Quelques résultats nouveaux concernant la régulation des turbines et des installations hydrauliques en général

(Application de quelques propriétés nouvelles des critères d'Hürwitz)

Some new results concerning turbine and hydraulic installation governing in general

PAR R. MEYER

INGÉNIEUR AUX ÉTABLISSEMENTS NEYRPIG

Grâce à quelques résultats nouveaux concernant la méthode d'Hürwitz, nous avons pu dégager des résultats nouveaux concernant la régulation des turbines et des installations hydrauliques. Deux points sont particulièrement importants :

1. La notion de colline d'amortissement;
2. Une étude préliminaire des installations munies de cheminées d'équilibre.

COLLINE D'AMORTISSEMENT. — Les régulateurs classiques ont 2 ou 3 paramètres principaux. On considère le plan de deux de ces paramètres. Pour une installation donnée, on peut associer à chaque régulateur, c'est-à-dire à chaque point du plan, un amortissement. Cet amortissement porté en cote permet de définir la colline d'amortissement de l'installation. La base de la colline est la limite du domaine de stabilité, son sommet définit un régulateur optimum pour l'installation donnée. Nous avons pu trouver la colline dans tous les cas classiques où on ne connaissait pratiquement que la limite de stabilité.

INSTALLATIONS MUNIES DE CHEMINÉE D'ÉQUILIBRE. — L'étude des installations munies de cheminée montre que la section de Thoma n'est pas un critère de stabilité. Il peut y avoir des installations stables, avec une section plus faible et inversement*. Le rapport s entre la section effective de la cheminée et la section de Thoma caractérise par contre la *difficulté* (et non la stabilité) du réglage. Cette difficulté peut être parfois insurmontable. Par ailleurs, si $s < 1$, il y a toujours instabilité aux faibles débits.

With the help of some new results concerning the Hürwitz method, it has become possible to obtain new results concerning the governing of turbines and hydraulic installations. Two points are of particular importance.

1. The notion of the "damping hill";
2. The preliminary study of installations equipped with surge tanks.

DAMPING HILL.—Classical type governors have two or three main parameters. The plane of two of these parameters is considered. For a given installation, a damping can be adopted for each governor, i.e., each point of the plane. It is thus possible to plot the contours of the damping hill of the installation on this plane. The seat of the hill is the boundary of the stability domain and its top defines an optimum governor for a given installation. In all cases of a classical nature, it was possible to plot the hill even though the stability limits were practically the only data known.

INSTALLATIONS EQUIPPED WITH SURGE TANKS.—The study of installations equipped with surge tanks shows that Thoma's section is not a criterion of stability. It is possible to have installations with a smaller section which are stable and vice versa*. The ratio s between the effective section of the surge tank and Thoma's section characterizes not the stability but the difficulty of governing. It may sometimes be impossible to overcome this difficulty. In addition, if $s < 1$, instability always accompanies low discharges.

* Ce résultat a été déjà trouvé expérimentalement par divers auteurs, en particulier EVANGELISTI. (Voir *Energia Elettrica*, 5/50.)

* This result has already been found experimentally by several authors, in particular, EVANGELISTI (see *Energia Elettrica*, 5/50).

SOMMAIRE

- I. — Introduction.
- II. — Installation réglée à débit constant et comprenant une adduction par conduite à coups de béliet (B) en masse, et un régulateur à asservissement permanent.
- III. — Même installation réglée à puissance constante.
- IV. — Installation réglée à puissance constante avec un régulateur accéléro-tachymétrique.
- V. — Même installation avec régulateur à asservissement temporaire.
- VI. — Installation réglée à puissance constante avec cheminée d'équilibre.
- VII. — Installation réglée à débit constant avec cheminée d'équilibre.
- VIII. — Installation avec coup de béliet d'onde.
- IX. — Conclusion.

I

INTRODUCTION

Le but de cet article est de donner quelques résultats nouveaux concernant la régulation des installations hydrauliques.

Ces résultats concernent la détermination en première approximation des caractéristiques principales des installations et des régulateurs susceptibles de les régler convenablement. Pour pouvoir énoncer des résultats assez généraux, il faut que les hypothèses de départ soient suffisamment simples. Pour l'étude reproduite ici, nous avons schématisé les installations et les régulateurs en adoptant des équations simples et linéarisées autour d'un point de fonctionnement. Nous insistons sur le fait que ce calcul ne peut (et ne veut) donner que des ordres de grandeur et des résultats approximatifs, valables dans le domaine des hypothèses restrictives faites ici. Ces résultats peuvent constituer la base d'une détermination complète et définitive des caractéristiques d'un régulateur. Cette détermination devra se faire par une méthode appropriée (voir par exemple réf. 4*, § II).

Les résultats que nous exposerons ici sont de deux espèces :

- a) Discussion de la possibilité d'un réglage stable d'une installation donnée et au moyen d'un régulateur d'un type donné;

- b) Détermination des caractéristiques optima que doit avoir un régulateur d'un type donné pour régler « au mieux » une installation donnée.

Cette deuxième partie nécessite la définition d'un optimum de réglage**. Nous allons expliquer la définition que nous adopterons.

D'abord nous rappelons que les équations de départ simplifiées, qui seront la base de notre étude, sont linéaires. Par conséquent, les mouvements des installations étudiées qui se déduiront de nos équations seront des superpositions de sinusoïdes amorties ou amplifiées du type :

$$A_1 e^{\lambda_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 e^{\lambda_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots$$

Nous appellerons ces sinusoïdes mouvements élémentaires de l'installation.

Les nombres A_1 ; $A_2 \dots$ et φ_1 ; $\varphi_2 \dots$ dépendent des conditions initiales; les nombres λ_1 , $\lambda_2 \dots$ uniquement de l'installation et du régulateur. La figure 1 montre un exemple d'oscillation d'une installation.

Pour qu'une installation munie d'un régulateur soit stable, il faut que les valeurs λ_1 ; $\lambda_2 \dots$ soient toutes négatives (autrement l'amplitude

* Les références bibliographiques se trouvent à la fin de cet article.

** On sait que « l'optimum de réglage » est susceptible de définitions différentes suivant le point de vue auquel on se place (voir Réf. 4, § II-1).

du mouvement deviendrait très grande au bout d'un temps suffisamment long). Les valeurs $-\lambda_1; -\lambda_2 \dots$ sont donc positives et s'appellent amortissements. Comme elles sont fonction des caractéristiques du régulateur, elles varient avec celles-ci. Considérons un cas particulier donné et agissons sur un paramètre du régula-

FIG. 1.

La figure du bas montre la décomposition (très schématique) en mouvements élémentaires.

teur que nous appellerons par exemple α . Les variations de α entraînent des variations des valeurs λ . La figure 2 montre un exemple de variation.

Pour chaque valeur α , l'amortissement le plus petit est seul intéressant (comme on le voit nettement sur la figure 1); c'est lui qui donne le mouvement le moins amorti de l'installation. Dans le cas de la figure 2, cet amortissement est $(-\lambda_1)$ pour $0 \leq \alpha \leq \alpha_2$ et $(-\lambda_2)$ pour $\alpha \geq \alpha_2$. Nous ne nous intéressons par la suite qu'à cet amortissement le plus faible et nous l'appellerons c ; donc $c = -\lambda_1$ pour $0 \leq \alpha \leq \alpha_2$ et $c = -\lambda_2$ pour $\alpha \geq \alpha_2$. La régulation est d'autant meilleure que c est grand. On voit donc que les valeurs de α , telles que α_1 ou α_2 , sont particulièrement intéressantes : elles donnent des valeurs de c maxima. Dans le cas de la figure 2, nous appellerons la valeur α_1 , qui donne l'amortissement c le plus grand, la va-

FIG. 2.

leur optima du paramètre. D'une façon générale, nous poserons par définition (*dans cet article seulement*) que pour une installation donnée le régulateur qui donne la valeur c la plus forte

possède les caractéristiques optima. En réalité, ceci ne constitue dans la plupart des cas qu'un optimum théorique. On verra souvent (par exemple au § IV), que d'autres régulateurs donnent en pratique un amortissement meilleur.

Pour obtenir la plupart des résultats publiés dans cet article, nous avons employé la méthode d'HURWITZ, qui convient le mieux dans le cas présent. Indiquons rapidement le processus de calcul et les propriétés dont nous servirons.

Dans chaque cas particulier, nous commencerons à chercher l'équation différentielle linéaire donnant les oscillations de l'installation. Cette équation permet de trouver l'équation algébrique donnant les fréquences et les amortissements des oscillations de l'installation. Ces grandeurs interviennent toujours ensemble par la combinaison $\lambda + j\omega$ (ω et λ sont une pulsation et son amortissement; $j = \sqrt{-1}$). Le nombre complexe $\lambda + j\omega$ est en général appelé p . Chaque installation munie d'un régulateur est donc caractérisée par une équation « en p » qui s'appelle l'équation caractéristique de l'installation. Les racines de cette équation fournissent les fréquences et amortissements des mouvements élémentaires.

Pour que l'installation soit stable, il faut donc que toutes les parties réelles des racines de l'équation caractéristique (c'est-à-dire tous les λ) soient négatives. Si l'équation caractéristique est algébrique, c'est-à-dire de la forme :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité sont les conditions d'HURWITZ.

CONDITIONS D'HURWITZ

a) Equation du 3° degré.

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \quad \text{avec } a_3 > 0$$

Elles sont :

$$a_2 > 0; \quad a_0 > 0$$

et :

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

b) Equation du 4° degré :

$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \quad \text{avec } a_4 > 0$$

Elles sont :

$$a_3 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_0 > 0$$

et :

$$a_3 a_2 a_1 > a_0 a_3^2 + a_4 a_1^2$$

Nous nous servirons aussi d'une propriété remarquable des conditions d'HURWITZ que nous n'avons trouvée mentionnée nulle part. En effet,

nous classerons les conditions d'HURWITZ en deux catégories entièrement différentes :

1. Les conditions limitant effectivement des domaines de stabilité;
2. Les conditions excluant en entier certains des domaines déterminés par les conditions précédentes.

Pour expliquer clairement de quoi il s'agit, nous étudierons l'équation (1) :

$$(1) \quad a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_i p_i + \dots + a_0 = 0$$

dans laquelle les a_n sont fonctions de k paramètres π_k , tels que $k < n + 1$. (En pratique, les paramètres π_k sont les paramètres caractérisant le régulateur et certaines grandeurs de l'installation non complètement déterminées a priori, comme la section de la cheminée d'équilibre.)

On détermine a_n pour que les a_i ne soient jamais infinis. A côté de cette équation nous considérons l'espace à $n + 1$ dimensions dont les axes portent les coefficients a_i . Cet espace sera appelé « l'espace des a_i ». Les points de cet espace, qui correspondent à l'ensemble des valeurs des paramètres π_k , forment un sous-espace à k dimensions, que nous appellerons « l'espace des π_k ».

Les conditions d'HURWITZ exprimées en a_i limitent des domaines de l'espace des a_i . Les limites sont des sous-espaces à n dimensions, que nous appellerons espaces d'HURWITZ en a_i . Dans l'espace des paramètres, il existera des sous-espaces d'HURWITZ en π_k . On les obtient en coupant les espaces d'HURWITZ en a_i par les espaces des π_k . Toute cette description d'espaces ne sert qu'à montrer qu'il suffit d'étudier l'analyse situs des espaces d'HURWITZ dans l'espace des a_i et que les mêmes dispositions sont valables dans tous les espaces π_k , quelles que soient les fonctions :

$$a_i = a_i(\pi_k).$$

Etudions donc la disposition des espaces d'HURWITZ dans l'espace des a_i . Partons du point A_1 , qui se trouve à l'intérieur d'un domaine de stabilité par exemple tel que $a_i = C_n^i$ (C_n^i sont les coefficients du binôme; toutes les racines sont alors égales à -1), et déplaçons-nous sur une courbe Γ pour atteindre le point A_2 défini par $a_i = (-1)^i C_n^i$, qui se trouve en dehors des domaines de stabilité (toutes les racines y sont $+1$).

Le point figuratif qui parcourt la courbe Γ est donc sorti du domaine de stabilité et a transpercé au moins un sous-espace d'HURWITZ. Admettons que le premier sous-espace d'HURWITZ ait été franchi au point M. En ce point, l'équation (1) a donc : soit une racine nulle, soit une racine infinie, soit deux racines $\pm j\omega$; ω étant

fini non nul (voir référence 3 B : méthode des séparatrices). Le point M se trouve donc : soit sur $a_0 = 0$, soit sur $a_n = 0$, soit sur $\mathcal{D}_{n-1} = 0$; $\mathcal{D}_{n-1} = 0$ étant donné par l'élimination de ω entre :

$$a_n \omega^n - a_{n-2} \omega^{n-2} + \dots = 0$$

et :

$$a_{n-1} \omega^{n-1} - a_{n-3} \omega^{n-3} + \dots = 0$$

Il n'y a donc que ces trois espaces d'HURWITZ qui peuvent limiter effectivement des domaines de stabilité; $\mathcal{D}_{n-1}$ est d'ailleurs le déterminant d'HURWITZ ayant $(n-1)$ lignes et $(n-1)$ colonnes. A priori, on pourrait donc croire que les conditions $a_n > 0$; $a_0 > 0$; $\mathcal{D}_{n-1} > 0$ suffisent pour assurer la stabilité. Il n'en est rien; il faut satisfaire les autres conditions d'HURWITZ puisque leur ensemble est nécessaire et suffisant pour que les racines de l'équation (1) aient leurs

FIG. 3.

Souvent $C_3 \equiv 0$ coupe $C_1 \equiv 0$ ou $C_2 \equiv 0$ en un de leurs points doubles.

parties réelles négatives (voir par exemple réf. 3).

Montrons dans un espace particulier la disposition de courbes (fig. 3).

Les courbes C_1 et C_2 limitent effectivement des domaines de stabilité et donnent comme domaines de stabilité possibles D_1 et D_2 . La courbe C_3 élimine le domaine D_2 en entier sans être elle-même limite d'un domaine de stabilité.

On peut d'ailleurs étudier d'une façon plus complète les espaces d'HURWITZ en général dans l'espace des a_i . Mentionnons simplement la propriété suivante qui nous servira par la suite :

L'espace :

$$E = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 = 0$$

qui limite les domaines de stabilité de l'équation du 4^e degré, a toujours des points, lignes ou espaces doubles à l'intersection de $a_1 = 0$ et $a_3 = 0$. Les tangentes aux points doubles (ou plans tangents aux lignes doubles, etc.), sont confondus si $a_2^2 = 4 a_0 a_4$.

Etudions maintenant les conditions d'optimum définies plus haut.

Les conditions à satisfaire pour que l'équation $f(p) = 0$ n'ait aucune racine à partie réelle supérieure à $-c$ peuvent être déterminées de la façon suivante :

On pose :

$$p = x - c,$$

d'où une nouvelle équation :

$$f(x - c) = g(x) = 0$$

Les conditions pour que $R(p) < -c^*$ sont les conditions d'HURWITZ de l'équation $g(x) = 0$. Le comportement des installations avec leur régulateur, que nous étudierons ici, dépend d'un certain nombre N de paramètres. Pour les cas traités ici $N \geq 2$. Nous fixerons $(N - 2)$ paramètres et discuterons dans le plan des deux paramètres libres (qui est un espace π_k particulier). Dans ce plan il existera, pour chaque valeur c donnée, un certain nombre de domaines à l'intérieur desquels $R(p) \leq -c$. Les courbes limitant ces domaines ne se coupent évidemment pas. De plus, si c augmente, l'aire de chaque domaine diminue. Il existe un nombre c tel que l'ensemble des domaines se réduisent à un ou plusieurs points : soit $c_{\max}$. Cette valeur $c_{\max}$ est alors l'amortissement maximum qu'on peut obtenir pour une installation donnée avec le type de régulateur envisagé. Pour $c > c_{\max}$, il n'existe alors plus de domaine dans le plan considéré. Si $c_{\max} < 0$, l'installation n'est jamais stable. Si $c_{\max} > 0$, les cas intéressants sont ceux pour lesquels c est compris entre zéro et $c_{\max}$. Si on porte en chaque point du plan des paramètres et perpendiculairement à ce plan une longueur proportionnelle à la valeur c correspondante, on obtient une colline graduée en amortissement c (voir par exemple fig. 4). Les courbes limites des domaines $R(p) \leq -c$ sont les projections

FIG. 4.

des courbes de niveau de la colline sur le plan des paramètres. Nous appellerons cette colline : colline d'amortissement. Les points intéressants de cette colline sont les sommets. Ils donnent l'amortissement maximum, donc le régulateur optimum, d'après la définition adoptée dans cet article.

Les seules courbes qui puissent limiter les domaines $R(p) < -c$ sont (comme on a vu) les conditions $a_n = 0$; $a_0 = 0$ et $\mathcal{O}_{n-1} = 0$ de l'équation $g(x)$. Si c varie, un domaine peut se réduire à un point, soit quand deux points d'intersection de $a_0 = 0$; $a_n = 0$ et $\mathcal{O}_{n-1} = 0$ se rencontrent, soit quand un domaine se réduit à un point double isolé. Il n'y a visiblement pas d'autre possibilité.

On peut faire une discussion générale très intéressante; nous pensons la publier ultérieurement. Etudions ici seulement le cas du 4^e degré avec deux paramètres, cas qui nous intéresse pour cet article.

Les intersections entre $a_0 = 0$ et $\mathcal{O}_{n-1} = 0$ sont données par :

$$a_0 = 0; \quad a_1 = 0$$

et :

$$a_0 = 0; \quad a_2 a_3 = a_1 a_4$$

Quand les points d'intersection se rencontrent, on a :

$$a_0 = 0; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = 0$$

($a_1 = 0$; $a_3 = 0$ est le point double de $\mathcal{O}_{n-1} = 0$). L'équation en x , et par conséquent celle en p , a une racine triple. Il en est de même pour $a_n = 0$ et $\mathcal{O}_{n-1} = 0$. Dans les cas étudiés par la suite, les paramètres seront choisis de telle sorte que $\mathcal{O}_{n-1} = 0$ soit une courbe unicursale. Si les tangentes au point double de $\mathcal{O}_{n-1} = 0$ se confondent, on a (comme mentionné plus haut) :

$$4 a_0 a_4 = a_2^2; \quad a_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_3 = 0$$

L'équation en x , et par conséquent celle en p , a alors deux racines doubles.

On voit que dans le cas de l'équation du 4^e degré avec deux paramètres choisis comme indiqué plus haut, les optima sont donnés soit par les conditions de racine triple, soit par les conditions de deux racines doubles. Pour cette dernière, il faut en plus que ces racines soient complexes conjuguées, donc que $a_4 a_2 < 0$. Cette condition est toujours remplie dans le domaine de stabilité. La limitation entre ces deux cas se fait par les conditions de racine quadruple qui donnent une relation entre les deux paramètres.

Justifions également le choix des exemples traités ici. Les installations hydro-électriques

* $R(\dots)$ veut dire : partie réelle de...

sont réglées à puissance constante (c'est-à-dire corrélativement à fréquence constante). Le réglage dynamique et statique doit être aussi parfait que possible; on emploie les régulateurs accélérotachymétriques ou les régulateurs à asservissement temporaire. Les installations d'adduction d'eau et d'irrigation sont réglées à débit

constant (et corrélativement à charge ou niveau constant). Souvent leur réglage ne nécessite pas une très grande précision; on se contente en général d'un régulateur à asservissement permanent.

Il serait évidemment facile de traiter d'autres exemples de la même façon que ceux traités ici.

II

INSTALLATION RÉGLÉE A DÉBIT CONSTANT ET COMPRENANT UNE ADDUCTION PAR CONDUITE A COUPS DE BÉLIER EN MASSE ET UN RÉGULATEUR A ASSERVISSEMENT PERMANENT.

Description de l'installation (fig. 5). — C'est une station brise-charge telle qu'elle est utilisée pour l'adduction d'eau des grandes villes (par exemple : Tunis). Elle sert à délivrer le débit demandé par l'aval avec une charge correspondant au plan

FIG. 5.

Schéma d'une station brise-charge.

d'eau dans le bassin à niveau réglé. Sans la station brise-charge, la charge sur le réseau d'adduction serait donnée par le plan d'eau de la retenue; celui-ci est parfois beaucoup trop élevé. Le régulateur détecte le niveau dans le bassin, agit sur la vanne et règle ainsi le débit pour que le plan d'eau dans le bassin reste (à peu près) constant.

EQUATIONS APPROXIMATIVES RÉGISSANT L'INSTALLATION*

Coups de bélier dans la conduite :

$$H_0 - \frac{L}{g \sigma_1} \frac{dQ}{dt} - K_1 Q^2 = \frac{K Q^2}{Y^2}$$

* Pour plus de détails en ce qui concerne l'établissement des équations et la description des régulateurs, nous renvoyons à la référence 1.

** On négligera les variations de niveau dans le bassin devant les autres variations de charge.

En plus des symboles définis sur la figure 5, on a :

$$g = 9,81 \text{ m/sec}^2;$$

K_1 = coefficient de perte de charge de la conduite;

K = coefficient de débit de l'obturateur;

Y = ouverture linéaire de l'obturateur.

Linéarisons cette équation en posant :

$$Q = Q_0 + q \quad Y = Y_0 + y$$

$$- \frac{L}{g \sigma_1} \frac{dq}{dt} - 2 K_1 Q_0 q = \frac{2 K Q_0 q}{Y_0^2} - \frac{2 K Q_0^2 y}{Y_0^3}$$

Compte tenu de :

$$H_0 = \left(K_1 Q_0 + \frac{K Q_0}{Y_0^2} \right) Q_0$$

et en posant :

$$z = \frac{K Q_0^2}{Y^2 H_0}$$

pourcentage de la charge totale dissipée dans l'orifice,

et :

$$\Theta = \frac{L}{g \sigma_1} \frac{Q_0}{H_0}$$

on a :

$$\Theta \frac{d(q/Q_0)}{dt} + 2 q/Q_0 = 2 z y/Y_0$$

Equation du remplissage du bassin :

$$S \frac{dq}{dt} = h \quad \text{ou} \quad \frac{S Q_0}{H_0} \frac{d(q/Q_0)}{dt} = \frac{h}{H_0}$$

on pose :

$$\frac{S H_0}{Q_0} = T$$

S : surface du bassin.

Equation de fonctionnement du régulateur :

$$\frac{dy}{dt} = -K_0(h + \sigma y)$$

K_0 : rapidité de réponse du régulateur.

σ : degré d'asservissement.

Pour chercher les mouvements possibles du système, on pose :

$$y = y_0 e^{pt}; \quad h = h_0 e^{pt}, \quad \text{etc...}$$

(on sait en effet que ce sont les seuls possibles puisque les équations sont linéaires). Moyennant ces transformations, on trouve une équation à laquelle doivent satisfaire les nombres p . Cette équation est :

$$\Theta^3 p^3 + \Theta^2 p^2 (\lambda + 2) + 2 \lambda \Theta p + 2 \mu = 0$$

où :

$$\lambda = K_0 \sigma \Theta^*$$

$$\mu = \frac{K_0 \alpha Q_0 \Theta^2}{S Y_0}$$

Pour plus de simplicité, on peut poser :

$$\Theta p = z$$

D'où :

$$z^3 + z^2 (\lambda + 2) + 2 \lambda z + 2 \mu = 0$$

Cherchons tout de suite les conditions à remplir pour que les racines de cette équation aient une partie réelle inférieure à c . Nous posons donc :

$$z = x - c$$

d'où :

$$x^3 + x^2 (\lambda + 2 - 3c) + x (3c^2 - 4c - 2c\lambda + 2\lambda) - c^3 + c^2 (\lambda + 2) - 2c\lambda + 2\mu = 0$$

Les critères d'HURWITZ donnent :

$$C_1 \equiv \lambda + 2 - 3c > 0$$

$$C_2 \equiv (\lambda + 2 - 3c) (3c^2 - 4c - 2c\lambda + 2\lambda)$$

$$- [-c^3 + c^2 (\lambda + 2) - 2c\lambda + 2\mu] > 0$$

$$C_3 \equiv -c^3 + c^2 (\lambda + 2) - 2c\lambda + 2\mu > 0$$

* A ne pas confondre avec le symbole λ utilisé dans § 1 pour $R(p)$; cette dernière signification ne sera plus utilisée par la suite.

Nous discuterons dans le plan $\lambda; \mu$.

Dans ce plan, les courbes $C_1 = 0$ et $C_3 = 0$ sont des droites; $C_2 = 0$ est une parabole. On remarque que les trois courbes se coupent en un même point que nous appellerons P_1 . Le deuxième point d'intersection de C_2 et C_1 est à l'infini; celui de C_2 et C_3 est sur $3c^2 - 4c - 2c\lambda + 2\mu = 0$, nous l'appellerons P_2 .

FIG. 6.

La limite du domaine de stabilité est donnée par $c = 0$ (fig. 6).

Si c croît, on s'aperçoit que les courbes se déforment de façon continue comme indiqué par les grosses flèches. (Seuls $C_3 = 0$ et $C_2 = 0$ peuvent limiter effectivement des domaines, comme on l'a vu dans le § 1.)

FIG. 7.

Schéma d'une colline d'amortissement. Installation : fig. 5.
Réglée : en débit.

Régulateur : à asservissement permanent.
Plan de base : $\lambda; \mu$.

On obtient la disposition d'ensemble visible sur la figure 7. Elle montre l'allure de la colline d'amortissement qui s'étend vers la droite et le haut. Le sommet de cette colline est donné par $c = 1$ et est à l'infini sur la courbe lieu de P_2 .

On peut facilement calculer le lieu des points P_2 . Il est donné par :

$$\lambda = \frac{4c - 3c^2}{2(1-c)}$$

$$\mu = \frac{c^2(c-2)}{4(1-c)}$$

Pour une installation donnée et pour une rapidité de réponse donnée à l'avance, l'optimum est fourni par le point P_2 . Pour un degré d'asservissement donné, l'optimum est $K_0 = \infty$. Les relations entre K_0 , σ et c , définissant les points P_2 , sont :

$$K_0 = \frac{SY}{\beta Q \Theta^2} \frac{c^2(c-2)}{4(1-c)}$$

$$\sigma = \frac{2\beta Q \Theta}{SY} \frac{4-3c}{c(c-2)^2}$$

On obtient dans le plan σ, K_0 les courbes données par la figure 8; elles définissent la colline d'amortissement dans le plan σ, K_0 .

L'optimum absolu serait donné par :

$$K_0 = \infty \quad \sigma = \frac{2\alpha Q \Theta}{SY}$$

FIG. 8.

Schéma d'une colline d'amortissement. Installation : fig. 5.

Réglée : en débit.

Régulateur : à asservissement permanent.

Plan de base : $K_0; \sigma$.

L'amortissement c donne alors un mouvement décroissant comme $e^{-t/\Theta}$. Cela veut dire que la régulation ne peut pas être plus rapide que ne le permet l'inertie de l'eau dans la conduite, ce qui était évidemment à prévoir.

III

MÊME INSTALLATION RÉGLÉE A PUISSANCE CONSTANTE

Ce cas a déjà été traité par plusieurs auteurs en ce qui concerne la stabilité simple (voir par exemple réf. 1). Le coup de béliet se détermine comme avant : la charge sur l'orifice est

$$\frac{h}{H_n} = -\Theta \frac{d(q/Q_0)}{dt} - 2\beta q/Q_0$$

où H_n est la chute nette en régime établi.

$$\Theta = \frac{L}{g\sigma} \frac{Q_0}{H_n}$$

(avant, Θ était calculé avec H_0).

$$\beta = \frac{\Delta H}{H_n}$$

ΔH : perte de charge dans l'adduction en régime établi.

La turbine établit les relations :

$$Q = K'Y \sqrt{H_n}$$

$$P = \eta Q H_n$$

η : rendement de la turbine.

Nous supposons η constant; on obtient alors, après linéarisation (mêmes notations que dans l'exemple précédent) :

$$\frac{q}{Q_0} = \frac{y}{Y_0} + 1/2 \frac{h}{H_n}$$

$$\frac{\Delta P}{\eta Q_0 H_n} = \frac{q}{Q_0} + \frac{h}{H_n}$$

La roue donne :

$$I \frac{d\Omega}{dt} = \Delta P$$

et le régulateur :

$$\frac{dy}{dt} = -K_0(\Omega + \sigma y)$$

L'ensemble de ces équations est traité comme avant. D'où une équation en p qui est :

$$\Theta^3 p^3 + \Theta^2 p^2 (\lambda + 2) + \Theta p \left[2\lambda - (3\beta - 1) \frac{K_0 \Theta}{Y_0 \tau} \right] + \frac{K_0 \Theta}{Y_0 \tau} [6\beta^2 + 2 - 6\beta] = 0$$

avec :

$$\lambda = K_0 \sigma \Theta \quad \text{et} \quad \tau = \frac{I}{\tau_1 Q_0 H_n}$$

Dans les installations hydro-électriques, $3\beta - 1$ et $6\beta^2 + 2 - 6\beta$ sont en général très voisins, nous les assimilons à leur moyenne :

$$\frac{1 - 3\beta + 6\beta^2}{2}$$

et posons :

$$\frac{K_0 \Theta}{Y_0 \tau} \frac{1 - 3\beta + 6\beta^2}{4} = \mu$$

En plus, on a intérêt à poser $\Theta p = z$. D'où :

$$z^3 + z^2(\lambda + 2) + 2z(\lambda - \mu) + 2\mu = 0$$

FIG. 9.

Comme avant, on pose :

$$z = x - c$$

d'où :

$$\begin{aligned} & x^3 + x^2(\lambda + 2 - 3c) \\ & + x(3c^2 - 4c - 2c\lambda + 2\lambda - 2\mu) \\ & - c^3 + c^2(\lambda + 2) - 2c(\lambda - \mu) + 2\mu = 0 \end{aligned}$$

Les conditions d'HURWITZ donnent :

$$C_1 \equiv \lambda + 2 - 3c > 0$$

$$C_2 \equiv (\lambda + 2 - 3c)(3c^2 - 4c - 2c\lambda + 2\lambda - 2\mu) - [-c^3 + c^2(\lambda + 2) - 2c(\lambda - \mu) + 2\mu] > 0$$

$$C_3 \equiv -c^3 + c^2(\lambda + 2) - 2c(\lambda - \mu) + 2\mu > 0$$

Dans le plan λ, μ , les domaines acceptables sont encore déterminés par trois courbes : $C_1 = 0$; $C_2 = 0$ et $C_3 = 0$. Deux de ces courbes sont des droites et la troisième est ici une hyperbole.

La disposition des courbes est à peu près la même que dans le cas précédent : les trois courbes se

FIG. 10.

Schéma d'une colline d'amortissement. Installation : fig. 5

Réglée : en puissance.

Régulateur : à asservissement permanent.

Plan de base : $\lambda; \mu$.

coupent en un point : P_1 . En outre C_1 coupe C_2 à l'infini et C_3 coupe C_2 en P_2 donné par :

$$3c^2 - 4c - 2c\lambda + 2\lambda - 2\mu = 0.$$

Pour $c=0$ on obtient le domaine de stabilité représenté sur la figure 9.

Si c croît, les courbes se déforment selon le sens des flèches.

On peut encore chercher le lieu du point P_2 . Il est donné par :

$$\lambda = \frac{c(4 - c - 2c^2)}{2 - 2c - c^2}$$

$$2\mu = \frac{c^2(c - 2)^2}{2 - 2c - c^2}$$

La disposition d'ensemble est donnée par la figure 10, qui montre l'allure de la colline d'amortissement. Cette colline s'étend à droite et vers le haut. Son sommet est à l'infini sur la courbe lieu de P_2 . Il correspond à $c = \sqrt{3} - 1$.

FIG. 11.

Schéma d'une colline d'amortissement. Installation : fig. 5.

Réglée : en puissance.

Régulateur : à asservissement permanent.

Plan de base : $K_0; \sigma$.

En passant dans le plan $K_0 \sigma$, on voit que pour une valeur K_0 donnée l'optimum correspond au point P_2 , tandis que pour une valeur σ donnée l'optimum correspond à $K_0 = \infty$ (la figure 11 montre la colline d'amortissement dans ce plan).

Si β est négligeable, le point figuratif d'une installation se déplace sur une droite $\frac{\lambda}{\mu} = C^{te}$; si on change le débit p est donné par $\frac{c}{\Theta} \sim \frac{c}{\lambda}$.

On voit que le réglage à puissance constante

est un phénomène moins stable et plus difficile à obtenir que le réglage à débit constant. Ceci est une règle pratiquement générale, qui sera expliquée dans une publication ultérieure. Il en est de même du réglage à pression constante, d'où l'idée de faire un dosage entre ces réglages et le réglage à puissance constante (voir par exemple réf. 2).

Pour une installation donnée, l'amortissement maximum n'est ici que :

$$e^{-t/\Theta} (\sqrt{3}-1)$$

IV

INSTALLATION RÉGLÉE A PUISSANCE CONSTANTE AVEC UN RÉGULATEUR ACCÉLÉROTACHYMÉTRIQUE

(Voir aussi référence n° 1)

Toutes les équations de départ, sauf celle du régulateur, sont les mêmes que dans le § III, soit :

$$\frac{h}{H_n} = -\Theta \frac{d(q/Q_0)}{dt} - 2\beta \frac{q}{Q_0}$$

$$\frac{q}{Q_0} = \frac{y}{Y_0} + \frac{1}{2} \frac{h}{H_n}$$

$$\frac{\Delta P}{\eta Q H} = \frac{q}{Q_0} + \frac{h}{H_n}$$

Pour le régulateur, on a :

$$\frac{dy}{dt} = -K_0 \Omega - K_1 \frac{d\Omega}{dt}$$

On obtient par le même procédé qu'avant, en négligeant β devant 1 (dans une certaine mesure, comme au § III) et en posant :

$$\lambda = \frac{\Theta K_1 (1 - \beta)}{\tau Y}$$

$$\mu = \frac{\Theta^2 K_0 (1 - \beta)}{\tau Y}$$

et :

$$p \Theta = z$$

$$z^3 + 2z^2(1 - \lambda) + 2z(\lambda - \mu) + 2\mu = 0$$

Comme avant, nous posons :

$$z = x - c$$

et nous obtenons une équation en x , dont les conditions d'HURWITZ sont :

$$C_1 \equiv \lambda - \frac{2 - 3c}{2} > 0$$

$$C_2 \equiv (2 - 2\lambda - 3c)(3c^2 - 4c + 4c\lambda + 2\lambda - 2\mu) - [-c^3 + c^2(1 - \lambda) - 2c(\lambda - \mu) + 2\mu] > 0$$

$$C_3 \equiv -c^3 + 2c^2(1 - \lambda) - 2c(\lambda - \mu) + 2\mu > 0$$

Pour $c = 0$, on obtient le domaine de stabilité (fig. 12).

Quand c augmente, le domaine se rétrécit; il

FIG. 12.

FIG. 13. — Colline d'amortissement. — Installation : fig. 5.
Régée : en puissance. — Régulateur : accélérotachymétrique ou à asservissement temporaire
avec $\gamma = 0$ (notation § V). Plan de base : λ ; μ .

reste toujours limité par les courbes $C_2 = 0$ et $C_3 = 0$, comme il ressort du § 1. Leurs points de rencontre sont donnés par $C_1 = 0$ et $C_3 = 0$ pour P_1 ; $C_3 = 0$ et $3c^2 - 4c + 4c\lambda + 2\lambda - 2\mu = 0$ pour P_2 . On obtient la disposition visible sur la

figure 13. Cette figure montre la colline d'amortissement, dont le sommet est le point M.

Ce point est à l'intersection des courbes lieux de P_1 et P_2 . On a alors :

$$\lambda = \frac{2 - 3c}{2}$$

$$-3c^2 - 4c + 4c\lambda + 2\lambda - 2\mu = 0$$

$$-c^3 + 2c^2(1 - \lambda) - 2c(\lambda - \mu) + 2\mu = 0$$

ce qui permet de calculer les caractéristiques optima. Ces conditions reviennent à écrire que l'équation en z a une racine triple (comme on a vu au § D). On trouve :

$$\lambda = \frac{5 - 3\sqrt[3]{3}}{2} \approx 0,3366 \dots$$

$$\mu = \frac{1}{2} (\sqrt[3]{3} - 1)^3 \approx 0,04325 \dots$$

$$c = \sqrt[3]{3} - 1 = 0,44225 \dots$$

On constate que le réglage optimum est moins

FIG. 13 bis. — Vue, à 3 dimensions, de la colline d'amortissement de la fig. 13.

bon qu'avec un régulateur à asservissement fixe, mais ici il n'y a pas d'erreur statique comme avant.

La figure 13 bis présente une vue de la colline d'amortissement réalisée à trois dimensions. La colline à trois dimensions donne une image beaucoup plus saisissante. Elle montre en particulier qu'il est plus intéressant de se placer en un point tel que A (fig. 13) qu'au sommet M de la colline. En effet, au voisinage du point M, une légère erreur sur les coefficients affecte beaucoup plus l'amortissement.

D'autre part, on voit aussi que la colline est très pointue et qu'il ne faut de toute façon pas espérer avoir un amortissement supérieur à $c \approx 1/3$.

Pour une installation donnée, les points correspondant aux régimes permanents pour les différentes puissances demandées au groupe sont approximativement situés sur une parabole $\mu = k\lambda^2$. L'amortissement varie donc avec la puissance. Pour avoir une bonne stabilité aux charges partielles, il est une fois de plus intéressant de placer le point correspondant à la pleine charge au voisinage du point A.

V

MÊME INSTALLATION AVEC RÉGULATEUR A ASSERVISSEMENT TEMPORAIRE

Négligeons tout de suite les pertes de charge dans la conduite. On a alors (voir § IV) :

$$\begin{aligned}\frac{h}{H_n} &= -\Theta \frac{d}{dt} \frac{q}{Q_0} \\ \frac{q}{Q_0} &= \frac{y}{Y_0} + 1/2 \frac{h}{H_n} \\ \frac{\Delta P}{\eta Q_0 H_n} &= \frac{q}{Q_0} + \frac{h}{H_n} \\ I \frac{d\Omega}{dt} &= \Delta P\end{aligned}$$

et pour le régulateur (voir par exemple réf. 1) :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -K_0(\Omega + z) \\ \frac{dz}{dt} &= \sigma \frac{dy}{dt} - \frac{z}{T_r}\end{aligned}$$

K_0 = rapidité de réponse du régulateur.

σ = degré d'asservissement temporaire.

T_r = temps de relaxation du dash-pot.

On pose :

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{1}{K_0 \sigma \Theta + \frac{\Theta}{T_r}} \\ \mu &= \frac{K_0 \Theta^3}{Y \tau T_r} \cdot \nu \\ \lambda &= \frac{K_0 \Theta^2}{Y \tau} \cdot \nu \\ \Theta p &= z\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\nu z^4 + z^3(1 + 2\nu) + 2z^2(1 - \lambda) \\ + 2z(\lambda - \mu) + 2\mu = 0\end{aligned}$$

On voit que pour $\nu = 0$ on obtient exactement la même équation que dans le cas précédent. (Les paramètres sont évidemment formés au moyen d'autres grandeurs physiques.) Nous pouvons déjà conclure que pour $\nu = 0$ nous avons la même colline d'amortissement qu'avant. Quand ν varie, nous obtenons une famille de collines à un paramètre, dont le plan de base est le plan $\lambda; \mu$. Si ν est négatif, il n'y a pas de stabilité possible : en effet, il faudrait $\mu < 0$; $\mu > \lambda$ et $\lambda > 1$, ce qui est incompatible. Par contre, pour toutes les valeurs ν positives, il existe un domaine de stabilité. Les domaines à l'intérieur desquels l'amortissement est supérieur à une valeur c donnée, sont limités par une hyperbole et une droite; pour chaque valeur $\nu > 0$, le sommet de la colline est donné par la condition de racine triple de l'équation en z (tout ceci ressort du § I).

Pratiquement, on constate que les collines s'amenuisent quand ν croît : leur base devient plus petite et leur sommet moins haut. Ces modifications sont d'abord insignifiantes (pour environ $\nu < 1/4$), puis s'accroissent, et pour $\nu \rightarrow \infty$ la colline se réduit à un point. En se transformant, les collines deviennent en partie moins escarpées et leur sommet se déplace. La figure 14 montre l'enveloppe de ces collines à ν variable. On constate que la colline $\nu = 0$ forme une grande partie de l'enveloppe.

Néanmoins, il n'est pas toujours souhaitable de choisir un ν très petit parce que la colline relative à $\nu = 0$ est très rapidement tombante

FIG. 14. — Enveloppe des collines $v = C^0$.

dans certaines régions. Une discussion détaillée nous mènerait trop loin. D'autre part, on peut toujours choisir v suffisamment petit : il suffit de faire $K_0 \sigma$ assez grand par rapport à $1/\Theta$, ce qui est toujours possible.

En conclusion, on peut dire que les performances des deux régulateurs sont à peu près identiques (dans le cadre des hypothèses faites ici). Par la suite, nous admettrons leur équivalence (pour des raisons de simplicité de calcul). Les correspondances sont alors les suivantes :

$$K_0 \longleftrightarrow \frac{1}{\sigma}$$

$$K_1 \longleftrightarrow \frac{1}{\sigma T_r}$$

En outre, il faut (pour le régulateur à asservissement temporaire) que $K_0 \sigma$ soit grand devant $1/\Theta$, et, d'une façon générale, devant certaines constantes de temps de l'installation.

Comme dans le cas précédent, ces conditions peuvent donner des résultats pessimistes en ce qui concerne les régulateurs à asservissement temporaire : ces derniers ont un paramètre de liberté de plus auquel nous donnons une certaine valeur *a priori*.

VI

INSTALLATION RÉGLÉE A PUISSANCE CONSTANTE AVEC CHEMINÉE D'ÉQUILIBRE

ÉQUATIONS *

1) ADDUCTION** (mêmes notations qu'au § V).

* Nous écrivons tout de suite les équations linéarisées; pour le processus de linéarisation, voir § II.

** Pour certaines notations, voir figure 15.

Coup de bélier dans la conduite :

$$\Theta \frac{d(q_1/Q_0)}{dt} + 2\beta \frac{q_1}{Q_0} = \frac{h}{H_n}$$

Niveau dans la cheminée :

$$T \frac{d(h/H_n)}{dt} = \frac{q_2}{Q_0} \quad \text{avec } T = \frac{S H_n}{Q_0}$$

Continuité au bas de la cheminée :

$$\frac{q_3}{Q_0} = \frac{q_1}{Q_0} - \frac{q_2}{Q_0}$$

Equation de l'orifice (turbine) :

$$\frac{q_3}{Q_0} = \frac{y}{Y_0} + \frac{1}{2} \frac{h}{H_n}$$

FIG. 15.

Puissance*** :

$$\frac{\Delta P}{\gamma Q_0 H_n} = \frac{y}{Y_0} + \frac{3}{2} \frac{h}{H_n}$$

avec :

$$\gamma = \frac{1}{2\beta}$$

Comme les équations sont linéaires, on peut poser comme avant :

$$y = y_0 e^{pt}; h = h_0 e^{pt} \quad \text{etc...}$$

D'où on trouvera la relation entre \$\Delta P\$ et \$y\$ caractérisant l'adduction.

2) RÉGULATEUR

On a, comme avant :

$$\frac{y_0}{Y_0} = - \frac{1 + mp}{\tau_1^2 p^2} \frac{(\Delta P)_0}{\gamma Q_0 H_n}$$

avec :

$$m = \frac{K_1}{K_0} \quad \text{ou} \quad T_r$$

$$\frac{1}{\tau_1^2} = \frac{\gamma Q_0 H_n}{I Y} K_0 \quad \text{ou} \quad \frac{\gamma Q_0 H_n}{I Y} \frac{1}{\sigma T_r}$$

On voit ici apparaître la section de THOMA; elle est donnée par :

$$\Delta P = 0$$

Posons :

$$S = s \cdot S_T$$

\$S_T\$ section de THOMA

et :

$$\frac{\Theta}{2\beta} = 0$$

D'où :

$$\frac{(\Delta P)_0}{\gamma Q_0 H_n} = \frac{y_0}{Y_0} \frac{s^2 p^2 + \Theta p (s - 1) + \gamma - 1}{s^2 p^2 + \Theta p (s + 1/2) + \gamma + 1/2}$$

L'équation en \$p\$ s'en déduit. Elle est :

$$\begin{aligned} & s^2 \tau_1^2 p^4 + p^3 [\Theta \tau_1^2 (s + 1/2) + m s \Theta^2] \\ & + p^2 [\tau_1^2 (\gamma + 1/2) + s \Theta^2 + \Theta (s - 1) m] \\ & + p [\Theta (s - 1) + m (\gamma - 1)] \\ & + \gamma - 1 = 0 \end{aligned}$$

Pour simplifier, posons :

$$\frac{\tau_1^2}{\Theta^2} = t \quad \frac{m}{\Theta} = u \quad \Theta p = z \quad \gamma - 1 = a$$

*** Comme avant nous admettons \$\gamma = c^{\circ}\$.

\$a\$ dépend uniquement de l'installation, de même

z/p , μ et t sont à déterminer, s est plus ou moins fixé.

D'où :

$$tsz^4 + z^3 [t(s + 1/2) + \mu s] + z^2 [t(a + 3/2) + s + \mu(s - 1)] + z(s - 1 + \mu a) + a = 0$$

L'une des conditions de stabilité ne dépend que de l'installation et non du régulateur : c'est $a > 0$

$$\left[\text{puisque } ts > 0 \left(t = \frac{\tau^2}{\theta^2} \right) \right]$$

Nous supposons toujours par la suite $a > 0$. Ceci revient à dire que la perte de charge dans la conduite est inférieure au tiers de la charge brute. Cette condition doit toujours être remplie. Alors s , t et a sont obligatoirement des grandeurs positives.

Cherchons les limites de stabilité. En écrivant l'équation :

$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

ces conditions sont :

$$C_1 \equiv a_1 > 0$$

$$C_3 \equiv a_3 > 0$$

$$C_2 \equiv a_1 a_2 a_3 - (a_0 a_3^2 + a_4 a_1^2) > 0$$

Nous discuterons dans le plan t, μ .

$C_1 = 0$ et $C_3 = 0$ représentent des droites. $C_2 = 0$ est une cubique. Etudions cette cubique. Nous savons (voir § 1) qu'elle a un point double donné par $a_1 = 0$; $a_3 = 0$, c'est-à-dire en :

$$\mu = \frac{1-s}{a}; \quad t = -\frac{s(1-s)}{(s+1/2)a}$$

Elle est donc unicursale (ce qui facilite énormément la discussion). De plus, ses directions asymptotiques sont données par :

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2 a_3 = a_1 a_4.$$

L'asymptote parallèle à $a_1 = 0$ est donnée par :

$$\mu = \frac{1-s}{a} + \frac{s+1/2}{a+3/2} = 3/2 \frac{a+1-s}{a(a+3/2)}$$

La cubique coupe l'axe $t = 0$ en

$$\mu = 0 \quad \text{et} \quad \mu^2 a + \mu(s-1) + s = 0$$

On voit que les deux derniers points sont entre l'origine et :

$$\mu = \frac{1-s}{a}$$

L'axe $\mu = 0$ est coupé en $t = 0$; $t = \infty$ et :

$$t = -\frac{s(1-s)}{(a+1-s)(s+1/2)}$$

La cubique ne dégénère que pour $s = 0$; $s = 1$ et $s = \infty$.

Ces renseignements suffisent pour déterminer

FIG. 16.

la forme de la cubique. Il y a trois cas qui se présentent :

$$1) \quad 1 > s > 0$$

$$2) \quad 1 + a > s > 1$$

$$3) \quad \infty > s > 1 + a$$

Premier cas

$$0 < s < 1$$

Pour $s = 0$, on obtient la figure 16.

La cubique dégénère en une hyperbole et la droite $t = 0$.

Les conditions $a_4 > 0$; $a_1 > 0$ éliminent un arc

FIG. 17. — La déformation, entre fig. 16 et fig. 17, est continue : l'axe $t = 0$ et l'arc d'hyperbole à droite du point $\mu = 1/a$ de la fig. 16 se transforment en deux arcs de cubique dans le domaine $t < 0$ de la fig. 17.

d'hyperbole, l'autre limite l'unique domaine de stabilité.

FIG. 18. — L'arc Γ de la fig. 17 est devenu une partie d'arc d'hyperbole (partie de droite $t > 0$) et une partie de l'axe $t = 0$ (partie $\mu > 1$). Le point $\mu = 1$ est un point double accidentel; le point double ordinaire est à l'origine. Le segment $t = 0$; $0 \leq \mu \leq 1$ et la partie $t < 0$ de l'arc d'hyperbole de droite proviennent d'un des arcs de cubique du domaine $t < 0$ de la fig. 17.

Pour $1 > s > 0$, on obtient la figure 17.

Seul l'arc Γ de la cubique limite un domaine stable.

Pour $s = 1$

La cubique dégénère de nouveau en $t = 0$ et une hyperbole (fig. 18).

Deuxième cas

$$1 + a > s > 1$$

FIG. 19. — Le point double accidentel près de $\mu = 1$ a disparu. Pour une famille de courbe (par exemple $a = C^0$), il est d'ailleurs un col: ici l'arc d'hyperbole de droite $t > 0$ de la fig. 18 et le segment $t = 0$; $0 \leq \mu \leq 1$ se sont transformés en un arc jointif. C'est le seul qui subsiste dans le quadrant $t > 0$; $\mu > 0$.

FIG. 20. — Si s croît, le point d'intersection de la cubique et de son asymptote verticale se déplace continuellement vers le haut. Pour $s = s_0$, il est à l'infini et pour $s > s_0$, il est dans la région $t < 0$.

Il y a deux sous-cas.

$$s < s_0 \text{ (fig. 19).}$$

$$s > s_0 \text{ (fig. 20).}$$

s_0 est une fonction très compliquée de a .

Troisième cas

$$s > 1 + a \text{ (fig. 21).}$$

FIG. 21.

Si $s \rightarrow \infty$, on a la figure 22.

FIG. 22.

On voit que l'installation peut être stable, quelle que soit la section de la cheminée, mais si $s < 1$, c'est-à-dire si la section de la cheminée est inférieure à la section de THOMA, μ doit être $\frac{3}{2} \frac{a+1-s}{a(a+3/2)}$ tandis que si $s > 1$, μ peut être beaucoup plus petit. Pour une installation donnée et un régulateur donné, le point figuratif dans le plan t, μ se déplace sur une parabole quand la puissance de régime varie. Si $Q_0 \rightarrow 0$, le point figuratif tend vers l'origine : pour $s < 1$, l'installation est alors instable.

Bien que l'installation puisse être stable pour des débits suffisants, quelle que soit la section de la cheminée d'équilibre, il est bien évident que parfois les conditions de stabilité peuvent exiger des régulateurs techniquement impossibles à réaliser. Pour fixer l'ordre de

FIG. 23. — Le domaine $R(p) \leq -c$ est limité par un arc de cubique ($Q_{n-1} = 0$) et la droite $a_0 = 0$, comme il ressort du § I.

grandeur du régulateur à adopter dans chaque cas, nous chercherons le point optimum dans le plan t, μ . Ce point et la courbe de stabilité don-

nent une idée de l'ordre de grandeur à adopter pour chaque installation avec les hypothèses faites ici. Etudions séparément les trois cas définis précédemment.

Premier cas

$$0 < s < 1$$

Si c varie, on obtient d'abord la disposition de la figure 23.

L'optimum peut être donné par une racine triple.

Mais si c augmente, le point double se déplace sur la cubique et la disposition de la figure 24

FIG. 24.

est possible. Celle-ci donne un optimum avec deux racines complexes conjuguées.

Deuxième cas

$$1 + a > s > 1$$

Dans ce cas, le domaine peut se diviser en deux, comme le montre la figure 25.

FIG. 25.

Le domaine D_1 se réduit à un point seulement pour la condition de deux racines doubles.

En général, D_2 n'est alors pas encore ponctuel. Il y a donc deux valeurs critiques pour c .

On peut également étudier le cas de la régulation avec tachymètre seul ($\mu = 0$). Il y a alors un domaine possible, mais en général insuffisamment stable, sauf si la cheminée est très grande.

On obtient dans ce cas l'équation en z suivante :

$$t s z^4 + t(s + 1/2) z^3 + [t(a + 3/2) + s] z^2 + z(s - 1) + a = 0.$$

La stabilité exige $a > 0$; $s > 1$; $t > 0$, et en plus, si $a + 1 - s > 0$:

$$t < \frac{s(s-1)}{(a+1-s)(s+1/2)}$$

L'optimum est donné par la racine double de l'équation en z .

Troisième cas

Discussion analogue au deuxième cas.

Si l'optimum est donné par la condition de racine triple, l'amortissement est la plus petite racine négative de l'expression :

$$\begin{aligned} & s^3 z^6 + 3 s^2 (s-1) z^5 + 3 s [s a + (s-1)^2] z^4 \\ & + [3 s a (2s - 5/2) + (s-1)^2 (s^2 - 2s - 1/2)] z^3 \\ & + 3 a (s a - s^2 - s + 1/2) z^2 \\ & + 3 a^2 (s + 1/2) z + a^2 (a + 3/2) = 0 \end{aligned}$$

FIG. 26. — Si a est compris entre zéro et la valeur correspondante à A, A' ou A'', les mouvements de l'installation sont apériodiques, sinon ils sont oscillatoires.

Connaissant cette racine, on en déduit t et μ pour les relations :

$$\begin{aligned} & [t(a + 3/2) + s + \mu(s-1)] z^2 \\ & + 3(s-1 + \mu a) z + 6a = 0 \\ & 6 t s z^2 + 3 [t(s + 1/2) + \mu s] z + t(a + 3/2) \\ & + s + \mu(s-1) = 0 \end{aligned}$$

Si l'optimum est donné par la condition de deux racines doubles, l'amortissement est la plus petite racine négative de :

$$\begin{aligned} & [16 s^4 (s-1)^2 - 64 a s^5] z^4 \\ & + [32 s^3 (s-1)^3 - 128 a s^4 (s-1)] z^3 \\ & + [8 s^2 (s-1)^3 (s + 1/2) + 16 s^2 (s-1)^4 \\ & - 24 a s^3 (s-1) (4s - 5/2) - 24 s^4 a \\ & - 12 s^3 (s-1)^2] z^2 + [8 s (s-1)^4 (s + 1/2) \\ & + 24 s^3 a (s-1) - 8 a s^2 (s-1)^3 \\ & - 12 s^2 (s-1)^3 - 24 s^2 a (s-1)^2 (s + 1/2)] z \\ & + [a s (2s - 1/2) + 3/2 s (s-1) \\ & - (s-1)^2 (s + 1/2)]^2 \\ & - 4 a^2 s^2 (s-1) (s + 1/2) = 0 \end{aligned}$$

Connaissant cette racine, on en déduit t et μ par :

$$\begin{aligned} & 2 [t(s + 1/2) + \mu s] z^2 \\ & + 2 [t(a + 3/2) + s + \mu(s-1)] z \\ & + s - 1 + \mu a = 0 \\ & 4 t s z + t(s + 1/2) + \mu s = 0 \end{aligned}$$

Si, pour $s > 1$, on admet $\mu = 0$, l'optimum est donné par :

$$\begin{aligned} & 2 s^2 z^4 + s (4s - 5/2) z^3 \\ & + 2 [(s-1) (s + 1/2) + 2 s a] z^2 \\ & + [a (4s + 1/2) + 3/2 (s-1)] z \\ & + 2 a (a + 3/2) = 0 \end{aligned}$$

et t par :

$$t(s + 1/2)z^3 + 2[t(a + 3/2) + s]z^2 + 3(s - 1)z + 4a = 0$$

Nous avons calculé les valeurs de z , t et μ pour $s = 2; 1; 2/3$. Les figures 26, 27 montrent les courbes obtenues*.

On voit que pour les valeurs de s comprises

entre $2/3$ et 2 , le phénomène indiqué figure 25 ne se produit pas. De plus, si le pourcentage de pertes de charge $\left(\frac{\Delta H}{H_b}\right)$ est inférieur à 22 % (ce qui est toujours le cas en pratique), l'optimum est fourni par la condition de deux racines doubles complexes. Les mouvements de l'oscillation sont alors oscillatoires (et non apériodiques). Ceci se comprend physiquement. On voit aussi que si la section de la cheminée décroît, la colline d'amortissement a tendance à se raidir (fig. 28).

FIG. 27.

Les flèches indiquent le sens des déplacements.

Le même phénomène a lieu si on fait varier les pertes de charge.

FIG. 28.

* M. LE BOUAR, élève ingénieur E.S.E., alors en stage chez Neyrpic, nous a beaucoup aidé aux calculs (littéraux et numériques) de cette partie du présent article.

Jusqu'ici, nous avons négligé l'inertie de l'eau à l'aval de la cheminée. Très souvent elle n'est pas négligeable et ceci même si la longueur de la galerie à l'amont de la cheminée est beaucoup plus grande que celle à l'aval. En effet, l'eau contenue dans la galerie à l'amont de la cheminée

FIG. 29.

peut monter dans la cheminée, celle à l'aval presse directement sur la turbine (fig. 29).

Sur la figure 30, nous avons représenté les domaines de stabilité pour une même installation dans les deux cas suivants :

1) On néglige l'inertie de l'eau à l'aval de la cheminée;

FIG. 30.

2) On admet la section de la cheminée infi-

nie, c'est-à-dire on ne tient compte que de ce qui se passe à l'aval de la cheminée.

Il est clair que le domaine de stabilité général a probablement l'allure du domaine D, domaine commun aux deux domaines de stabilité relatifs aux cas 1) et 2). On voit en particulier que plus on restreint la section de la cheminée, plus le domaine D devient petit. En particulier, le temps de relaxation du dash-pot est de plus en plus difficile à déterminer.

Nous avons d'ailleurs l'intention de publier ultérieurement des résultats intéressants concernant les installations avec cheminée d'équilibre, compte tenu de l'inertie de l'eau à l'aval de la cheminée.

VII

INSTALLATION RÉGLÉE A DÉBIT CONSTANT AVEC CHEMINÉE D'ÉQUILIBRE

Nous la supposons munie d'un régulateur à asservissement fixe.

L'établissement des équations est la même qu'au § VI. L'équation en x est :

$$\begin{aligned} & s x^4 + (s + 1/2 + \lambda s) x^3 \\ & + [\gamma + (s + 1/2) \lambda + s \mu] x^2 \\ & + (\gamma \lambda + s \mu) x + \gamma \mu = 0 \end{aligned}$$

FIG. 31.

FIG. 32.

où :

$$x = \theta p$$

$s; \gamma; \theta$ comme au § VI

$$\lambda = K_0 \theta \sigma$$

$$\mu = \frac{K_0 \theta^2}{\tau}$$

$$\tau = S_1 H_n / Q_0$$

S_1 : surface du bassin aval.

La stabilité est donnée par $\mu > 0$ et la cubique.

$$(s + 1/2 + \lambda s) [\gamma + (s + 1/2) \lambda + s \mu] (\gamma \lambda + s \mu) \\ = \gamma \mu (s + 1/2 + \lambda s)^2 + s (\gamma \lambda + s \mu)^2$$

Il y a deux dispositions selon que :

$$\gamma \geq \frac{2s(s + 1/2)}{1 - s} \quad (\text{fig. 32}).$$

Toutes les installations peuvent être réglées de façon stable.

Si on peut augmenter K_0 tant qu'on veut, le réglage peut être sans statisme; ce n'est en général pas possible.

VIII

INSTALLATION AVEC COUP DE BÉLIER D'ONDE

Nous étudierons l'installation schématisée sur la figure 33 et munie d'un régulateur à asservissement temporaire avec $K_0 \sigma$ grand devant $1/\theta$ ou d'un régulateur accéléro tachymétrique.

La stabilité d'une telle installation a été étudiée par M. DANIEL (voir réf. 2). Nous chercherons

FIG. 33.

ici l'optimum des caractéristiques du régulateur.

L'équation caractéristique de l'installation est :

$$-2\varphi \operatorname{th} p = \frac{p^2 + A p + B}{\frac{p^2}{2} - A p - B}$$

(Voir réf. 2, p. 42.)

Pour le régulateur à asservissement temporaire :

$$A = \frac{L}{\tau \sigma a} ; \quad B = \frac{L^2}{\tau a^2 \sigma T_r}$$

et pour le régulateur accélérotachymétrique :

$$A = \frac{K_0 L}{\tau a} ; \quad B = \frac{K_1 L^2}{\tau a^2}$$

(Ces notations sont celles de M. DANIEL.)

avec :

$$\tau = \frac{I Y}{P_0} ; \quad 2\varphi = \frac{\Theta a}{L}$$

$\Theta; K_1; K_0; \sigma; T_2; I; Y; P$ ont la signification habituelle.

(Voir paragraphes IV et V.)

a : Célérité des ondes de coups de bélier.

Pour $\varphi \rightarrow \infty$, on retombe sur le cas traité au paragraphes IV ou V.

Si $\varphi \neq \infty$, l'équation caractéristique n'est plus algébrique mais transcendante.

Pour étudier la stabilité (ou l'optimum en posant $x = p - c$), on peut employer la méthode des séparatrices décrite dans la référence 3^B. Elle est intimement liée avec ce que nous avons écrit au paragraphe 1 : ce que nous appelons espace des π_k a été appelé par les auteurs de la référence 3^B espace de dosage. Quand on fait varier les paramètres du régulateur, le point figuratif se déplace dans l'espace du dosage. Quand ce point traverse la limite d'un domaine de stabilité, une racine de l'équation caractéristique devient soit nulle, soit infinie, soit $j\omega$. Selon le cas, le

FIG. 34.

FIG. 35.

sous-espace, « limite de stabilité », que le point vient de franchir, s'appelle séparatrice S_0 ; S_∞ ou S_j . Dans le cas d'équation algébrique, nous avons montré que S_0 est $a_0 = 0$; S_∞ est $a_n = 0$, et S_j est une partie de $\mathcal{Q}_{n-1} = 0$. Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 1, on trouve que si le régulateur comprend deux paramètres libres à déterminer, l'optimum est donné soit par fusion de deux points d'intersection de S_0 avec S_j ou S_∞ ou de S_j avec S_∞ , soit par la fusion de deux tangentes d'un point double. Ces conditions se traduisent soit par les conditions de racine triple, soit par celles des deux racines doubles. La limitation se fait par la condition de racine quadruple.

Le cas de la racine triple est relativement facile à étudier. L'optimum est donné par une racine triple si $\varphi > 0,62$ (c'est-à-dire si on admet $V = 3$ m/sec de vitesse dans la conduite forcée et $a = 1.000$ m/sec, φ est supérieur à 0,62 pour une chute inférieure à 240 m).

L'amortissement optimum est donné par :

$$4 \varphi^3 \operatorname{sh}^3 p - 6 \varphi^2 p (2 \operatorname{sh} p - p \operatorname{ch} p) - 3 \varphi (p^2 \operatorname{ch} p - 2 p \operatorname{ch} p + \operatorname{sh} p \operatorname{ch}^2 p) + \operatorname{ch}^3 p = 0$$

On en déduit A et B par les relations :

$$B = \frac{p^2 [3 \varphi p + \operatorname{ch}^2 p - 2 \varphi^2 \operatorname{sh}^2 p - \varphi \operatorname{sh} p \operatorname{ch} p]}{(\operatorname{ch} p - 2 \varphi \operatorname{sh} p)^2}$$

$$A = -\frac{B}{p} - \frac{p(\operatorname{ch} p + \varphi \operatorname{sh} p)}{\operatorname{ch} p - 2\varphi \operatorname{sh} p}$$

FIG. 36.

Si on pose :

$$\lambda = 2\varphi A$$

$$\mu = 4\varphi^2 B$$

λ et μ tendent pour $\varphi \rightarrow \infty$ vers les valeurs λ et μ du paragraphe IV.

Les figures 34 et 35 montrent les résultats obtenus*.

On voit que si φ décroît de l'infini à 0,62, le réglage optimum s'améliore, ce qui est assez surprenant. Mais comme au § III on ne peut guère, en pratique, s'attendre à un tel amortissement parce que la colline est très pointue.

Les collines d'amortissement ont une base de plus en plus petite, mais deviennent de plus en plus haute. De plus, le sommet se déplace en sens inverse de la base (fig. 36).

Evidemment, si $\varphi < 0,62$, les conclusions ne sont plus applicables.

IX

CONCLUSIONS

Les résultats des calculs reproduits ici reposent sur les hypothèses faites au début. Moyennant ces hypothèses, il montrent :

- 1) Le réglage d'une installation à puissance constante semble plus difficile que celui à débit ou à chute constante;
- 2) Le réglage d'une installation ne peut pas être plus rapide que ne le permet l'inertie de l'eau;
- 3) Le réglage isodrome (à puissance rigoureusement constante pour tous les points d'équilibre) est moins amorti que le réglage à asservissement permanent;
- 4) Les régulateurs accélérotachymétriques et à asservissement temporaire sont à peu près équivalents au point de vue performance dans le cadre des hypothèses schématiques faites ici. Le régulateur à asservissement temporaire a néanmoins un paramètre de liberté supplémentaire. En plus, d'autres différences entre les deux régulateurs proviennent de phénomènes qui échappent aux équations simplifiées (par exemple des non linéarités, hystérésis, etc.)
- 5) En ce qui concerne l'installation avec cheminée d'équilibre, il ne faut pas oublier que l'inertie de l'eau à l'aval (qui intervient autrement que l'inertie dans la galerie lors d'une coupure (voir fig. 31), est souvent importante.

Si on néglige l'inertie de l'eau à l'aval de la cheminée, l'installation peut être stable avec l'importe quelle section de cheminée; mais si la section est trop petite, il peut arriver qu'aucun régulateur industriellement réalisable ne pourra la régler d'une façon stable. D'autre part, aux charges partielles ces installations sont souvent instables. Du fait des hypothèses restrictives, il faut donc se donner une marge de sécurité. Néanmoins, l'ensemble domaine de stabilité et point optimum donne dans de nombreux cas une idée des caractéristiques de régulateur à choisir;

- 6) Il semble qu'il puisse être intéressant d'augmenter parfois la section de la cheminée au-delà de la section de THOMA, surtout si celle-ci est faible (haute chute). Cette mesure peut permettre d'élargir très sensiblement le champ des régulateurs acceptables;
- 7) Les ondes de coup de bélier semblent restreindre le domaine de stabilité, mais peuvent néanmoins laisser l'amortissement optimum intact (ou même l'améliorer).

* Sur la figure 35 les courbes limitant les domaines de stabilité ont été extraites de l'article de M. DANIEL (réf. 2).

BIBLIOGRAPHIE

1. ALMÉRAS. — Influence de l'inertie de l'eau sur la stabilité d'un groupe hydro-électrique. *La Houille Blanche*, n° 1-1945/1946 et suivants.

Voir aussi :

- Caractéristiques des régulateurs. *La Houille Blanche*, n° 6, 1947.
 — Procédés d'amélioration des qualités de réglage des groupes hydro-électriques. *La Houille Blanche*, n° 1, 1949.
 — Cours de Régulation, professé à l'Ecole des Ingénieurs Hydrauliciens de Grenoble.

2. DANIEL. — Accélération du réglage de la vitesse des turbines hydrauliques.

Thèse de doctorat publiée dans *la Houille Blanche*, n°s 1 et 2 de 1948.

3. MA MIN YUAN et COTTON. — Sur les critères de stabilité de ROUTH et d'HERWITZ. *Bulletin des sciences mathématiques*, tome LXXII, année 1948.

- 3 B. MA MIN YUAN, KUNTZMANN, DANIEL. — Stabilité des systèmes de réglage. *R.G.E.*, mars 1952, p. 149.

4. R. MEYER. — Comportement et stabilité des régulateurs contenant des éléments non linéaires. *La Houille Blanche*, 3-1952.

RECTIFICATIF

**COMPOTEMENT ET STABILITÉ
DES RÉGULATEURS CONTENANT DES ÉLÉMENTS
A CARACTÉRISTIQUE NON-LINÉAIRE**

(*Houille Blanche*, n° 3-1952, pp. 394 à 422.)

L'auteur, M. MEYER, nous prie de préciser les points suivants :

PAGE 398, 2^e colonne, parag. 3.

Au lieu de : « il est vrai que la régulation des turbines en fréquence-puissance fait *toujours* intervenir des systèmes « non à minimum de phase », il convient de lire : « il est vrai que la régulation des turbines est *toujours* susceptible de faire intervenir des systèmes « non à minimum de phase ».

PAGE 398, dans le renvoi « 2 ».

Au lieu de « 25 avril 1951 », il convient de lire : « 25 avril 1952 ».

PAGE 409 :

Il convient de lire :

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

le signe f'' a été omis.

PAGE 410 :

Il convient de lire :

$$i_s = I_s R [e^{j(\omega t + \varphi)}] = R [I_s e^{j(\omega t + \varphi)}]$$

la parenthèse de $\omega t + \varphi$ manque.

PAGE 417 :

$$I \frac{d\Omega}{dt} = P_a - P_u = u$$

au lieu de :

$$I \frac{dt}{d\Omega} \dots$$

PAGE 422 (n° 33) :

Il convient de lire :

HERMANN et SOURIAU.