hill Book Co., Inc.*, New-York, 1947.
- 35 — KIESER : Die Regelung der Wasserturbinen.  
*Elektrotechnik und Maschinenbau*, n° 15/16, 14 avril 1944, p. 180.
- 36 — KOCHENBURGER : Analysis contactor servomechanisms.  
*Electrical Engineering*, avril 1950.
- 37 — G. KRON : Tensorial analysis of control systems.  
*Journal of applied mechanics*, juin 1948, p. 107.
- 38 — KUNTZMANN, DANIEL, MA MIN YUAN : Stabilité des systèmes de réglage R.G.E., mars 1952, p. 142.  
*R.G.E.*, mars 1952, p. 149.
- 39 — LE BLANC : La régulation automatique de haute précision.  
*Mesure*, année 1945, p. 429.
- 40 — LEHMANN : Note sur la précision maximum des servomécanismes parfaitement stables.  
*Onde électrique*, juin 1950, p. 267.
- 41 LEHMANN : Progrès récents dans la conception des servomécanismes.  
Office National de Recherches Aéronautiques, ONERA, vol. 2, pp. 1 à 51, août 1947.
- 42 — LÉONHARD : Die Selbsttätige Regelung.  
Editeur : *Springer Verlag*, Berlin, 1949.
- 43 — LOEB et CAHEN : Des réseaux électriques aux transmissions mécaniques.  
*Bulletin de l'Association Technique Maritime et Aéronautique*, 1948, p. 107.
- 44 — LUTHI : Reglerschwingungen und schiefwinkelige Vektordiagramme.  
*Schweizerische Bauzeitung*, avril 1942, p. 171.
- 45 — LUTHI : Conditions d'amortissement des équations de régulateurs d'un ordre quelconque.  
*Escher-Wyss - Mitteilungen*, 15/16, 1942-1943, p. 90.
- 46 — MA MIN YUAN et COTTON : Sur les critères de stabilité de Routh et de Hurwitz.  
*Bulletin des Sciences mathématiques*, tome LXXII, année 1948.
- 47 — MA MIN YUAN : Communication à l'A.E.R.A.  
Mai 1950.
- 48 — MAC COLL : Fundamental theory of servomechanisms.  
Editeur : *Vau Nostrand*, New-York, U.S.A.
- 49 — MAC MILLAN : Theory of control.  
Editeur : *At the University Press Cambridge*, 1951.
- 50 — MAGG : Indirekte Regulierung der Türbinen mit Benicksichtigung der Massenträgheit des Zuflusswassers.  
*Zeitschrift für das gesamte Türbinenwesen*, 1910, p. 273.
- 51 — MINORSKY : Non linear mechanics.  
Edition : *Edward Brothers, Inc.*, Arm Harbor Michigan, 1947, U.S.A.
- 52 — NASLIN : Les systèmes asservis.  
Edition de la *Revue d'Optique*, 1951.  
(Voir aussi, dans la revue *Mesures*, une suite d'articles commençant dans le numéro de mars 1951, p. 91.)
- 53 — NASSE : Etude de la stabilité du réglage de vitesse d'un groupe hydro-électrique.  
*Bulletin de la S.F.E.*, janvier 1951, p. 9.
- 54 — W. OPPELT : Grundgesetze der Regelung.  
Editeur : *Wolfbüttler Verlagsanstalt*, 1947.
- 55 — PARMENTIER : Analogies entre systèmes électriques et mécaniques.  
*Revue S.W.*, n° 2, avril 1949, p. 9.
- 56 — F.-H. RAYMOND : Transformée de Hilbert et Relations de Bayard-Bode.  
*Annales des Télécommunications*, oct. 1951, p. 262.
- 57 — F.-H. RAYMOND : Electronique et Automatismes.  
Edité sous les auspices du Syndicat des Constructeurs français des Machines-Outils (2 bis, rue de la Baume, Paris).
- 58 — SEEBERGER : Stabilité de la régulation des turbines hydrauliques.  
*Bulletin Escher-Wyss*, tome 21/22, 1948-1949, p. 43.
- 59 — STOKER : Non linear vibrations.  
*Interscience Publishers, Inc.*, New-York, 1950.
- 60 — TRIMMER : Response of Physical Systems.  
Editeur : *J. Wiley and Sons, Inc.*, New-York, 1950.
- 61 — VALIRON : Cours d'analyse mathématique, tome I : Théorie des fonctions.  
Editeur : *Masson et Cie*, Paris, 1942.

