Comportement et stabilité des régulateurs contenant des éléments à caractéristique non linéaire

(Précédé d'un aperçu de la méthode de Nyquist et des méthodes dérivées
appliquées à l'hydraulique.)

Behaviour and stability of governors with elements of non-linear characteristics

(Preceeded by an outline of the Nyquist method and methods derived from it applied to hydraulics.)

PAR R. MEYER

INGÉNIEUR AUX ÉTABLISSEMENTS NEYRPIG

(Voir la Houille Blanche n° 3, 1952, p. 394)

Etude des « éléments non-linéaires » d'installation à réglage automatique. Considérations sur la stabilité propre des éléments. Limitation du domaine d'application de la méthode exposée : la plupart des installations industrielles sont englobées sauf celles contenant des éléments trop « assymétriques ». Recherche des mouvements possibles des installations pour $t \rightarrow \infty$. Etude des mouvements sinusoïdaux permanents : cycles limites ordinaires. Etude des mouvements sinusoïdaux lentement variables : stabilité des cycles limites; cycles limites non ordinaires; calcul très approximatif de la précision dynamique des systèmes. Effets de la linéarisation. Etude des installations dont les seules non-linéarités à considérer sont des relais. Conclusion : « Avenir des systèmes non-linéaires. »

Study of the "non-linear elements" of automatically governed installations. Considerations on the inherent stability of the elements. Limitation of the field of application of the method presented: most industrial installations are covered, with the exception of those having excessively "assymetrical" elements. An endeavour to determine the possible movements of an installation for $t \rightarrow \infty$. Study of permanent sinusoidal movements: ordinary limit cycles. Study of slowly varying sinusoidal movements: stability of limit cycles, non-ordinary limit cycles; rough calculation of the dynamic accuracy of the systems. Effects of linearization. Study of installations in which the only non-linear factors to be taken into consideration are the relays. Conclusion: "The future of non-linear systems."

S O M M A I R E

V. — ETUDE DES INSTALLATIONS A ÉLÉMENTS « NON LINÉAIRES ». EXTENSION DU CRITÈRE DE NYQUIST. LIMITES DE L'EXTENSION.

V-1. — L'étude se limite aux installations industrielles à régulation automatique.

V-11 : Introduction.

V-12 : Aperçu sur la limitation des installations étudiées.

V-2. — Description des installations non linéaires et légitimation de la méthode employée.

V-21 : Eléments « non linéaires ».

V-22 : Considérations générales sur la stabilité des systèmes étudiés.

V-23 : Analyse harmonique des systèmes étudiés.

V-3. — Mouvements de la boucle fermée. Stabilité des cycles limites.

V-31 : *Mouvements oscillatoires lentement variables de la boucle fermée.*

V-32 : *Ensemble des mouvements oscillatoires d'une installation.*

V-33 : *Mouvements apériodiques.*

V-4. — Comparaison des systèmes linéaires et non linéaires.

V-41 : *Nouvelle classification des systèmes.*

V-42 : *Une classe particulière de systèmes non linéaires.*

V-5. — Emploi pratique de la méthode. Emploi des systèmes non linéaires.

V. — ÉTUDE DES INSTALLATIONS A ÉLÉMENTS " NON LINÉAIRES ". EXTENSION DU CRITÈRE DE NYQUIST. LIMITES DE L'EXTENSION.

V-1. — L'étude se limite aux installations industrielles à régulation automatique.

V-11 : INTRODUCTION.

Parmi l'ensemble des systèmes physiques, les systèmes linéaires forment un sous-groupe infiniment petit. C'est une des raisons pour lesquelles on peut les étudier facilement. D'une façon générale, plus on limite le domaine des systèmes considérés, mieux on peut les étudier. C'est pourquoi une étude des systèmes automatiques — linéaires ou non — n'est faisable actuellement que si on tient compte au maximum des particularités de ces systèmes. Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, les installations automatiques industrielles ont un grand nombre de particularités. Nous en verrons d'autres par la suite. L'ensemble de ces propriétés particulières nous permettra de définir un sous-groupe suffisamment restreint pour pouvoir être étudié plus ou moins bien.

En réalité, les propriétés particulières que nous sommes obligés (pour l'instant) de conférer aux systèmes que nous étudierons, ne sont pas remplies par toutes les installations automatiques industrielles, mais par la grande majorité d'entre elles. D'une façon plus générale encore, l'étude faite ici est soit exacte, soit en général pessimiste. Nous reviendrons sur ce point par la suite.

Une autre raison qui facilite l'étude des systèmes physiques linéaires est l'existence d'un appareil mathématique puissant, créé en grande partie spécialement pour ces systèmes. Pour aucune autre classe de systèmes il n'existe quelque chose d'analogue. L'étude que nous ferons sera donc nécessairement beaucoup moins satisfaisante du point de vue mathématique pure; elle sera surtout basée sur des considérations physiques. C'est pourquoi nous avons toujours jusqu'à présent insisté (peut-être un peu trop parfois) sur le côté physique des installations auto-

matiques. Néanmoins, nous croyons avoir fait œuvre utile pour les techniciens et nous nous excusons du manque de rigueur auprès des mathématiciens.

V-12 : APERÇU SUR LA LIMITATION DES INSTALLATIONS ÉTUDIÉES.

Rappelons que les seules installations automatiques étudiées ici sont des installations à boucles telles qu'elles ont été définies au § III-2(*). Rappelons que les boucles comprennent uniquement des éléments, des comparateurs et éventuellement des boucles d'ordre inférieur et sont schématisées comme suit sur la figure 1.

FIG. 1

Les éléments établissent d'une façon générale une relation $U_s = f(U_e)$ entre la variable d'entrée U_e et la variable de sortie U_s . f est la relation fonctionnelle établie par l'élément. Les comparateurs établissent une relation $x = u - \sigma$ et, éventuellement, 1, 2 ou 3 relations supplémentaires $x = f(u_1)$, etc... (Voir § III-6.)

La première limitation imposée aux systèmes étudiés (en plus des limitations relatives à la description ci-dessus) est celle qui concerne les relations fonctionnelles $U_s = f(U_e)$; nous admettons que les fonctionnelles f ont les propriétés suivantes :

(*) La Houille Blanche, n° 3-1952.

— Elles sont indépendantes du temps — (soit, dans une extension ultérieure, pulsées de façon convenable);

— Elles ne contiennent que des relations algébriques ou différentielles, telles que :

$y = f(x)$ représentables par une courbe,

$z = f(x, y)$ représentables par une surface, etc...

Il semblerait que ceci englobe toutes les fonctionnelles pensables. Il n'en est rien puisque nous écartons pour l'instant les systèmes pulsés et définitivement les systèmes pulsés de façon « bizarre »; de même nous écartons, par exemple, les relations à base arithmétique ou statistique.

V-2. — Description des installations non linéaires et légitimation de la méthode employée.

V-21. ÉLÉMENTS À CARACTÉRISTIQUES NON LINÉAIRES.

Comme pour les installations linéaires, nous devrions ici commencer à étudier les quadripôles non linéaires, puis les éléments, enfin les boucles. En réalité, une telle étude serait bien trop longue. Étudions simplement un point spécialement important par la suite. Nous avons vu qu'il était utile de distinguer dans les systèmes physiques des variables de tension et des variables de débits. Tensions et débits sont reliés par ce qu'on appelle les paramètres du système.

Exemples. — Une résistance électrique établit la relation $U = Ri$; R est un paramètre.

— De même dans $F = m\gamma$; m est un paramètre.

Dans un quadripôle, il se peut qu'une variation de tension ou de débit d'entrée fasse varier un paramètre par rapport aux variables de tension ou de débit à la sortie.

Exemple : un potentiomètre.

Entrée : variables mécaniques : force, vitesse de déplacement.

Sortie : variables électriques : tension, courant.

Le couplage se fait par l'intermédiaire de la variation du paramètre : résistance électrique (fig. 2).

FIG. 2

On peut donc classer les quadripôles en deux catégories :

1. Ceux à paramètres constants. Les variables tension et débit d'entrée et de sortie sont alors nécessairement les mêmes;
2. Ceux à excitation paramétrique (terme consacré par l'usage).

De même, il y a des éléments à paramètres constants et d'autres à excitation paramétrique.

Ici, nous rencontrons une première différence entre les systèmes linéaires et non linéaires : alors que dans les systèmes linéaires les éléments étaient en général stables, dans les systèmes non linéaires ils peuvent être instables, mais cette instabilité n'est pas la même que celle définie pour les systèmes linéaires.

En pratique, seuls les éléments à excitation paramétrique peuvent être instables. Définissons la nouvelle notion d'instabilité : nous dirons qu'un élément est instable s'il existe un ou plusieurs signaux d'entrée finis auxquels correspondent des signaux de sortie très grands (théoriquement infiniment grands). Pour les systèmes linéaires, il en est autrement : rappelons que si un système linéaire est instable, à n'importe quel signal d'entrée, même infiniment petit, correspond un signal de sortie infiniment grand.

Exemple (fig. 3) :

FIG. 3

L'élément tracé en traits continus est à excitation paramétrique puisqu'on fait varier un coefficient d'une loi $H; Q$. Si la conduite a des pertes de charge non négligeables, cet élément

est stable si on ne lui injecte pas d'excitation d'amplitude supérieure à une valeur donnée (*).

Si cette valeur est dépassée, le signal de sortie peut croître indéfiniment.

L'étude des éléments à excitation paramétrique n'est pas encore bien avancée. On n'a étudié jusqu'à présent que certains systèmes très simples à équations linéaires et paramètres variables périodiquement. Rappelons que l'usage veut que les systèmes linéaires ne comprennent que les systèmes à équation linéaire et à paramètre (ou coefficients) constants. (C'est seulement à ces équations que s'appliquent les grandes théories linéaires comme le calcul symbolique, l'analyse harmonique, etc.).

Résumons les résultats intéressants en ce qui concerne notre étude et qui sont pratiquement acquis au sujet des éléments à excitation paramétrique (voir à ce sujet les références (2; 3; 5; 6; 7; 10; 12; 13)).

Pour faciliter l'énoncé de ces résultats, nous utiliserons le langage électrique (parce qu'il est le plus riche). On peut se servir des analogies (voir § III-3) pour les autres domaines.

1. Seuls les éléments contenant un ou plusieurs circuits oscillants (amortis ou non) peuvent être instables (**).

FIG. 4

Exemple : le circuit (fig. 4) ne peut pas être instable.

Par contre, il peut l'être si on remplace un des deux condensateurs par une self.

2. Les éléments ayant un amortissement (positif) ne sont jamais instables pour des signaux d'entrée infiniment petits : il existe un seuil de stabilité (comme on l'a déjà mentionné plus haut). Ce seuil croît d'une façon générale avec l'amortissement.
3. Pour une amplitude d'entrée donnée, les risques d'instabilité sont les plus grands pour une pseudo-fréquence propre de l'élément (supposé à paramètres fixes) voisine de la sous-harmonique d'ordre 2 de la

(*) Nous verrons par la suite que seules les excitations périodiques pratiquement sinusoïdales sont à considérer. Nous n'étudierons que celles-là.

(**) Il est entendu que le circuit est un circuit physique à selfs, résistances et capacités positives.

fréquence d'excitation ou d'une harmonique quelconque de cette fréquence sous harmonique.

4. Les instabilités dues aux harmoniques élevées sont moins à craindre que celles dues aux harmoniques basses.
5. Il semble que le taux d'harmonique (voir définition plus loin, § VII-7) du signal d'entrée n'influence pas l'allure des courbes de stabilité limite dans le plan amplitude-fréquence, si toutefois ce taux reste inférieur à une valeur donnée correspondant par exemple au signal en rectangle (fig. 5).

FIG. 5

Exemple de domaine d'instabilité d'un élément à excitation paramétrique (fig. 6) :

Les courbes en trait continu sont relatives au cas $R = 0$.

Le domaine hachuré indique la stabilité.

Élément

FIG. 6. — Élément à excitation paramétrique et son domaine de stabilité.

Les courbes en pointillé sont relatives à une valeur R donnée; le domaine de stabilité est alors plus grand.

Etudions maintenant l'influence d'éléments à excitation paramétrique dans une boucle de régulation. Nous avons vu au § IV-2 que la présence de boucles secondaires instables était en général à éviter (sauf pour des questions impérieuses de précision dans le cas d'appareil de laboratoire). La présence d'éléments à excitation paramétrique instables n'est pas aussi grave. En effet, une ouverture accidentelle de la boucle ne les fait en général pas osciller de façon amplifiée. Par contre, il est toujours désagréable d'avoir un élément à amplification infinie dans une boucle. Pour la sécurité de l'installation, compte tenu du vieillissement et des petites modifications accidentelles, il est sage de prévoir des éléments qui ne peuvent pas être instables. Il y a en pratique deux moyens pour rendre stables les éléments à excitation paramétrique :

1. Limitation des amplitudes d'entrée. Une limitation pratique est souvent imposée physiquement : ainsi, si on fait varier un rhéostat, l'amplitude de la variation ne peut pas dépasser la moitié de la valeur maximum de la résistance du rhéostat.
2. Amortissement intérieur à l'élément. Nous en avons vu l'effet plus haut.

Exemple : cas pratique fréquent en hydraulique : c'est l'installation schématisée en figure 3.

Nous avons établi des équations simplifiées permettant d'avoir, dans le cas général, une idée de la stabilité. Le signal d'entrée a été choisi en forme de rectangles (fig. 5). Les calculs seront effectués avec l'aide d'une machine à calculer électronique de la société I.B.M.

Dans les cas particuliers suffisamment simples, on peut faire une étude directe. On sait qu'on peut étudier les systèmes non linéaires à 1 ou 2 degrés de liberté par les méthodes de POINCARÉ ou par celles des écoles russes. On voit que ces études, ne s'appliquant *a priori* qu'à des systèmes extrêmement simples, peuvent servir ici à l'étude des parties d'un système beaucoup plus compliqué. Pour les applications pratiques, voir les références citées plus haut. On peut remarquer qu'en général on a intérêt à admettre le signal d'entrée en forme de rectangle (fig. 5), le calcul se simplifie alors notablement (à peu près comme si le nombre de degrés de liberté du système était diminué d'une unité).

V-22 : CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LA STABILITÉ DES SYSTÈMES ÉTUDIÉS.

Revenons maintenant à l'étude des systèmes automatiques dans leur ensemble.

Étudions d'abord les mouvements qui sont susceptibles de se développer quand un tel système est resté longtemps sans être soumis à une excitation. D'après les hypothèses faites au § V-1 sur les relations fonctionnelles qu'établissent les éléments entre leurs signaux d'entrée et de sortie, on peut affirmer que seuls les mouvements suivants sont possibles :

1. Mouvements périodiques dits cycles limites.
2. Mouvements pseudo-périodiques amortis ou amplifiés.
3. Mouvements apériodiques amortis ou amplifiés.

A priori, on pourrait encore croire que ce sont là tous les mouvements possibles en général. Il n'en est rien. Ainsi, par exemple, une installation contenant un régulateur par tout ou rien à intermittence et à temps de récurrence fixe n'entre pas dans la catégorie des installations étudiées ici. On se rend facilement compte que son mouvement peut tendre vers un mouvement oscillatoire mais jamais vers un mouvement périodique.

Nous dirons qu'une installation est absolument instable si, n'étant depuis longtemps soumise à aucune excitation à l'entrée, son signal de sortie tend à être amplifié. Elle sera d'autant plus instable que cette tendance est plus rapide. Outre les installations absolument instables, il existe les installations possédant un (ou plusieurs) cycles limites et les installations à mouvement amorti. Les installations ayant des cycles limites peuvent être considérées « techniquement » soit comme suffisamment stables, soit comme instables. Pour être techniquement stables, il convient que les amplitudes du cycle limite ou que l'écart limite vers laquelle tend le mouvement amorti soient suffisamment faibles (*) (voir § II-1).

Pour étudier la stabilité, il convient donc d'étudier les mouvements limites entre les mouvements amplifiés et les mouvements amortis. Ce sont les cycles limites et les états d'équilibre au repos.

V-23 : ANALYSE HARMONIQUE DES SYSTÈMES ÉTUDIÉS.

V-231 : Propriétés des installations étudiées ici.

C'est à propos de l'analyse harmonique et de l'étude des cycles limites que nous serons obli-

(*) Le mot stable ne peut plus avoir le sens habituel que lui donnent les techniciens de la régulation qui n'étudient que les installations linéaires (voir § II-1, page 397, remarque en bas de la page).

gés de faire le plus grand nombre de restrictions sur l'ensemble des systèmes physiques que nous étudions.

Expliquons pourquoi nous sommes obligés de faire des restrictions et quelles sont les données qui interviennent :

Nous avons constaté empiriquement au moyen d'un appareil à analogie électrique que, dans la grande majorité des installations automatiques de régulation qui possédaient un cycle limite, il existait un point dans chaque boucle où le mouvement correspondant au cycle limite était voisin d'un mouvement sinusoïdal pur. Ce fait permet de déterminer, pour ces installations, les cycles limites possibles, donc d'étudier la stabilité. La question qui se pose est donc la suivante : Peut-on dire *a priori* si telle ou telle installation a la propriété d'avoir (quelque part dans sa boucle) un cycle limite pratiquement sinusoïdal? Nous verrons que la grande majorité des installations automatiques industrielles ont cette propriété. Donnons d'abord quelques définitions :

DÉFINITION DU RÉSIDU RELATIF D'HARMONIQUE D'UN SIGNAL (terme normalisé : réf. 8, vol. 1, page 10, n° 05-05-221).

Soit un signal :

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots$$

On appelle résidu relatif d'harmonique ou plus simplement taux d'harmonique le nombre :

$$\tau = \frac{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + \dots}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots}}$$

En général, on l'exprime en pour-cent.

Exemple : pour le signal en rectangle (fig. 5) il est de 41 % environ. Par la suite, nous appellerons ce résidu : τ_0 .

NOTION D'ÉLÉMENT GÉNÉRATEUR D'HARMONIQUE

Nous appellerons un élément « générateur d'harmonique » si, pour un signal d'entrée sinusoïdal, il donne en régime permanent un signal de sortie contenant des harmoniques;

Exemple : les éléments linéaires ne sont pas générateurs d'harmoniques; ce sont les seuls.

Le taux d'harmonique produit par un élément dépend en général (entre autres) du taux d'harmonique du signal d'entrée. On peut définir un nombre g égal au rapport des taux d'harmonique du signal de sortie et du signal d'entrée.

g dépend évidemment, en général, de la forme du signal d'entrée. On constate que pour la plupart des éléments utilisés techniquement, $g < 1$, si le taux d'harmonique du signal d'entrée est plus petit qu'une certaine limite que nous appellerons τ_c .

Nous n'étudierons que les installations formées uniquement de tels éléments. Telle est la plus grave des restrictions que nous apportons aux systèmes étudiés ici. C'est la seule qui élimine un certain nombre d'installations industrielles, en particulier celles contenant des limiteurs d'ouvertures ou des déchargeurs^(*). Néanmoins, nous croyons que, même dans ces derniers cas, la méthode proposée ici peut pratiquement rendre des services, et surtout on peut souvent montrer que l'adjonction d'un déchargeur ou d'un limiteur d'ouverture ne risque que de favoriser la stabilité^(**). Le taux d'harmonique τ_c des éléments employés pratiquement est inférieur ou égal à τ_0 (défini plus haut).

Nous limitons donc notre étude à de tels éléments. Suivant la grandeur du nombre τ_c , on peut distinguer :

1. Les éléments forts générateurs d'harmoniques tels que les relais à tout ou rien ou les éléments à excitation paramétrique et à circuit résonant faiblement amorti.
2. Les éléments faibles générateurs d'harmoniques tels que les conduites à pertes de charge quadratiques, les appareils ayant une courbe de fonctionnement peu incurvée (ressorts, etc...).

NOTION D'ÉLÉMENT SYMÉTRIQUE

Nous qualifierons un élément de « symétrique » si un changement de signe du signal d'entrée produit toujours un simple changement de signe du signal de sortie.

Exemples :

Élément symétrique : relai à tout ou rien; jeu dans une transmission.

Élément non symétrique : conduite à pertes de charge quadratiques.

Il est clair qu'un élément symétrique ne peut faire correspondre à un signal d'entrée ne contenant pas d'harmoniques paires qu'un signal de sortie ne contenant pas, lui non plus, d'harmoniques paires.

(*) Ce sont en pratique les éléments très « asymétriques » (voir définition plus loin) qui sortent du cadre de cette théorie.

(**) Nous pensons pouvoir publier ultérieurement une étude à ce sujet.

COEFFICIENT DE SYMÉTRIE

Nous appellerons coefficient de symétrie d'un élément le rapport :

$$\gamma = \sqrt{\frac{a_3^2}{a_3^2 + a_2^2}}$$

a_2 et a_3 étant définis à partir du signal de sortie correspondant à un signal d'entrée $A \cos \omega t$. L'élément fait correspondre à ce signal un signal de sortie :

$$a_0 + a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_2) + \dots$$

γ est compris entre 0 et 1; $\gamma = 1$ pour les éléments symétriques.

Cette notion est importante, comme on le verra par la suite. En effet, les intégrateurs de la boucle abaissent beaucoup plus l'harmonique 3 que l'harmonique 2.

On peut de même définir d'une façon générale le coefficient de symétrie d'un signal.

INTÉGRATEURS DANS LES BOUCLES

On a vu, au § IV-4, que dans les boucles il y avait toujours des intégrateurs. Dans les boucles linéaires, il y a, pour la fréquence correspondant à un cycle limite, exactement 2 intégrations. Dans les boucles à éléments non linéaires, il peut y avoir « moins d'intégrations » pour la fréquence correspondant à un cycle limite; effectivement, les déphasages peuvent être produits par des phénomènes autres que des intégrations.

Pratiquement, nous avons vu que chaque boucle contient (pour des raisons de précision) au moins un intégrateur pur (voir § IV-2). En plus, pour assurer une stabilité absolue (voir § IV-2), la courbe amplification en fonction de la fréquence est descendante pour la fréquence propre ou la pseudo-fréquence propre de l'installation. En général, cette courbe est fortement descendante à partir de cette fréquence. Pour $f \rightarrow \infty$, la boucle se comporte en général comme 2, 3 ou 4 intégrateurs en série.

BILAN DES HARMONIQUES LE LONG D'UNE BOUCLE.

Les éléments non linéaires sont générateurs d'harmonique; les intégrateurs font baisser le taux d'harmonique. A chaque intégration, un signal de coefficient de symétrie γ voit tomber son taux d'harmonique environ dans le rapport :

$$\frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{5}{g}} \gamma^2$$

Ouvrons la boucle quelque part et injectons un mouvement périodique: on peut alors, *grosso modo*, suivre le taux d'harmonique le long de la boucle. L'évolution de cette grandeur est fonction de l'amplitude, de la fréquence et du taux d'harmonique du signal injecté. La présence des intégrateurs nous permet d'affirmer que le rapport g des taux d'harmonique des signaux de sortie et d'entrée est certainement inférieur à 1 si le taux d'harmonique du signal d'entrée est supérieur à tous les taux τ_c des éléments. Le taux critique de boucle est inférieur au taux critique le plus élevé des éléments contenus dans cette boucle; donc certainement inférieur à τ_0 , taux correspondant au signal en rectangle. Il est parfois bien plus petit. Ce taux étant fixé, on recherche le point de la boucle où le taux d'harmonique est le plus faible, soit $\tau_{\min}$. Ce point se situe évidemment immédiatement après les intégrateurs. On voit qu'une nouvelle notion importante est celle de la position relative des intégrateurs et des générateurs d'harmoniques. Il est clair que $\tau_{\min}$ sera le plus bas si les intégrateurs ne sont pas séparés par des générateurs d'harmoniques. S'il existe par exemple deux intégrateurs directement couplés en chaîne, le taux d'harmonique est divisé par $(1/4 - 5\gamma^2/36)$. S'il est de 20 % avant les intégrateurs et même si $\gamma = 0$, il tombe après les intégrateurs à 5 %.

Compte tenu de toutes les données indiquées ici, il est souvent possible de trouver une limite supérieure de $\tau_{\min}$. Cette limite est en général très basse, de l'ordre de $\tau_0/10$; en raison des intégrateurs, elle ne dépasse guère 5 %. On pourrait chercher à énoncer quelles sont les conditions requises pour qu'il en soit ainsi. En réalité, on s'aperçoit que le nombre et la complexité des données mises en jeu est trop grande pour que cette étude ait un intérêt pratique. Nous énoncerons donc simplement la condition suivante à imposer aux systèmes que nous voulons étudier : nous admettons qu'il existe un point dans chaque boucle où le résidu relatif d'harmoniques est inférieur à 5 % pour les fréquences correspondant aux cycles limites possibles. Pratiquement, toutes les installations industrielles, sauf celles mentionnées plus haut, satisfont à cette condition (*).

A partir de maintenant, nous n'ouvrons plus les boucles qu'aux points où existe le taux d'harmonique minimum. Nous admettrons qu'en ce point les cycles limites possibles sont des mouvements sinusoïdaux, c'est-à-dire nous négligerons le résidu relatif d'harmoniques. **Cette approximation est techniquement tout à fait**

(*) Il est clair que cette condition n'a pas besoin d'être vérifiée pour les petites boucles accessoires comme celles formées par les asservissements des régulateurs.

légitime; en effet, un grand nombre d'appareils étudiés au moyen de schématisations linéaires ont un résidu relatif d'harmoniques non négligeable et parfois même bien plus grand que 5 %. Néanmoins, les calculs faits en admettant ces appareils linéaires sont pratiquement toujours vérifiés par l'expérience. L'ensemble de ces vérifications expérimentales constitue la meilleure justification de la méthode que nous proposons.

Ce que nous venons d'exposer justifie également l'étude que nous avons faite au § V-22 à propos de la stabilité des éléments, comme nous l'avons annoncé.

Étudions maintenant ce qui se passe quand on ferme la boucle. Il est clair qu'il ne peut se produire aucun cycle limite dont le taux d'harmonique τ soit supérieur au taux critique τ_c de la boucle : le signal verrait alors son taux d'harmonique décroître à chaque cheminement complet autour de la boucle. De même, si tous les éléments sont symétriques, le cycle limite ne peut pas contenir d'harmoniques d'ordre pair, autrement dit il est obligatoirement symétrique. En effet, les intégrateurs changent le coefficient de symétrie du signal et, après un cheminement le long de la boucle, le signal ne reviendrait pas identique à lui-même.

On voit donc que les mouvements oscillatoires permanents de la boucle fermée ne peuvent être que ceux que nous avons envisagés pour la boucle ouverte.

V-232 : Fonction de transfert (généralisée) en régime permanent.

Pour étudier les cycles limites d'une installation, il suffit donc d'ouvrir chaque boucle au bon endroit, d'y injecter un signal $A \cos \omega t$ et de comparer ce signal à la composante $B \cos (\omega t + \varphi)$ du signal de sortie. On voit donc apparaître l'analogie avec la méthode de NYQUIST applicable aux systèmes linéaires. En pratique, on fait souvent une approximation de plus qui est en général acceptable : on injecte à chaque élément un signal $A \cos \omega t$ et on ne tient compte que de la composante de pulsation ω à la sortie. Ceci est acceptable, en particulier parce que la composante fondamentale de sortie de chaque élément dépend surtout de la composante fondamentale du signal d'entrée. Il est évident qu'on peut appliquer la méthode indiquée ici sans faire cette nouvelle approximation; néanmoins on la fait très souvent en pratique. De plus et surtout, elle permet de mieux comprendre le phénomène physique, ce qui nous sera d'un grand secours dans les explications qui vont suivre.

Étudions donc un élément non linéaire au moyen d'excitation $A \cos \omega t$. La composante de pulsation ω du signal de sortie $B \cos (\omega t + \varphi)$ fait intervenir deux grandeurs B et φ . Ces deux grandeurs sont fonction de ω et de A . Pour les seuls systèmes linéaires, B et φ ne dépendent pas de A . Nous pouvons tracer, pour tous les systèmes, en analogie avec les systèmes linéaires, des courbes en coordonnées polaires; le rayon vecteur sera $\frac{B}{A}$, l'angle polaire φ .

Si A est constant et si ω varie, $\frac{B}{A}$ et φ définissent une courbe graduée en ω (analogue à la courbe de transfert d'un élément linéaire), (fig. 7).

FIG. 7

Si A varie, on obtient une famille de courbes à 1 paramètre. On peut également joindre les points à ω constant et obtenir une deuxième famille de courbes à 1 paramètre (fig. 8).

FIG. 8

L'ensemble de ces courbes définit la fonction de transfert généralisée de l'élément envisagé en régime permanent. On peut aussi écrire symboliquement :

$$F(A; \omega) = \frac{B(A; \omega)}{A} \cdot e^{j\varphi(A, \omega)}$$

Néanmoins, il convient de noter que le couplage en série ne donne plus une relation aussi simple que pour les éléments linéaires.

Si on couple :

$$F_1(A; \omega) = \frac{B_1}{A} \cdot e^{j\varphi_1}$$

et :

$$F_2(B_1; \omega) = \frac{B_2}{B_1} \cdot e^{j\varphi_2}$$

on aura une fonction de transfert résultante :

$$F = [F_1 \times F_2] \\ = \frac{B_1(A; \omega)}{A} \cdot \frac{B_2(B_1; \omega)}{B_1} \cdot e^{j[\varphi_1(A; \omega) + \varphi_2(B_1; \omega)]}$$

En effet, l'amplitude d'entrée du deuxième élément, c'est-à-dire l'amplitude de sortie du premier intervient dans le calcul par $\varphi_2(B_1; \omega)$.

En plus, il n'y a aucune raison pour que les fonctions $B(A; \omega)$ et $\varphi(A; \omega)$ dérivent d'une même fonction analytique simple (en mettant suffisamment de singularités « bizarres » on arrive toujours à les faire dériver d'une même fonction analytique, puisque ces fonctions ne sont définies que pour les ω réels).

Exemples :

1. — *Relais idéal à tout ou rien.* — Caractéristique (fig. 9).

FIG. 9

Si le signal d'entrée est $A \cos \omega t$, le signal de sortie est un signal en rectangle d'amplitude K

et de déphasage nul. Donc :

$$B = \frac{4}{\pi} K^{(*)}; \quad \frac{B}{A} = \frac{4}{\pi} \frac{K}{A}; \quad \varphi = 0$$

2. — *Régulateur avec relais idéal et asservissement* (fig. 10).

FIG. 10

On voit que ceci constitue une petite boucle. Si la fréquence n'est pas trop élevée, on peut négliger les inerties, la boucle est alors évidemment stable (le déphasage total est $-\pi/2$). Dans ces conditions, on a les relations suivantes :

Entrée du régulateur : $N = N_0 \cos \omega t$

Sortie du régulateur : $Y = Y_0 \cos(\omega t + \varphi)$ (1)

Entrée du relais :

$$N - mY = N_0 \cos \omega t - mY_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ = C \cos(\omega t + \Psi)$$

Ψ est donné par :

$$N_0 \sin \Psi = mY_0 \sin(\Psi - \varphi) \quad (2)$$

Sortie du relais (voir exemple précédent) :

$$\frac{4}{\pi} K \cos(\omega t + \Psi)$$

Sortie du régulateur :

$$Y = \frac{4}{\pi} K \int_0^t \cos(\omega t + \Psi) dt = \frac{4}{\pi} \frac{K}{\omega} \sin(\omega t + \Psi)$$

D'où, par comparaison avec (1) :

$$Y_0 = \frac{4}{\pi} \frac{K}{\omega}; \quad \varphi = \Psi - \frac{\pi}{2}$$

ce qui donne, avec la relation (2) :

$$\varphi = \text{Arc cos } \frac{4}{\pi} \frac{mK}{\omega N_0}$$

Il y a donc deux cas :

$$a) \quad \frac{4}{\pi} \frac{mK}{\omega N_0} \leq 1$$

(*) Le coefficient $4/\pi$ provient du développement en série de Fourier.

L'appareil fonctionne bien comme prévu.

$$b) \quad \frac{4}{\pi} \frac{m K}{\omega N_0} > 1$$

L'appareil ne peut pas fonctionner comme prévu.
Si on admet une zone morte β dans le commu-

Fig. 11. — Schéma d'un commutateur industriel.

tateur (fig. 11), le calcul donne un résultat satisfaisant dans tous les cas. En particulier, si $\beta \rightarrow 0$, la relation établie par le régulateur tend pour $\frac{4}{\pi} \frac{K m}{\omega N} > 1$ vers $N = m Y$. Ceci est d'ailleurs évident physiquement et se vérifie expérimentalement. Dans ce dernier cas, la courbe de transfert est unique et donnée par la figure 12, mais sa graduation dépend de N_0 . Le

Fig. 12

point $x = 1/m$; $y = 0$ représente toute la partie de courbe de transfert $0 \leq \omega \leq \omega_c$.

$$\omega_c = \frac{4}{\pi} \frac{m K}{N_0}$$

3. — Régulateur à tout ou rien en tenant compte de l'inertie du moteur.

Admettons que le moteur du régulateur soit un moteur asynchrone : son couple moteur est

alors proportionnel à son glissement. La vitesse de sortie est alors liée à la tension d'entrée par :

$$V_0 - V = K \frac{dV}{dt}$$

K étant proportionnel au moment d'inertie du moteur. La courbe de transfert tension d'entrée-vitesse est donc un cercle (fig. 13).

Fig. 13

$$F(j\omega) = \frac{V_0}{1 + K j\omega}$$

La courbe de transfert tension d'entrée-déplacement est :

$$\frac{V_0}{j\omega(1 + K j\omega)}$$

Cette courbe de transfert remplace l'équation de l'exemple précédent :

$$Y = \frac{4}{\pi} \frac{K}{\omega} \sin(\omega t + \Psi)$$

Le reste du calcul demeure inchangé.

Donc, on a ici :

$$Y_0 = \frac{4}{\pi} \frac{K}{\omega \sqrt{1 + K^2 \omega^2}}$$

$$\varphi = \Psi - \frac{\pi}{2} - \text{Arc tg } K \omega$$

Ce qui donne :

$$\varphi = \text{Arc cos } \frac{4}{\pi} \frac{m K}{N_0 \omega (1 + K^2 \omega^2)} - \text{Arc tg } K \omega$$

D'où une famille de courbes de transfert (fig. 14).

Fig. 14

4. — *Liaison à jeu* (fig. 15).

FIG. 15

Entrée : $A \cos \omega t$.Sortie : courbe Γ sur figure 15 bis.

FIG. 15 bis

On trouve(*) :

$$B = 1 - 0,62 \frac{\beta}{A} - 0,38 \left(\frac{\beta}{A} \right)^2$$

$$\varphi = \text{Arc sin } \frac{\beta}{A}$$

Ici, il n'y a encore qu'une courbe de transfert, mais c'est parce que la fonction de transfert ne dépend pas de la fréquence.

Couplage d'une liaison à jeu et d'un régulateur à tout ou rien sans inertie : on obtient les courbes de transfert de la figure 16.

FIG. 16

(*) Formules approchées; les formules exactes sont extrêmement compliquées.

V-233 : *Cycles limites possibles.*

Si l'une des courbes de transfert de la boucle ouverte passe au point -1 , il est clair que l'amplitude et la fréquence relatives à ce point définissent un cycle limite possible. Comme les cycles limites sont des mouvements intermédiaires entre les mouvements absolument stables et absolument instables, on reconnaît tout de suite la signification des courbes de transfert, en ce qui concerne la stabilité.

En analogie avec la stabilité absolue des systèmes linéaires, nous dirons qu'une installation dont les courbes de transfert ont l'allure de la figure 17 ne sont pas recommandables. Nous ne

FIG. 17

nous occuperons que des autres.

La forme générale des courbes de transfert nous permet, dans chaque cas, *a posteriori*, de vérifier que les harmoniques des cycles limites sont bien amorties le long de la boucle.

Ici se pose une nouvelle question : est-ce que les cycles limites trouvés ainsi sont les seuls possibles?

Etudions ce qui se passe autour du point -1 . Admettons qu'il existe dans une boucle un régime (imposé par l'extérieur) qui corresponde à un point M très voisin du point -1 (fig. 18).

FIG. 18

Si l'installation ne reçoit plus aucune excitation, le mouvement va changer (très lentement puisque M est voisin de -1). On pourra alors définir une amplitude et une fréquence à chaque instant. Cette amplitude et cette fréquence vont changer

lentement; le point figuratif de fonctionnement va donc décrire une certaine courbe dans le plan $x ; y$ et aussi dans le plan $A ; \omega$. Cette courbe peut être fermée. Il existe alors un mouvement à cycle limite d'amplitude et fréquence lentement variables (fig. 19). Nous appellerons ces cycles limites des cycles limites à battements (à cause

FIG. 19

de la variation de l'amplitude); les autres cycles limites seront appelés « ordinaires ». Il ne semble pas que les cycles limites à battements aient été étudiés jusqu'ici. Leur existence pourrait même être contestée. On pourrait s'attendre à ce que la fréquence ne varie pas quand un système tend vers un cycle limite, comme c'est le cas des systèmes linéaires ($e^{-\lambda t} \cos \omega t$).

Or, ceci est contredit par les faits.

Exemple :

Soit une installation à niveau constant, schématisée par la figure 20.

FIG. 20

Si le régulateur est à tout ou rien et idéal et si la transmission entre le flotteur et le régulateur se fait avec un jeu, on peut étudier l'installation par une méthode directe. Ceci sera fait au § VI. On trouve à la sortie du régulateur une relation linéaire entre A et ω ; ω variera avec le temps.

Le même genre de raisonnement peut permettre de trouver la **stabilité** des cycles limites. Reprenons la figure 17. Si le point M tend vers -1 , l'amplitude tend vers A_1 et la fréquence f_1 ; A_1 et f_1 caractérisent un cycle limite ordinaire stable. Si, A et f étant voisins de A_1 et f_1 , le point M s'éloigne de -1 , le cycle-limite $A_1 ; f_1$

est instable. De même M peut tendre, ou non, vers un cycle limite à battements.

La question qui se pose maintenant est de savoir comment on peut étudier les trajectoires du point M .

V-234 : Régimes lentement variables des boucles ouvertes.

Etudier les trajectoires du point M semble, *a priori*, nous obliger à reprendre l'étude du système et à nous heurter aux difficultés insurmontables que nous avons évitées jusqu'ici. En réalité, il existe deux grandes classes de méthodes pour l'étude des systèmes physiques. La première consiste à déterminer le comportement, dans le temps, des systèmes soumis à une excitation donnée (par exemple un échelon unité); une deuxième méthode consiste à exciter les systèmes par des mouvements sinusoïdaux de fréquence et d'amplitude variables. Cette deuxième méthode peut sembler *a priori* plus artificielle, en réalité, elle est bien plus « *physique* »; en effet, les régimes habituels de la plupart des systèmes sont oscillatoires et on conçoit que l'analyse fréquentielle fasse intervenir plus naturellement les propriétés liées aux fréquences propres, aux cycles limites, etc. En plus, nous avons déjà insisté sur le fait que les équations d'un système ne sont valables que dans un certain domaine du plan amplitude-fréquence; ceci veut dire que les propriétés physiques du système considéré sont essentiellement attachées aux différents domaines du plan $A ; f$.

Dans bien d'autres cas, les méthodes fréquentielles constituent souvent un outil très puissant. En particulier, elles sont de plus en plus employées pour les systèmes linéaires à coefficients constants (évidemment elles ne résolvent pas non plus tous les problèmes, comme on a parfois tort de vouloir le faire croire). De même, l'étude des systèmes linéaires à paramètres variables n'est pratiquement accessible que depuis que M. ZADEH a montré tout l'intérêt et la souplesse que permettent les méthodes fréquentielles (voir réf. 7).

Nous essayerons de montrer, ici, que ces méthodes permettent également de faire avancer l'étude des systèmes qui nous préoccupent.

L'étude que nous venons de faire jusqu'ici constitue, dans notre esprit, une sorte d'introduction à une théorie beaucoup plus générale basée sur l'analyse fréquentielle, théorie dont nous essayerons de donner, ici, les quelques points que nous avons pu établir. Ces différents points sont relatifs soit aux régimes périodiques entretenus, soit aux régimes périodiques lentement variables (par rapport à la période de l'ex-

citation et aux périodes propres du système considéré).

La méthode consiste donc essentiellement à injecter, dans chaque boucle ouverte au bon endroit, un mouvement :

$$A(t) \cos [\omega(t) \cdot t]$$

$A(t)$ et $\omega(t)$ étant lentement variables.

Le signal de sortie sera alors pratiquement périodique et ce qu'on peut appeler son oscillation fondamentale sera :

$$B(t) \cos [\omega(t) \cdot t + \varphi(t)]$$

Dans la plupart des systèmes utilisés en pratique, on a :

$$B(t) = B_0[A(t); \omega(t)] + \frac{dA}{dt} B_1(A; \omega) + \frac{d\omega}{dt} B_2(A; \omega) + \dots$$

$$\varphi(t) = \varphi_0[A(t); \omega(t)]$$

$$+ \frac{dA}{dt} \varphi_1(A; \omega) + \frac{d\omega}{dt} \varphi_2(A; \omega) + \dots$$

Pratiquement, nous nous arrêterons évidemment aux termes $\frac{dA}{dt}$ et $\frac{d\omega}{dt}$. Dans l'état actuel de nos connaissances, le calcul de ces termes est en général déjà pénible, sinon impossible. De plus, ces termes suffisent pour l'étude de la stabilité des cycles limites ordinaires et pour l'étude approximative des cycles limites à battements.

Les fonctions φ_0 et B_0 ne présentent pas de grosses difficultés : ce sont celles qui dérivent de la fonction de transfert généralisée en régime permanent (§ V-42).

$$F_0(A; \omega) = B_0(A; \omega) e^{j\varphi_0(A; \omega)}$$

Il n'en est malheureusement pas de même pour les fonctions B_1 ; B_2 ; φ_1 et φ_2 . Leur détermination constitue l'un des points qu'il serait nécessaire de préciser pour faire avancer la méthode exposée ici. Nous nous contenterons de donner quelques indications et exemples.

D'abord, il convient de se rendre compte physiquement pourquoi :

$$B(t) \neq B_0[A(t); \omega(t)]$$

et :

$$\varphi(t) \neq \varphi_0[A(t); \omega(t)],$$

c'est-à-dire pourquoi l'amplitude et la phase à la sortie dépendent non seulement de l'amplitude et de la fréquence d'entrée à l'instant considéré,

mais également des valeurs antérieures de ces deux grandeurs. Pour les relations fonctionnelles qu'établissent les éléments rencontrés en pratique, la raison en est la suivante :

Admettons que le signal d'entrée d'un élément soit un signal en rectangle. Le signal de sortie s'en déduit par l'intermédiaire d'une équation différentielle et est déterminé pendant chaque demi-période par la valeur actuelle de l'amplitude **et** par les conditions initiales au début de la demi-période considérée. Ces conditions initiales en question sont les valeurs atteintes à la fin de la demi-période antérieure et dépendent donc de l'amplitude et de la fréquence antérieures; et ainsi de suite. Il en est évidemment de même pour tout autre signal d'entrée. On voit que $\frac{dA}{dt}$ et $\frac{d\omega}{dt}$ interviennent d'autant plus que l'équation différentielle est d'ordre plus élevé, c'est-à-dire d'autant plus que l'élément est plus « intégrateur ». Pour les systèmes à ondes, où l'équation différentielle est d'ordre infini, les valeurs antérieures interviennent tellement fortement que le développement en série par rapport à $\frac{dA}{dt}$ et $\frac{d\omega}{dt}$ n'est plus valable.

Exemple : considérons le système figure 21.

FIG. 21

Le mouvement pendant la demi-période t_0 ; t_1 dépend du point de départ P au temps t_1 (fig. 22).

FIG. 22

Ce dernier point dépend de l'amplitude et de la longueur de la demi-période précédente.

Il existe des éléments qui ne sont absolument pas intégrateurs (ni différentiateurs) : par exem-

ple les relais. Nous les appellerons éléments algébriques. Pour eux :

$$B_1 \equiv B_2 \equiv \varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv 0$$

En pratique, on peut y classer un grand nombre d'éléments qui, *a priori*, se classeraient parmi les systèmes sièges de phénomènes héréditaires, tels les transmissions à jeux, les systèmes à frottements, etc... Ceci provient de ce que nous n'étudions, ici, que les régimes oscillatoires lentement variables.

De plus, l'absence d'intégration ou de dérivation rend B_0 et φ_0 indépendants de ω . Ce point peut probablement être établi de façon plus rigoureuse.

On peut donc classer les éléments de la façon suivante :

1. Eléments algébriques : B_0 et φ_0 sont indépendants de ω ; $B_1 \equiv B_2 \equiv \varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv 0$.
2. Eléments linéaires : B_0 et φ_0 sont indépendants de A ; B_1 , B_2 , φ_1 et φ_2 s'expriment en fonction de $F(j\omega)$.
3. Eléments mixtes.

Seule la dernière catégorie offre des difficultés^(*). Il faut faire le calcul dans chaque cas ; souvent il est infaisable. On a toujours intérêt à assimiler le signal d'entrée à un signal en rectangles. Comme on néglige les termes en $\frac{dA}{dt} \times \frac{d\omega}{dt}$, on peut évidemment admettre A

constant pour calculer B_2 et φ_2 et ω constants pour calculer B_1 et φ_1 .

Nous allons faire le calcul des fonctions B_1 ; B_2 ; φ_1 et φ_2 dans le cas des éléments linéaires. Calculons d'abord B_1 et φ_1 , en admettant ω constant. Nous ferons varier l'amplitude exponentiellement :

$$A(t) = K e^{\lambda t}$$

d'où :

$$\lambda = \frac{dA}{Adt}$$

à chaque instant.

Soit :

$$F(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

la fonction de transfert de l'élément. Si nous injectons $Ke^{\lambda t \cos \omega t}$ avec $\frac{\lambda}{\omega} \neq 0$, la fonction de

transfert devient :

$$F(\lambda + j\omega) \neq X(\omega) + \lambda Y'(\omega) + j[Y(\omega) - \lambda X'(\omega)]$$

D'où :

$$F \neq X + \frac{dA}{Adt} Y' + j \left[Y - \frac{dA}{Adt} X' \right]$$

On en tire facilement B_0 ; φ_0 ; B_1 et φ_1 .

En réalité, on a intérêt à écrire que le signal entrant $E = A(t) \mathcal{R}[e^{j\omega t}]$ se transforme en :

$$S = A \mathcal{R}[F(j\omega) e^{j\omega t}] - \frac{dA}{dt} \mathcal{R}[jF'(j\omega) e^{j\omega t}]$$

Regardons maintenant ce qui se passe quand ω varie dans le temps. D'abord on peut étudier la réponse du système à :

$$\cos[\Phi(t)] \quad \text{où} \quad \Phi(t) = At + B + \varepsilon(t),$$

$\varepsilon(t)$ étant petit.

Posons : $\Phi_0(t) = A_1 t + B_1$ et écrivons :

$$\begin{aligned} \cos[\Phi(t)] &= \cos[\Phi_0 - (\Phi - \Phi_0)] \\ &= \cos \Phi_0 \cos(\Phi - \Phi_0) + \sin \Phi_0 \sin(\Phi - \Phi_0) \end{aligned}$$

Nous déterminerons $\Phi_0(t)$ en admettant qu'à l'instant considéré t_0 , on a :

$$\Phi(t_0) = \Phi_0(t_0)$$

$$\Phi'(t_0) = \Phi'_0(t_0) = \omega(t_0)$$

Si ω est inférieur à la première pulsation propre complexe du système, on peut développer $F(j\omega)$ en série de Taylor. En appliquant cette série à $\cos[\Phi(t)]$, on obtient :

$$\mathcal{R}[F(j\omega) e^{j\omega t}] - \frac{d\omega}{dt} \mathcal{R}[jF''(j\omega) e^{j\omega t}]$$

Nous admettrons que cette formule est toujours valable. On peut d'ailleurs l'étendre à tout le plan $\lambda + j\omega$; néanmoins, nous n'en avons pas trouvé de démonstration simple.

Si le signal d'entrée est $A \cos[\omega(t) \cdot t]$, A dépendant de ω , il convient de remplacer $\frac{dA}{dt}$ par $\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial t}$ (*). En réunissant les deux expressions trouvées et en appelant toujours E le signal d'entrée et S le signal de sortie, on trouve :

$$\begin{aligned} S &= \mathcal{R} \left[A F(j\omega) - j \frac{dA}{dt} F'(j\omega) \right. \\ &\quad \left. - j \frac{d\omega}{dt} A F''(j\omega) - j \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial A}{\partial \omega} F'(j\omega) \right] \end{aligned}$$

(*) Les classes ne sont d'ailleurs pas comparables en « grandeur ».

(*) Ceci est le cas général pour les éléments en chaîne.

On vérifie aisément que le couplage en chaîne de deux systèmes dont les fonctions de transfert sont $F_1(j\omega)$ et $F_2(j\omega)$ donne le même résultat qu'un seul système dont la fonction de transfert est $F_1 \cdot F_2$.

Néanmoins, il convient de remarquer que l'amplitude sortant du premier système est $A F_1(j\omega)$ et dépend de ω par l'intermédiaire de $F_1(j\omega)$; par contre, la fréquence ne dépend pas de l'amplitude.

On voit que, pratiquement, on a souvent intérêt à ne pas considérer chaque élément linéaire à part, mais à étudier l'ensemble de ces éléments; les termes délicats en $\frac{dA}{d\omega}$ sont alors automatiquement englobés dans le calcul.

Exemple : Installation figure 23.

FIG. 23

L'installation peut contenir, entre les points S et E, une liaison à jeu ou, simplement, le régulateur, un recouvrement et une saturation. Ces dernières non-linéarités sont alors « prédominantes » et on peut négliger les autres en première approximation. Nous linéariserons donc les autres équations.

On a les équations :

Conduite :

$$\Theta j\omega \frac{q}{Q_0} + 2 \frac{q}{Q_0} = 2\beta \frac{y_1}{Y_0}$$

Bassin :

$$T j\omega \frac{n}{H_0} = \frac{q}{Q_0}$$

Régulateur :

$$j\omega \frac{y_2}{Y_0} = K_0 \frac{n}{H_0} - K_0 \sigma \frac{y_2}{Y_0}$$

$$\Theta = \frac{L}{g\sigma} \frac{Q_0}{H_0} : \text{temps caractéristique de la conduite.}$$

Q_0 : débit en régime permanent;

Q : débit instantané;

$$q = Q - Q_0;$$

Y_0, Y, y : ouverture (*idem*) de la vanne;

T : temps caractéristique du bassin $\left(\frac{S H_0}{Q_0} \right)$

$$\beta : 1 - \frac{2 \Delta H}{H_0}$$

ΔH : perte de charge dans la conduite;

H_0 : chute géométrique.

On en déduit : $F(j\omega)$

$$F(j\omega) = \frac{2 K_0 \beta}{T j\omega (\Theta j\omega + 2) (j\omega + K_0 \sigma)}$$

Il faut maintenant calculer $F'(j\omega)$ et $F''(j\omega)$.

Les calculs sont tout de suite bien plus compliqués que pour les installations purement linéaires.

On peut procéder graphiquement : tracer $F(j\omega)$ comme pour une installation purement linéaire et dériver graphiquement :

$$F'(j\omega) = \lim_{\omega_1 \rightarrow \omega_2} \frac{F(j\omega_1) - F(j\omega_2)}{j(\omega_1 - \omega_2)}$$

V-3. — Mouvements de la boucle fermée. Stabilité des cycles limites.

V-31 : LES MOUVEMENTS OSCILLATOIRES LENTEMENT VARIABLES DES BOUCLES FERMÉES.

Nous pouvons maintenant étudier les régimes oscillatoires libres des installations envisagées ici.

Rappelons que, jusqu'ici, nous avons étudié ces installations en boucle ouverte. Si on injecte dans une boucle (ouverte au bon endroit) un mouvement $A(t) \cos [\omega(t) \cdot t + \varphi(t)]$ où $A(t)$ et $\omega(t)$ sont très lentement variables, il sort un mouvement voisin de :

$$B(t) \cos [\omega(t) \cdot t + \varphi(t)]$$

où :

$$B(t) = B_0 [A(t); \omega(t)] + \frac{dA}{dt} B_1 [A; \omega] + \frac{d\omega}{dt} B_2 (A; \omega)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 [A; \omega] + \frac{dA}{dt} \varphi_1 (A; \omega) + \frac{d\omega}{dt} \varphi_2 (A; \omega)$$

aux termes de deuxième ordre près.

Par la suite, nous calculerons toujours avec cette approximation.

Les seuls mouvements oscillatoires lentement variables de la boucle *fermée* sont donnés par :

$$A(t) = B(t) \quad \text{et} \quad \varphi(t) = \dots \pi (+ 2k\pi)$$

D'où :

$$A = B_0(A; \omega) + \frac{dA}{dt} B_1(A; \omega) + \frac{d\omega}{dt} B_2(A; \omega) \\ - \pi = \varphi_0(A; \omega) + \frac{dA}{dt} \varphi_1(A; \omega) + \frac{d\omega}{dt} (\varphi_2(A; \omega))$$

On en tire immédiatement :

$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{(B_0 - A) \varphi_2 - B_2(\varphi + \pi)}{B_1(\varphi + \pi) - \varphi_1(B_0 - A)} = \frac{N(A; \omega)}{D(A; \omega)} \quad (1)$$

Cette équation différentielle définit ce que nous avons appelé les trajectoires du système. En effet, dans le plan $A; \omega$, l'amplitude et la fréquence du système ne peuvent que varier en suivant les courbes solutions de cette équation. Si nous avions tenu compte de termes d'ordre plus élevés en $\frac{dA}{dt}$ et $\frac{d\omega}{dt}$, nous aurions eu une équation différentielle d'ordre plus élevé.

Dans le cas des systèmes purement linéaires, on vérifie que les trajectoires sont bien $\omega = C^{ste}$; elles sont parcourues d'après $A = K e^{\lambda t}$.

L'équation (1) constitue la base de notre théorie des systèmes non linéaires. Elle permet d'étudier de nombreux détails de leur comportement; de plus, elle est la plus simple possible et la seule à avoir été étudiée jusqu'ici. Cette équation permet d'appliquer à des systèmes très compliqués les très nombreuses méthodes mises au point pour les systèmes très simples à 1 et 2 degrés de liberté. Il y a là un point essentiel sur lequel nous tenons à insister : **l'analyse harmonique permet d'utiliser au maximum les connaissances déjà acquises**, les théories bien établies et les calculs déjà faits.

Rappelons uniquement, pour mémoire, quelques points particuliers dont l'étude est possible à partir de l'équation (1).

CYCLES LIMITES ORDINAIRES

Ils sont donnés, comme on le voit, par :

$$B_0 = A$$

$$\varphi = \dots \pi$$

ce qu'on savait déjà.

Soit $A_1; \omega_1$ un tel cycle limite : sa stabilité est donnée par :

$$a = N'_A(A_1; \omega_1) + D'_\omega(A_1; \omega_1) < 0$$

et :

$$b = N'_A D'_\omega - N'_\omega D'_A > 0$$

Au voisinage de ces cycles limites, les trajectoires sont données par la figure 24.

FIG. 24

Les flèches indiquent le sens des « t » croissants.

CYCLES LIMITES A BATTEMENTS

Si l'équation (1) admet des trajectoires fermées, le système peut suivre indéfiniment de telles trajectoires; A et ω varient alors périodiquement. Ces trajectoires sont les cycles limites ordinaires des théories classiques relatives aux systèmes simples. Leur détermination est assez délicate; néanmoins, beaucoup de théories et de méthodes de calcul ont été mises au point pour les déterminer (voir par exemple réf. : 6).

Ces cycles peuvent être stables ou instables (fig. 25).

FIG. 25

Si l'approximation est poussée au-delà du premier ordre, en $\frac{dA}{dt}$ et $\frac{d\omega}{dt}$, on obtient des cy-

cles à battements encore plus compliqués, sans que des phénomènes vraiment nouveaux apparaissent.

PRÉCISION DU SYSTÈME

L'équation (1) permet aussi d'apprécier le degré de stabilité et la précision des systèmes étudiés.

Au lieu des variables B et φ , il est souvent plus commode de calculer $B \cos \varphi = X$ et $B \sin \varphi = Y$.

De la fonction de transfert, on tire alors :

$$X = X_0 + \frac{dA}{dt} X_1 + \frac{d\omega}{dt} X_2$$

$$Y = Y_0 + \frac{dA}{dt} Y_1 + \frac{d\omega}{dt} Y_2$$

Les mouvements possibles sont alors :

$$Y = 0 ; \quad X = -A$$

$$-A = X_0 + \frac{dA}{dt} X_1 + \frac{d\omega}{dt} X_2$$

$$0 = Y_0 + \frac{dA}{dt} Y_1 + \frac{d\omega}{dt} Y_2$$

D'où :

$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{(X_0 + A) Y_2 - X_2 Y_0}{X_1 Y_0 - (X_0 + A) Y_1}$$

Cette équation est évidemment la même que l'équation (1), mais est parfois plus facile à établir.

Étudions, comme exemple, une installation uniquement formée d'éléments linéaires et d'éléments algébriques. Ce sont les installations pour lesquelles M. KOCHENBURGER et M. DUTILH ont déterminé les cycles limites ordinaires (réf. 1 et 4).

L'installation étudiée ici est celle de la figure 23.

Le régulateur est supposé avoir un recouvrement et une saturation; en plus, la transmission a du jeu.

On a étudié graphiquement l'installation suivante :

$L = 500$ m longueur de la conduite.

$H_b = 40$ m : chute brute.

$$\beta = \frac{\Delta H_c}{H_b} = 1/2 \text{ pour le débit maximum.}$$

ΔH_c = perte de charge dans la conduite.

$Q_0 = 3 \text{ m}^3/\text{s}$: débit maximum.

$$T = \frac{S H_b}{Q_m} = 300 \text{ s : temps caractéristique du bassin.}$$

$$\Theta = \frac{L V}{g H_b} = 5 \text{ s : temps caractéristique de la conduite.}$$

$$\sigma = 0,005 = \frac{\Delta N}{H_b} : \text{asservissement.}$$

ΔN = « décrément » (*) dans le bassin.

$K_0 = 20$ = rapidité de réponse du régulateur.

Jeu : correspond à 1/2 cm dans le bassin.

Les fonctions de transfert en régime permanent d'oscillations sont les suivantes :

$$\text{Bassin : } \frac{1}{j \omega S}$$

$$\text{Conduite : } \frac{2 \beta}{2 + j \Theta \omega} \frac{Q_0}{Y_0}$$

$$\text{Régulateur : } \frac{K_0}{j \omega + K_0 \sigma} \frac{Y_0}{H_0}$$

Ces trois fonctions sont représentées par les trois courbes de la figure 26.

FIG. 26

La fonction de transfert de la liaison à jeu est représentée sur la figure 27.

Sur la figure 28 est représentée la courbe de transfert de l'ensemble des éléments linéaires et l'inverse de la courbe de transfert de l'élément algébrique. On trouve deux points d'intersection, qui donnent deux cycles limites ordinaires caractérisés par les pulsations $\omega \approx 0,15$ et $0,03$.

(*) Terme consacré par l'usage.

FIG. 27. — Fonction de transfert de l'organe schématisé sur la figure 15.

FIG. 28

On voit que pour cette installation il y a des cycles limites possibles quel que soit le jeu, puisque la forme des courbes de transfert ne dépend pas de la valeur du jeu (seule la graduation en dépend). Il y a donc un critère de stabilité indépendant de la valeur du jeu : c'est le critère de tangence des 2 courbes de transfert.

Connaissant la valeur approximative de la pulsation et de l'amplitude, on détermine par le calcul des valeurs plus exactes en traçant le ré-

seau de courbes caractérisant la fonction de transfert de l'ensemble de la boucle ouverte. Ceci a été fait pour les valeurs de ω voisines de 0,15 (fig. 29).

FIG. 29. — Fonction de transfert en régime permanent.

On trouve $\omega_0 \approx 0,155$ et l'amplitude du mouvement du plan d'eau dans le bassin : $N_0 = 6,25$ mm. Etudions maintenant la stabilité de ce cycle limite en reprenant tous les éléments. Nous coupons la boucle à l'entrée des éléments algébriques, comme sur la figure 30.

FIG. 30

Soient :

$$E_1 = A(t) \cos [\omega(t) \cdot t]$$

le signal d'entrée dans les éléments algébriques, et :

$$S_1 = B(t) \cos [\omega(t) \cdot t + \varphi_1(t)]$$

le signal de sortie. De même :

$$E_2 = B(t) \cos [\omega(t) \cdot t]$$

et :

$$S_2 = C(t) \cos [\omega(t) \cdot t + \varphi_2(t)]$$

pour les éléments linéaires.

Les fonctions de transfert donnent :

$$B(t) e^{j\varphi_1(t)} = \Phi[A(t)]$$

$$C(t) \cdot e^{j\varphi_2(t)} = B(t) \cdot F[j\omega(t)] - j \frac{dB(t)}{d\omega} F'_{\omega}[j\omega(t)]$$

$$- j \frac{d[\omega(t)]}{dt} B(t) \cdot F''_{\omega^2}[j\omega(t)]$$

Le terme en $\frac{dB}{d\omega}$ est nul.

En posant :

$$B(t) = |\Phi[A(t)]|$$

et en sous-entendant les « t »,

on peut écrire :

$$C e^{j\varphi_2} = |\Phi(A)| \cdot F(j\omega)$$

$$- j \frac{d|\Phi(A)|}{dA} \frac{dA}{dt} F'(j\omega) - j \frac{d\omega}{dt} |\Phi(A)| F''(j\omega)$$

La condition de bouclage, c'est-à-dire de mouvement possible de boucle fermée, est :

$$A(t) \equiv C(t)$$

$$\varphi_1(t) + \varphi_2(t) \equiv -\pi + 2k\pi$$

On en tire :

$$-A e^{-j\varphi_1} = |\Phi(A)| F(j\omega)$$

$$- j \frac{d|\Phi(A)|}{dA} \frac{dA}{dt} F'(j\omega) - j \frac{d\omega}{dt} |\Phi(A)| F''(j\omega)$$

ou en se rappelant que :

$$|\Phi(A)| e^{j\varphi_1} = \Phi(A)$$

et en posant :

$$\frac{\Phi(A)}{A} = \Psi(A),$$

fonction de transfert des éléments algébriques, on trouve :

$$-1 = \Psi(A) \cdot F(j\omega) - j \frac{dA}{dt} \frac{d|\Phi(A)|}{dA} \frac{1}{A} e^{j\arg \Phi(A)} F'(j\omega)$$

$$- j \frac{d\omega}{dt} \Psi(A) F''(j\omega)$$

Si $A(t) = A_0$ et $\omega(t) = \omega_0$, on retrouve évidemment :

$$-1 = \Psi(A_0) \cdot F(j\omega_0)$$

équation qui détermine les cycles limites ordinaires.

Posons maintenant :

$$- j \frac{d|\Phi(A)|}{dA} e^{j\arg \Phi(A)} F'(j\omega) = \alpha(A; \omega)$$

$$- j F''(j\omega) \cdot \Psi(A) = \beta(A; \omega)$$

α et β sont alors des fonctions complexes connues et l'équation de bouclage devient :

$$-1 = \Psi(A) \cdot F(j\omega) + \alpha(A; \omega) \frac{dA}{dt} + \beta(A; \omega) \frac{d\omega}{dt}$$

α et β peuvent être définis par un réseau de courbes comme les fonctions de transfert. Nous avons reproduit schématiquement ces réseaux pour ω voisin de 0,15 et A voisin de 0,18 sur la figure 30 bis. $F'(j\omega)$ et $F''(j\omega)$ ont été calculés par différences finies; on s'aperçoit que la pré-

FIG. 30 bis

Fig. c : $\frac{dA}{d\omega} = \frac{OC}{OB}$

cision est suffisante avec des intervalles $\frac{\Delta \omega}{\omega}$ et $\frac{\Delta A}{A}$ voisins de 1/20.

Si l'installation oscille avec un mouvement instantané d'amplitude $A(t)$ et une pulsation $\omega(t)$, on peut facilement trouver graphiquement $\frac{dA}{d\omega}$ et $\frac{d\omega}{dt}$ en décomposant le vecteur :

$$\Psi(A) F(j\omega) + 1$$

en deux vecteurs parallèles à α et β (fig. 30 bis e).

On en déduit $\frac{dA}{d\omega}$; d'où le coefficient de la tangente au point A ; ω à la trajectoire du système dans ce plan (fig. 30 bis d). Si on se contente de chercher la stabilité du cycle $A_0 ; \omega_0$, on peut étudier l'équation :

$$\alpha_0 \frac{d \Delta A}{dt} + \beta_0 \frac{d \Delta \omega}{dt} = \gamma_0 \Delta A + \delta_0 \Delta \omega$$

où :

$$\Delta A = A - A_0 ; \quad \Delta \omega = \omega - \omega_0$$

$$\alpha_0 = \alpha(A_0 ; \omega_0) ; \quad \beta_0 = \beta(A_0 ; \omega_0)$$

et :

$$\gamma_0 \Delta A + \delta_0 \Delta \omega$$

représente la linéarisation de l'expression :

$$-1 - F[j(\omega_0 + \Delta \omega)] \Psi(A_0 + \Delta A)$$

Cette dernière se calcule en assimilant les courbes $A = C^{ste}$ et $\omega = C^{ste}$ passant par le point -1 de la figure 29 à des droites. Dans le cas présent, on trouve :

$$\begin{aligned} (74,7 - 32,1 j) \frac{d}{dt} \Delta A / \gamma + \frac{d \Delta \omega}{dt} (159 - 164 j) \\ = (0,0246 + 0,0322 j) \frac{\Delta A}{\gamma} \\ + (11,63 + 5,00 j) \Delta \omega = 0 \end{aligned}$$

En séparant les parties réelles et imaginaires,

(*) Mentionnons ici aussi l'article de M. LOEB dans les *Annales des Télécommunications*.

Dans cet article, M. LOEB calcule la stabilité des cycles limites d'une façon différente de la nôtre. Il admet que la fonction de transfert d'un système non linéaire en régime variable (près d'un cycle limite) est la même que celle en régime permanent d'oscillation où on remplace ω par $\omega - j\lambda$. Cette hypothèse ne semble pas confirmée dans le cas général par le calcul fait ici. Il se peut qu'elle soit vérifiée pour une certaine classe de systèmes non linéaires, qui serait à déterminer. Physiquement cette hypothèse signifie que la fonction de transfert en régime permanent permet de connaître les mouvements transitoires. Or, justement les systèmes non linéaires ne peuvent pas être caractérisés par une seule fonction (voir § V-41).

on obtient deux équations différentielles linéaires pour les deux fonctions $\Delta A(t)$ et $\Delta \omega(t)$. La résolvante a les racines $p_1 = 0,156$ et $p_2 = 0,002$. Ce cycle limite est donc instable (*).

V-32 : ENSEMBLE DES MOUVEMENTS OSCILLATOIRES D'UNE INSTALLATION.

Nous avons vu que les cycles limites ordinaires des installations étudiées ici sont en fait (quelque part dans la boucle) pratiquement sinusoïdaux. En est-il de même pour les mouvements oscillatoires variables? Étudions d'abord les mouvements lentement variables. On a vu que l'amplitude et la fréquence suivaient une certaine trajectoire dans le plan $A ; \omega$. On peut faire une correspondance entre le plan $A ; \omega$ et le plan de NYQUIST $x ; y$ en faisant correspondre les droites $A = C^{ste}$ et $\omega = C^{ste}$ du plan $A ; \omega$ aux courbes $A = C^{ste}$ et $\omega = C^{ste}$ du plan de NYQUIST. Ceci revient à considérer à chaque instant le mouvement permanent « tangent » au mouvement instantané. Le nombre « d'intégrations » le long de la boucle est évidemment fonction du mouvement permanent tangent. La méthode exposée ici devient donc de plus en plus critiquable au fur et à mesure que le point figuratif du système s'éloigne du point -1 en réduisant son déphasage négatif. Ainsi, un cycle limite à battement, comme indiqué sur la figure 31, est donné d'une manière beaucoup plus

FIG. 31

imprécise qu'un cycle limite ordinaire, même si l'amplitude et la fréquence varient lentement.

Evidemment si, en passant par un point tel que A, le système varie lentement, cela signifie que $\frac{dA}{dt}$ et $\frac{d\omega}{dt}$ interviennent très fortement, autrement dit que l'une des fonctions $B_1(A ; \omega)$ ou $B_2(A ; \omega)$ devient très grande. Ceci nous semble pouvoir arriver si l'installation contient de nombreux éléments linéaires dont des systèmes correcteurs. Ces systèmes ont alors une courbe de transfert comme figure 32, et $F'(j\omega)$ et $F''(j\omega)$ sont très grands pour les points voisins de -1 .

La graduation de la courbe de transfert est très étalée près du point — 1.

Nous appellerons instabilités secondaires les cas dans lesquels $B_1(A; \omega)$ ou $B_2(A; \omega)$ deviennent infinis.

Loin de ces instabilités secondaires, les cycles

Fig. 32

à battement sont toujours très petits et se trouvent au voisinage immédiat du point — 1. Il semble qu'en général il n'en existe pas dans de telles conditions. Il semble donc possible d'affirmer qu'un cycle limite à battement n'est susceptible de se produire que si une instabilité secondaire est assez voisine d'un cycle limite ordinaire, à moins que ce dernier cycle limite ne corresponde à un centre ou à un foyer peu amorti dans le plan $A; \omega$. A l'avenir, nous ne nous occuperons plus de ces cas moins fréquents. Dans tous les autres cas, les régimes lentement variables sont impossibles loin du point — 1. Si le point figuratif du régime tangent est loin du point — 1, le régime tend rapidement vers un cycle limite ou vers le repos. Son mouvement n'est plus régi par des équations du premier ordre en $\frac{dA}{dt}$ et $\frac{d\omega}{dt}$, et on ne peut rien affirmer sur la forme de la trajectoire.

D'une façon générale, on voit que les critères de position analogues à celui de NYQUIST pour les installations linéaires ne sont plus valables (critère de position : le point — 1 doit se trouver à gauche de...). D'autre part, les installations réelles ne peuvent heureusement jamais avoir des mouvements tendant vers l'infini : ceux-ci sont toujours limités quelque part et il ne peut se former que des cycles limites très grands. L'étude de la stabilité des installations est donc toujours

une étude de cycles limites et il faut en général revenir à la réalité physique si l'on s'aperçoit qu'un mouvement tend à être infini.

Il reste encore un dernier mot à dire à propos des cycles limites à battement rapidement variables. Il peut évidemment en exister aussi. Un cas concevable est celui d'un ensemble comprenant un régulateur par tout ou rien actionnant un système du genre Duffing (voir par ex. réf. 10). Il peut alors se développer des cycles limites avec « jumping », c'est-à-dire bond brusque.

En conclusion, on peut dire que la méthode exposée ici ne résoud évidemment pas tout, mais permet une première étude des systèmes même très compliqués. Il nous reste maintenant à étudier les mouvements apériodiques.

V-33 : MOUVEMENTS APÉRIODIQUES.

Étudions d'abord les positions d'équilibre. Les systèmes non linéaires ont parfois des plages d'équilibre, c'est-à-dire que le système peut être en équilibre pour toutes les valeurs d'un paramètre comprises entre deux limites. A cause des intégrateurs, les plages d'équilibre des systèmes de régulation ne peuvent être que les zones d'insensibilité des différents éléments. En réalité, un système de régulation ne s'arrête jamais quand le signal d'entrée dans un élément tombe dans la zone d'insensibilité. En effet, quand le signal d'entrée dans un élément a franchi la limite de la zone d'insensibilité, la boucle est pratiquement ouverte et tout le système reste dans l'état où il se trouve : le mouvement continue jusqu'à ce que la zone d'insensibilité soit franchie. Les systèmes de régulation n'ont donc que des positions d'équilibre isolées qui sont pratiquement les limites des zones d'insensibilité. Pour la même raison, les mouvements apériodiques amortis ne peuvent être que des mouvements à l'extérieur des zones mortes. Ils sont en général assez difficiles à déterminer. Il en est de même des mouvements apériodiques amplifiés. Ces derniers ne sont, en général, pas à craindre. Souvent ils se produisent si l'installation est entachée d'une erreur grossière de bon sens : l'installation bloquée dans une position limite extrême peut continuer à rester ainsi.

V-4. — Comparaison des systèmes linéaires et non linéaires.

V-41 : NOUVELLE CLASSIFICATION DES SYSTÈMES.

Au paragraphe II-3, nous avons essayé de classer les systèmes physiques en général d'après les différences (plus ou moins grandes) qui se manifestent entre leur comportement réel et le com-

portement de leur schématisation linéaire. Nous pouvons maintenant préciser cette classification pour ce qui est des systèmes à régulation automatique.

a) Nous appellerons systèmes techniquement linéaires ceux pour lesquels la fonction de transfert en régime permanent se réduit pratiquement à une seule courbe, quelque soit A . Plus précisément, si $\frac{\Delta \rho}{\rho_0}$ et $\frac{\Delta \varphi}{\varphi_0}$ sont très petits devant 1 (fig. 33).

FIG. 33

b) Nous appellerons systèmes linéarisables ceux pour lesquels la courbe $A = 0$ correspond au schéma linéaire. Ce n'est par exemple pas le cas des installations contenant un jeu. On a vu, paragraphe V-5, que dans ce cas $A = \infty$ correspond au schéma linéaire.

c) Les autres systèmes sont dits non-linéarisables.

Dans ce dernier cas, il peut arriver que les courbes de transfert $A = C^{ste}$ soient très voisines comme sur la figure 33. Nous appellerons alors le système : quasi-linéaire. C'est le cas de beaucoup de systèmes réels au moins dans un grand domaine du plan $A; \omega$ (voir § II-3 : citrons de WEYGEL). En particulier, les systèmes dont le seuil de sensibilité est petit par rapport aux amplitudes couramment étudiées, se classent dans cette catégorie.

Une classification analogue peut être faite pour les cycles limites. Ceux-ci peuvent être dûs à des phénomènes presque linéaires (la schématisation linéaire donne alors la fréquence propre avec une bonne approximation) ou à des phénomènes absolument non linéaires (la théorie linéaire les ignore).

Nous pouvons maintenant comparer les systèmes réels (non linéaires) et les systèmes schématisés linéaires.

D'abord les systèmes linéaires sont entièrement définis par une courbe de transfert graduée en ω . Les systèmes non linéaires sont caractérisés, à fréquence et amplitude constantes, par un réseau de courbes de transfert. De plus, ce réseau de courbes ne permet pas d'étudier les phénomènes à amplitude ou fréquence variable et, à plus forte raison, les phénomènes transitoires en général. Pour étudier ces phénomènes, il faut connaître une infinité d'autres réseaux de courbes, à moins qu'on ne particularise d'une façon ou d'une autre le système (*). Ainsi, pour étudier la stabilité des cycles limites ou, d'une façon générale, les phénomènes très lentement variables, il faut connaître trois réseaux de courbes. Tout ceci montre que les systèmes linéaires sont pauvres en propriétés : une seule courbe les caractérise. Corrélativement, la linéarisation est une schématisation souvent très poussée : elle enlève un grand nombre de propriétés.

Une autre différence fondamentale entre les systèmes linéaires et non linéaires réside dans l'application du critère de NYQUIST : alors que le système linéaire (fig. 34^a) est stable, on ne

FIG. 34

peut pas en dire autant du système non linéaire (fig. 34^b). Les critères de position ne s'appliquent plus (**).

Néanmoins, nous pouvons admettre qu'ils s'appliquent pour les systèmes presque linéaires, pour les systèmes linéarisables ne contenant que de faibles non linéarités et pour les systèmes quasi-linéaires. Il est évidemment toujours préférable de s'en assurer dans chaque cas particulier.

Finalement, une nouvelle différence entre linéaire et non linéaire apparaît dans la possibilité d'existence de cycles limites : les systèmes

(*) Voir remarque en bas de la page 684.

(**) Sur ce point nous ne pouvons pas non plus être d'accord avec M. LOEB (voir remarque page 684). Il affirme au contraire, sans le démontrer, que les critères de position s'appliquent.

linéaires ont très rarement des cycles limites (point « — 1 » sur une courbe), les systèmes non linéaires beaucoup plus fréquemment (point « — 1 » dans un domaine du plan). Effectivement, les systèmes réels, instables pour les petites amplitudes, ont toujours des cycles limites : la schématisation linéaire est alors absolument caduque. En plus, les systèmes non linéaires peuvent avoir des mouvements limites plus compliqués : cycles limites à battements, etc...

V-42 : UNE CLASSE PARTICULIÈRE D'INSTALLATIONS NON-LINÉAIRES. (*Installations dans lesquelles l'amplitude, ou la fréquence, sont fixes en un point de la boucle.*)

Ces installations occupent une position particulière dans l'ensemble des systèmes non linéaires. Leur simplicité les rapproche des systèmes linéaires.

Il existe, en pratique, beaucoup d'installations de ce genre. Nous étudierons celles où l'amplitude est fixe; ce sont par exemple les installations contenant un relais. Si l'on ouvre la boucle après le relais, on n'a pas besoin d'injecter des mouvements sinusoïdaux ayant différentes amplitudes. Ces systèmes sont donc très proches des systèmes linéaires; la seule variable est la fréquence. En effet, le relais n'est sensible qu'au signe du signal et non à son amplitude. Il n'y a donc qu'une équation définissant le système :

$$\varphi = \varphi_0(\omega) + \frac{d\omega}{dt} \varphi_1(\omega)$$

Les oscillations du système sont données par :

$$\varphi = -\pi + 2k\pi$$

d'où :

$$\varphi_0 + \pi + 2k\pi + \frac{d\omega}{dt} \varphi_1(\omega) = 0$$

On en déduit $\omega(t)$ par une intégration :

$$t = - \int_0^\omega \frac{\varphi_1 d\omega}{\varphi_0 + \pi + 2k\pi}$$

En pratique, $\omega(t)$ est souvent une fonction à plusieurs déterminations (fig. 35). ω_1 ; ω_2 sont des cycles limites possibles. Ce sont pratiquement toujours des pôles doubles (à cause de l'intégration); ω_1 est instable; ω_2 est stable; $\omega = 0$ est souvent un cycle limite possible.

Comme l'amplitude est fonction de ω le long de la boucle, on peut facilement calculer partout les amplitudes relatives aux cycles limites. Un cas particulier important est celui d'une installation comprenant des éléments linéaires et un relais.

FIG. 35

$\varphi_0(\omega)$ et $\varphi_1(\omega)$ dérivent alors de $F(j\omega)$ et la stabilité des cycles limites est donnée par le produit des signes de Y'_ω et X''_{ω^2}

ou :

$$F(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega).$$

Exemple : Réglage de niveau dans un modèle hydraulique.

Il peut se faire à l'aide d'un avanceur de phase et d'un relais agissant sur le moteur de commande d'une vanne.

La fonction de transfert de la partie linéaire est dans le cas le plus simple :

$$F(j\omega) = - \frac{A + j\omega B}{\omega^2} = - \frac{A}{\omega^2} - \frac{jB}{\omega}$$

Donc :

$$Y' > 0; \quad X'' > 0, \quad \text{pour tous les } \omega.$$

Donc il existe un cycle limite pour $\omega \rightarrow 0$ et il est instable.

Un autre cas important est celui des régulateurs par tout ou rien asservis. On ouvre alors la boucle (fig. 36) et on obtient également une fonction de transfert linéaire.

FIG. 36

V-5. — Emploi pratique de la méthode. Emploi pratique des systèmes non linéaires

Après avoir décrit et justifié avec plus ou moins de rigueur la méthode d'étude des systèmes à régulation automatique non linéaires que nous proposons, il reste à résumer en quelques lignes la façon dont on peut l'appliquer. Nous admettrons que le système à étudier est entièrement connu, sauf un ou deux paramètres qui restent à déterminer « au mieux » pour avoir un bon réglage.

On commence alors par diviser le système en éléments. En pratique il existe toujours des éléments pratiquement linéaires et d'autres fortement non linéaires. On peut en général admettre que les premiers sont effectivement linéaires sans trop se tromper. Il est commode d'avoir établi une fois pour toutes un « catalogue » des éléments intervenant souvent (voir § II-3). Il suffit alors de combiner leurs courbes de transfert en régime permanent pour avoir le réseau de courbes relatif au système total. On en déduit les cycles limites ordinaires possibles.

Il est souvent bon de se rendre compte dans un cas pratique de la stabilité de ces cycles. Si on fait varier un paramètre, la stabilité ne change en général pas brusquement. Compte tenu de toutes ces indications, on peut alors fixer le ou les paramètres qui étaient restés libres. Une fois le système entièrement déterminé, on peut essayer d'étudier les régimes lentement variables (si l'étude en vaut la peine).

Jusqu'à présent, on ne savait pas déterminer le comportement des systèmes non linéaires tant soit peu compliqués : on peut même dire qu'on ignorait complètement « la philosophie de la question ». Aussi évitait-on autant que possible l'emploi de systèmes non linéaires. Ceci était évidemment raisonnable : même si l'on ne sait pas déterminer exactement le comportement d'une installation (ce qui n'est pas nécessaire en général), il est cependant toujours nécessaire de savoir quelles peuvent être ses propriétés. Jusqu'à présent, on en savait généralement assez sur les systèmes linéaires (même compliqués) pour avoir toujours une bonne idée physique de leur comportement. Ainsi on savait par exemple quel est

l'effet d'une inertie, d'un intégrateur, d'une conduite à coups de béliet d'onde, d'un avanceur de phase, etc. Par contre, on n'avait par exemple

FIG. 37

aucune idée de l'effet des « zones mortes » dans les relais d'un système tel qu'il est indiqué sur la figure 37.

Nous pensons (et espérons) que l'étude que nous venons de publier servira en premier lieu à se faire une idée assez précise du fonctionnement et des propriétés des systèmes non linéaires à régulation automatique.

Bien sûr, la méthode exposée ici permet de calculer (avec plus ou moins de précision) le comportement de ces systèmes, mais, et ceci nous semble beaucoup plus important, elle est surtout à même d'enrichir considérablement notre intuition. Aussi nous pouvons, par exemple, dire qu'une liaison à jeu déphase en arrière d'un angle compris entre 0 et $\pi/2$, et voisin de β/A si ce nombre est petit (β : jeu; A : amplitude d'entrée); de même nous pouvons dire que l'amplitude baisse dans le rapport $1 - (2/3)(\beta/A)$ si β/A est petit, etc...

Jusqu'à présent, on employait des systèmes qui étaient autant que possible linéaires et on « raisonnait linéaire » même si le système ne l'était pas. Il est important de ne plus avoir peur du « non linéaire » et de ne plus se le cacher quand on ne peut pas le négliger. En effet, les systèmes non linéaires ont des propriétés remarquables et sont souvent supérieurs aux systèmes linéaires. Nous aurons l'occasion de le constater à propos de certains exemples que nous verrons dans le prochain chapitre.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 — DUTILH : Théorie des servo-mécanismes à relais. *Onde Electrique*, octobre 1950.
- 2 — KLOTTER : Technische Schwingungslehre Erster Band. Editeur : Springer Berlin 1951.
- 3 — KLOTTER et KOTOWSKI : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* Band 23 (1943), p. 149.
- 4 — KOCHENBURGER : Analysis Contactor servo mechanisms. *Electrical Engineering*, avril 1950.
- 5 — KOTOWSKI : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* Band 23 (1943), p. 226.
- 6 — MINORSKY : Introduction to non-linear mechanics. Editeur : J. W. Edwards, Ann Arbor, 1947.

- 7 — M. MORDUCHOW and L. GALOWIN : On double-pulse stability criteria with damping. *Quarterly of Applied Mathematics*.
Volume 10, n° 1 (avril 1952), p. 17.
- 8 — Normalisations, spécifications et règles techniques.
Edité par l'Union Technique de l'Electricité (1948).
54, avenue Marceau, Paris (8°).
- 9 — OPELT : Grundgesetze der Regelung.
Editeur : Wolfbüttler Verlagsanstalt (1947).
- 10 — STOKER : Nonlinear Vibrations.
Editeur : Interscience publishers Inc., New-York (1950).
- 11 — WEIGAND : Einführung in die Berechnung rheo-linearer Schwingungsvergänge.
Deutsche Luftfahrtforschung, F.B., 1945.
- 12 — ZADEH : Frequency Analysis of variable networks.
Proceedings of the I.R.E., vol. 38 (1950), n° 3, p. 291.
- 13 — ZADEH : On stability of linear varying parameter systems.
Journal of applied Physics, vol. 22, n° 4 (avril 1951), p. 402.

(A suivre.)

RECTIFICATIF

Quelques résultats nouveaux concernant la régulation des turbines et des installations hydrauliques en général (*la Houille Blanche*, n° 4/1952, p. 567 à 590).

Page 582 : la figure 22 doit se présenter comme suit :

FIG. 22

La déformation entre la figure 21 et 22 est continue : l'arc de courbe passant par l'origine tourne et vient se placer sur l'axe $O\mu$; le point double s'en va à l'infini.

R. MEYER.