Calcul des pertes d'énergie dans un estuaire à marée (Gironde) Principe et exécution du calcul à l'aide d'une machine mathématique

Calculation of energy losses in a tidal estuary (Gironde) Theory and accomplishment of calculation by means of an electronic calculator

PAR M. FAURE,

INGÉNIEUR AU LABORATOIRE NATIONAL D'HYDRAULIQUE (CHATOU)

Les équations aux dérivées partielles (équation de continuité et équation dynamique) sont résolues numériquement en remplaçant les dérivées par des différences finies. La division de l'estuaire de la Gironde en vingt tronçons et du cycle des marées en cinquante intervalles, conduit à 90.000 opérations exécutées mécaniquement en quelques dizaines d'heures, avec une précision qui, en général, ne dépend que de la précision des données et du découpage en tronçons et en intervalles. La machine donne, d'ailleurs, un certain nombre de résultats intermédiaires intéressants (cubature, vitesses, accélérations, etc.). La perte locale d'énergie croît lorsque l'estuaire se rétrécit.

Partial differential equations (equation of continuity and dynamic equation) are solved numerically by substituting finite differences for the differentials. Division of the Gironde estuary into 20 sections, and division of the tide cycle into 50 intervals, involves 90,000 mechanical operations in about thirty hours; the accuracy obtained generally depends only on the accuracy of the data and of the division into sections and intervals. In addition, the machine gives a certain number of interesting intermediary results (cubature, velocities, acceleration, etc.). The local loss of energy increases when the estuary narrows.

I. — INTRODUCTION

On admet généralement que les équations du mouvement non permanent régissent la propagation de l'onde de marée dans un estuaire. Connaissant sa géométrie et les paramètres qui fixent les pertes de charge, il est possible de traiter le problème numériquement, ce que firent des ingénieurs belges ou néerlandais [1]. Dans leurs calculs, les paramètres fournissant les valeurs des pertes de charge étaient supposés constants ou à peu près. Cette hypothèse était admissible puisque leurs calculs ont été confirmés par l'expérience.

Notre but est identique : déterminer la propa-

gation de l'onde de marée résultant de modifications de la géométrie de l'estuaire. Un calcul préliminaire nous a montré que les coefficients de perte de charge ne conservaient pas une valeur constante pendant la marée; le calcul était donc impossible sans connaître leur variation le long de l'estuaire au cours du temps. La connaissance de ces coefficients devrait nous permettre également de procéder plus facilement au réglage des lignes d'eau et des courbes de marées de ce même estuaire dont l'étude est effectuée sur modèle réduit.

Le volume des calculs à effectuer ne per-

mettait pas d'obtenir des résultats dans un délai compatible avec le programme d'étude sur modèle réduit par les procédés classiques de calcul numérique. Aussi avons-nous utilisé les possibilités des nouvelles machines automatiques.

Nous allons présenter dans la suite quelques indications très sommaires uniquement sur le calcul des pertes d'énergie (principe, exécution, résultats), cet exposé n'étant qu'un résumé du rapport complet sur le calcul.

II. — PRINCIPE DU CALCUL

1° RAPPEL DES ÉQUATIONS :

Les équations aux dérivées partielles (établies dans le cas d'un canal de pente et de profil constants) régissant la propagation d'une intumescence à laquelle nous assimilons l'onde de marée, sont les suivantes :

a) Equation de continuité :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (1) \quad \text{dimension } L^2 T^{-1}$$

b) Equation de la dynamique :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g H + \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{\partial U}{\partial t} + g i_r = 0 \quad (2) \quad \text{dimension } L T^{-2}$$

où les notations sont classiques et où :

U = vitesse moyenne spatiale dans la section S ,

$$S \cdot U = \iint u \cdot dS$$

(u vitesse au centre de l'élément dS).

i_r = pente due à la résistance, à la turbulence et, d'une façon générale, à tous les phénomènes qui peuvent entraîner des écarts par rapport aux équations théoriques :

$$|g i_r| = \frac{\lambda U^2}{8 R} = \frac{g U^2}{C^2 R} = F$$

Dans ces équations, la pente de fond n'intervient pas.

G.-H. KEULEGAN [2], tenant compte de la répartition verticale des vitesses, obtient la forme suivante de l'équation de la dynamique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(g H + \alpha \frac{U^2}{2} \right) + \frac{\partial U}{\partial t} \\ + (1 - \alpha) \frac{U}{S} \frac{\partial S}{\partial t} + g i_r = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

avec :

α coefficient de répartition verticale des vitesses défini par :

$$\alpha U^2 S = \iint_S u^2 \cdot dS$$

L'établissement de ces équations impose certaines conditions classiques aux dérivées de S , U , à la pente du profil et à la courbure de l'onde.

Les coefficients α ont été calculés le long de l'estuaire à partir des résultats d'une campagne de mesures de la Division des Essais Extérieurs du Service des Etudes et Recherches Hydrauliques de l'Electricité de France, portant sur 4.000 mesures; α varie entre 1 et 1,1, les valeurs les plus fortes se trouvant à l'aval de l'estuaire où le terme $U/S \cdot \partial S / \partial t$ est faible. ($\alpha U^2 / 2$ est toujours un terme correctif.)

Au total, nous pouvons, compte tenu de la précision des autres mesures, prendre $\alpha = 1$.

c) Equation de l'énergie :

M. ALLARD indique [3] une combinaison des deux équations précédentes qui permet de calculer les pertes d'énergie globale. Nous n'avons pas appliqué sa méthode générale, car nous ne possédions que peu de relevés de courants. (Un calcul de cubature nous a fourni les vitesses moyennes suivant la direction moyenne de l'écoulement.)

En multipliant l'équation de continuité par $\varphi (g H + 1/2 U^2)$ et l'équation de la dynamique par φQ , et en effectuant la somme, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\underset{1}{Q \left(g H + \frac{1}{2} U^2 \right)} \right] + \underset{2}{\varphi b \left(g H + \frac{1}{2} U^2 \right) \frac{\partial H}{\partial t}} \\ + \underset{3}{\varphi Q \frac{\partial U}{\partial t}} + \underset{4}{\varphi Q g i_r} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

chaque terme a la dimension $M L T^{-3}$ de la dérivée d'une énergie par rapport à t et à x , ce qui conduit à intégrer par rapport à x pour obtenir des puissances, puis par rapport à t pour obtenir des énergies.

1. L'intégration par rapport à x entre x_0 et x_1 des termes 1, 2, 3, 4 fournit des termes 1', 2', 3', 4' qui ont la dimension $M L^2 T^{-3}$ d'une puissance et représentent :

- 1' la différence des puissances transmises à travers les sections x_0 et x_1 ;
- 2' la variation d'énergie potentielle de la masse d'eau comprise entre les sections x_0 et x_1 pendant l'unité de temps;
- 3' la variation d'énergie cinétique correspondante;
- 4' la puissance dissipée (par frottement, turbulence) :

$$4' = P(t)$$

2. L'intégration entre t_0 et t_1 des termes 1', 2', 3', 4' fournit des termes 1'', 2'', 3'', 4'' qui ont la dimension $M L^2 T^{-2}$ d'un travail et représentent les analogues des quantités 1', 2', 3', 4' pour l'énergie entre les instants t_0 et t_1 .

En particulier :

— 1) Si $t_1 = t_0 + T$, T période de la marée, les différents termes représentent :

- 1'' la différence des puissances transmises à travers les sections x_0 et x_1 pendant une marée;
- 2'' la variation d'énergie potentielle, nulle si l'on admet qu'au bout d'une période, les conditions de forme et de vitesse de l'onde de marée sont identiques;
- 3'' la variation d'énergie cinétique, nulle pour les mêmes raisons;
- 4'' le travail dépensé par frottement pendant une marée.

— 2) Si l'on intègre entre états successives, le calcul permet de séparer, énergies dissipées au flot et au jusant.

$P(t)$ représente la puissance dissipée sur l'aire A comprise entre les sections d'abscisses x_0 et x_1 , soit $P(t)/A$ par unité de surface. En admettant que cette puissance dissipée provienne uniquement du frottement et que la force de frottement moyenne par une unité de surface, F , soit proportionnelle à $\varphi(U^2/2)$ (écoulement turbulent), la puissance dissipée serait égale à :

$$F \cdot U = C_f \cdot \varphi \cdot \frac{U^3}{2}$$

d'où :

$$\frac{P(t)}{A} = C_f \varphi \frac{U^3}{2} ; \frac{P(t)}{A \varphi \cdot U^3} = \frac{C_f}{2} = \frac{\lambda}{8} \quad (\lambda = 4 C_f)$$

d'où un procédé de calcul du coefficient universel de perte de charge.

2° PRINCIPE DU CALCUL ET TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS.

Le but du calcul est de déterminer, à partir des lignes d'eau et de la géométrie du bassin, les valeurs de $g i_r$ (d'où λ ou C) et de $P(t)$;

- L'équation de continuité fournit le débit Q et la vitesse moyenne U ;
- L'équation de la dynamique fournit $g i_r$ (d'où λ et C).
- L'équation de l'énergie fournit $P(t)$ (d'où λ).

Les équations aux dérivées partielles sont résolues numériquement en remplaçant les dérivées par des différences finies $\Delta/\Delta t$, $\Delta/\Delta x$ qui se calculent en considérant des accroissements des fonctions à x ou t constant (suivant des droites parallèles aux axes des t ou des x); les différences finies représentent des valeurs moyennes des dérivées sur un intervalle Δx ou Δt . Il faut donc envisager, non pas la valeur des quantités U , H , b , Q en un point donné, mais la valeur moyenne dans un intervalle Δx ou Δt ou les deux suivant les cas.

Si l'on considère dans le plan x, t , le quadrillage formé par les droites de coordonnées respectives, $\Delta x_1, \Delta x_1 + \Delta x_2, + \dots \Delta t, 2 \Delta t, 3 \Delta t, \dots$, les valeurs des différentes variables $H, S, b \dots$

FIG. 1. — Réseau d'intégration.

sont connues, par exemple, aux nœuds des quadrillages. Le calcul consiste à déterminer les inconnues au centre d'un rectangle, par exemple, en fonction des données aux quatre sommets correspondants, ou en un nœud en fonction des données aux sommets du losange dont le nœud est le centre (fig. 1).

3233 Calcul de cubature			
$\frac{\Delta Q}{\Delta H} + b \frac{\Delta H}{\Delta t} = 0$ au point $n + 1/2$, $p + 1/2$.			
(2)	$A_{n+1/2}^p + A_{n+1/2}^{p+1}$	$A \rightarrow$	
(3)	$1/2 (A_{n+1/2}^p + A_{n+1/2}^{p+1}) = A_{n+1/2}^{p+1/2}$	$1/2 (2)$	$A_{n+1/2}^{p+1/2}$
(4)	$H_n^{p+1} - H_n^p$	$H \rightarrow$	
(5)	$1/\Delta T (H_n^{p+1} - H_n^p) = \epsilon_n^{p+1/2}$	$1/\Delta T (4)$	
(6)	$a_n^{p+1/2} + a_{n+1}^{p+1/2} = 2 a_{n+1/2}^{p+1/2}$	$(5) \rightarrow$	
(7)	$1/2 (2 a_{n+1/2}^{p+1/2}) = a_{n+1/2}^{p+1/2}$	$1/2 (6)$	$\left(\frac{\Delta H}{\Delta t}\right)_{n+1/2}^{p+1/2}$
(8)	$a_{n+1/2}^{p+1/2} \cdot A_{n+1/2}^{p+1/2} = \Delta Q_{n+1/2}^{p+1/2}$	$(3) \cdot (7)$	
(9)	$\sum_n \Delta Q_{n+1/2}^{p+1/2} = \Delta Q_{n+1/2}^{p+1/2} + Q_{n+3/2}^{p+1/2} = Q_{n+1/2}^{p+1/2}$	$(8) \rightarrow$	$Q_{n+1/2}^{p+1/2}$
(10)	$S_n^p + S_{n+1}^p + S_n^{p+1} + S_{n+1}^{p+1} = 4 S_{n+1/2}^{p+1/2}$	$S \rightarrow$	
(11)	$1/4 (4 S_{n+1/2}^{p+1/2}) = S_{n+1/2}^{p+1/2}$	$1/4 (10)$	$S_{n+1/2}^{p+1/2}$
(12)	$Q_{n+1/2}^{p+1/2} / S_{n+1/2}^{p+1/2} = U_{n+1/2}^{p+1/2}$	$(9)/(11)$	$U_{n+1/2}^{p+1/2}$

FIG. 2. — Planification du calcul de cubature.

Les calculs de cubature et de coefficient de perte de charge ont été effectués au centre d'un rectangle (d'où valeur moyenne dans un tronçon).

Le calcul effectué en un nœud fournit des résultats dans une section déterminée (calcul de l'énergie qui traverse une section déterminée).

3° PLANIFICATION DU CALCUL

(Exemple : cubature fig. 2).

La planification du calcul consiste à décomposer la suite des opérations en opérations élémentaires que la machine est capable d'effectuer

(addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racines, sommation, $\sin x/x$, $s \ln x/x$, $\cos x/x$, $\operatorname{ch} x$, e^x).

Connaissant les valeurs de b , H , S , u , A en fonction de x et t , les trois calculs se décomposent en 90 opérations élémentaires.

Une difficulté s'est présentée au confluent de deux rivières car le calcul dans un tronçon nécessite la connaissance de résultats dans le tronçon amont, nous avons été amenés à considérer une section fictive formée par la réunion des deux sections adjacentes à l'embouchure et à calculer dans cette section des valeurs fictives de certains résultats. L'introduction des conditions aux limites a pu s'effectuer simplement.

III. — EXÉCUTION DU TRAVAIL

Les calculs ont été exécutés au Bureau de Calcul numérique de la Cie I.B.M.; les indications qui suivent sont très sommaires, car nous ne pouvons entrer, ici, dans le détail du fonctionnement et de la codification.

1° GROUPE CALCULATEUR I.B.M. (cf organigramme fig. 3).

Le groupe calculateur électronique I.B.M. est une machine arithmétique où le programme est

ORGANIGRAMME DE FONCTIONNEMENT DU GROUPE CALCULATEUR ÉLECTRONIQUE IBM

(à programme par cartes perforées)

Fig. 3

[illegible]

FIG. 4. — Calcul de cubature. Codification.

introduit par des cartes perforées. Il comprend quatre éléments : tabulatrice, mémoire, calculatrice électronique, perforatrice.

- La tabulatrice a pour rôle de lire sur les cartes perforées les instructions du calcul et de les transmettre aux différents organes du groupe. Elle peut imprimer des résultats.
- L'unité de mémoire permet de conserver de façon semi-permanente des résultats intermédiaires, des constantes.
- La calculatrice effectue, sous le contrôle de chaque carte instruction, les différentes étapes du programme, codifiées sur la carte et les opérations élémentaires que nous avons énoncées.
- La perforatrice récapitulatrice permet de perforer les résultats sur cartes.

2° CARTES PERFORÉES.

Les données sont introduites sous forme de cartes perforées et chaque opération est codifiée au moyen d'un code à trois adresses (adresse des deux facteurs de l'opération à effectuer et adresse du résultat).

3° CODIFICATION

(Exemple : calcul de cubature, fig. 4).

La codification consiste à traduire en chiffres conventionnels de la machine tout le détail des opérations indiquées dans la planification.

4° TEMPS D'EXÉCUTION.

Dans un calcul de ce genre, le travail de planification et de codification est de beaucoup le plus long.

Nous avons effectué deux calculs, le premier en prenant $\Delta t = 15$ m, le deuxième en prenant $\Delta t = 30$ m. Nous avons choisi 20 sections dans le domaine fluvio-maritime.

Le calcul complet pour un tronçon et pour un intervalle déterminés comporte 90 opérations élémentaires :

- Dans le premier calcul, $\Delta t = 15$ m, le nombre d'intervalles Δt est de 50, d'où au total :

$$20 \times 50 \times 90 = 90.000 \text{ opérations.}$$

- Dans le deuxième calcul $\Delta t = 30$ m, nous avons 45.000 opérations.

- Les données introduites sont : tirants d'eau H_n , sections mouillées S_n , largeurs en surface b_n , surfaces des plans d'eau A_n ($20 \times 50 \times 4 = 4.000$ données), plus longueur des tronçons, les cotes des zéros des marégraphes (2×20 données) et des constantes S , T , γ , φ , soit un peu plus de 4.000 données.

Pour déterminer ces valeurs, nous avons tracé leurs variations en fonction du tirant d'eau, puis, connaissant la courbe de marée $h(x, t)$, nous en avons déduit les valeurs des données en fonction de x et de t .

Dans chaque tronçon et pour chaque intervalle, nous avons retenu 14 résultats, soit : 14.000 et 7.000 résultats respectivement dans le premier et le deuxième calcul.

5° AVANTAGES, INCONVÉNIENTS.

a) Avantages :

- Rapidité. Les travaux préliminaires de détermination des données (à effectuer quel que soit le mode de calcul) et de codification étant effectués, le calcul nécessite quelques dizaines d'heures de fonctionnement de la machine. Un travail analogue pour des intervalles plus larges avait nécessité trois mois de travail, avec une machine à calculer ordinaire à clavier.
- Précision. Les résultats sont fournis avec le nombre de décimales désirées. La machine étant une machine arithmétique, la précision des résultats ne dépend que de la précision des données des équations, du mode de calcul et du découpage en x et t .

b) Inconvénients (ils sont, en général, mineurs) :

- Erreurs. Dans les machines analogiques, l'erreur principale est l'erreur de lecture : dans les machines électroniques, l'erreur vient des données ou est purement accidentelle. Des erreurs systématiques peuvent s'introduire lorsqu'on modifie accidentellement l'ordre des cartes perforées.
- Dépouillement. Les résultats sont présentés sous forme de tableau de chiffres. Dans les machines analogiques, on obtient directement des courbes de variations.

IV. — RÉSULTATS

Le calcul dont nous présentons quelques résultats a été effectué pour le domaine fluvio-maritime de la Gironde dans le cas d'une marée de coefficient 108 et de débits fluviaux amont moyens. Les résultats que nous avons obtenus sont au nombre de 14 pour chaque tronçon et chaque intervalle de temps considéré. Ce sont :

— *Calcul de cubature* : débit Q et vitesse moyenne U (1) (2)

— *Calcul de coefficient de perte de charge*.

— accélération due à la pente de la ligne d'eau $g \frac{\partial H}{\partial x}$ (3)

— accélération due à la variation du carré de la vitesse $\frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x}$ (4)

— accélération due à la variation de vitesse : $\frac{\partial U}{\partial t}$ (5)

— accélération due au frottement F (d'où λ et C) (6) (7) (8)

— nombre de REYNOLDS Re (9)

— *Calcul d'énergie*.

— énergie traversant une section

$$\rho Q \left(g H + \frac{1}{2} U^2 \right) = Y \quad (10)$$

— énergie potentielle

$$\rho \int_{x_1}^{x_2} Q \frac{\partial U}{\partial t} dx = D \quad (11)$$

— énergie cinétique

$$\rho \int_{x_1}^{x_2} b \left(g H + \frac{1}{2} U^2 \right) \frac{\partial H}{\partial t} dx = B \quad (12)$$

— puissance dissipée $P(t)$ (13)

— coefficient universel de perte de charge λ (14)

1° CALCUL DE CUBATURE (fig. 5 et 6).

The table displays a large volume of numerical data, organized into columns. Some columns contain sequences of zeros, while others contain specific numerical values. Handwritten annotations, including arrows and circled numbers, are present throughout the table, indicating specific points of interest or corrections. The overall layout is dense and technical, typical of a scientific or engineering data report.

FIG. 5. — Calcul de cubature. Présentation brute des résultats.

FIG. 6. — Calcul de cubature.

FIG. 7. — Calcul de la perte de charge (3-4).

Ce calcul, le plus simple, n'entraîne aucune remarque particulière. Nous avons obtenu des valeurs semblables aux valeurs calculées par d'autres procédés. A remarquer que les renverses de courants sont légèrement postérieures aux étales de niveau.

2° CALCUL DES COEFFICIENTS DE PERTE DE CHARGE.

a) *Analyse des différents termes* (fig. 7) (pente en 10^{-5}) :

— $g \frac{\partial h}{\partial x}$ ce terme est proportionnel à la pente de la ligne d'eau dans la section considérée (au flot < 0 , au jusant > 0).

— $\frac{\partial U}{\partial t}$ ce terme représente l'accélération longitudinale des particules d'eau. Ses valeurs ne sont pas très continues, car son calcul fait intervenir les valeurs des vitesses dans les deux intervalles adjacents.

— $\frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x}$ ce terme est faible comparé aux deux autres.

— F représente la valeur absolue de la somme de ces trois termes.

b) Valeur du coefficient de perte de charge :

Les courbes représentatives présentent quelques anomalies, surtout au moment des étales de courant. En effet, à ces instants, les hypothèses d'établissement des équations ne sont plus vérifiées (fig. 8).

1. La figure 8 fournit les variations de λ en fonction de t dans les tronçons 3-4, 7-8, 12-13, 17-18 avec comme valeur moyenne 0,009 dans 3-4, 0,026 dans 7-8. L'allure de la variation est nettement différente au flot (fortes variations) et au jusant (valeurs à peu près constantes).

A l'amont, les tronçons 12-13, 13-14 fournissent respectivement $\lambda = 0,025$ et $\lambda = 0,017$.

2. La figure 9 fournit les valeurs de λ sur l'ensemble du domaine fluvio-maritime et permet les remarques suivantes :

— tronçon 0-1 $\lambda_m = 0,020$

forte perte de charge due à l'étranglement;

— tronçon 5-6 $\lambda_m = 0,012$

présence d'île;

— tronçon 6-7 $\lambda_m = 0,012$

— tronçon 7-8 $\lambda_m = 0,026$

présence d'île — grande difficulté dans le réglage des lignes d'eau.

FIG. 8. — Valeurs comparées de λ .

4° CALCUL DES PUISSANCES DISSIPÉES.

a) *Analyse des différents termes* : Nous avons calculé, dans chaque section et dans chaque intervalle : Y , D , B , P dont les variations sont indiquées dans la figure 10 pour le tronçon 3-4.

— Y (indépendant du niveau de référence), représente le flux d'énergie qui traverse une section déterminée. Le signe de Y est imposé par le signe de Q ($Q > 0$ au flot, $Q < 0$ au jusant). Ce flux d'énergie s'annule quatre fois : deux fois aux étales de courant (points 1 et 2), une fois à mi-marée, une fois à mi-flot (points 3 et 4). Ce sont les variations de cette quantité qui interviennent dans le calcul de l'énergie des marées.

Dans la section 3 considérée, Y varie entre $-1,4$ et $+1,7$ mégakilowatt.

FIG. 9. — Valeurs du coefficient λ et de la puissance dissipée par km².

FIG. 10. — Calcul de perte d'énergie (3-4).

- D représente les variations de $\varphi \int Q \frac{\partial U}{\partial t} dx$ (*énergie cinétique*). Dans le tronçon 3-4, D varie entre — 0,05 et 0,09 mégakilowatt.

L'intégrale de D sur la marée doit être théoriquement nulle. Le calcul fournit une valeur moyenne de 1,4 mégawatt, soit 2 % de la valeur maxima de D pendant la marée.

- B représente des variations de :

$$\varphi \int b \left(g H + \frac{1}{2} U^2 \right) \frac{\partial H}{\partial t} dx,$$

(*énergie potentielle*), indépendant du niveau de référence. Sur la marée complète, l'intégrale doit être nulle. Le plan de référence choisi étant le plan O du N.G.F. Dans le tronçon 3-4, B varie entre — 0,25 et + 0,25 mégakilowatt. L'intégrale sur la marée est de — 9 mégawatts, soit 3,5 % de la valeur maximum de B.

- P représente la *puissance dissipée* à chaque instant par les forces de frottement et par les autres causes de perte de charge telles que : rétrécissement, élargissement..., par suite de la substitution à l'estuaire d'une série de tronçons rectangulaires dont la section est égale à la section moyenne du tronçon réel. Tous les écarts par rapport au mouvement théorique sont pris en compte par le terme de frottement; P est donc supérieure à la puissance dissipée par frottement pur. A partir de la valeur moyenne de $P(t)$, nous avons calculé la valeur de λ moyen que nous avons trouvée égale dans 3-4 à 0,009 (dans le premier calcul $\lambda = 0,009$). Les valeurs instantanées de $P(t)$ nous ont permis le calcul des valeurs instantanées de λ ; leur valeur moyenne dans 3-4 est 0,008 (au lieu de 0,009 par les deux autres procédés de calculs).

b) Résultats (fig. 9) :

1. Nous avons exprimé P en 10^3 kW par km^2 . La *puissance dissipée* est de l'ordre de 1 à 2 mégawatts par km^2 . La puissance dissipée varie entre 0,6 et 1,5 mégawatt par km^2 à l'aval de l'es-

tuaire (sauf à l'embouchure où elle est de 2,2 mégawatts par km^2 . L'embouchure présente, d'ailleurs, un rétrécissement très important).

Dans les zones très perturbées par la présence d'île, la puissance dissipée varie entre 1,5 et 2,2 mégawatts par km^2 . Les zones à forte valeur de P/A correspondent aux zones où, sur le modèle, nous avons été obligés de créer les pertes de charge très concentrées pour obtenir les lignes d'eau convenables.

2. *Séparation des pertes d'énergie au flot et au jusant* : Le calcul ne peut pas s'effectuer directement par la machine, car elle ne peut choisir les instants des étales de courant. Nous avons effectué ce calcul pour quelques sections, celles où la dissipation d'énergie est importante.

Les pertes d'énergie et les coefficients universels de perte de charge sont, en général, plus importants au jusant qu'au flot (géométrie de l'estuaire qui, par rapport à l'écoulement, est un convergent au flot et un divergent au jusant), sauf dans la section aval qui présente la disposition inverse.

Dans le tronçon 6-7 (km 41, Ile Verte), le calcul fournit pour λ , 0,010 au flot, 0,020 au jusant, 0,016 sur toute la marée.

- 3) A partir des valeurs calculées de λ , nous pouvons déterminer la *propagation de l'onde de marée* par diverses méthodes : HOLSTERS, CRAVA, SCHOENFELD. L'application de la méthode SCHOENFELD nous a permis de déterminer le point (x, t) où apparaissait le mascaret en Garonne.

Nous avons également envisagé d'utiliser les machines électroniques pour ce calcul. Compte tenu des possibilités actuelles du groupe calculateur I.B.M. (qui est une machine arithmétique), nous n'avons pu déterminer un processus commode, la machine étant incapable d'effectuer, du moins de façon simple, les choix successifs qui s'imposent dans la suite du tracé des caractéristiques. Il nous semble que, dans cette voie, on doive s'orienter vers les machines analogiques qui ont déjà effectué des calculs d'oscillation en masse et de coup de bélier.

V. — UTILISATION DES MACHINES ARITHMÉTIQUES

Les calculs précédents n'ont pu être effectués que grâce à la rapidité des nouvelles machines mathématiques dont les possibilités modifient les

théories d'analyse numérique : l'exemple le plus simple est fourni par les calculs de quadrature. La méthode de calcul élémentaire des trapèzes

a été perfectionnée de façon à diminuer les nombres des opérations (GAUSS, WEEDELE...). Avec les machines mathématiques, le procédé le plus simple consiste à appliquer brutalement la méthode des trapèzes; toutes les valeurs successives des côtés des trapèzes sont envoyées dans un compteur qui fournit ainsi le résultat.

Les machines mathématiques sont de deux types : arithmétique et analogique; les machines arithmétiques (groupe calculateur I.B.M.) opèrent sur des quantités discrètes. Les machines analogiques opèrent, au contraire, sur des quantités physiques pouvant varier de façon continue.

Les machines mathématiques peuvent résoudre les problèmes suivants : systèmes d'équations linéaires (jusqu'à 20 inconnues), équations différentielles et systèmes d'équations différentielles, équations aux dérivées partielles (difficultés pour l'introduction des conditions aux limites). Les machines sont donc particulièrement bien adaptées aux problèmes linéaires (vibrations, élasticité, matrices, déterminants). Elles sont la base de tout calcul statistique.

Dans la littérature, on s'aperçoit que les applications ont surtout été développées dans des domaines liés aux industries de guerre en particulier : balistique (tables de tir américaines), mécanique (torsion), physique nucléaire (équation de SCHRÖDINGER) et dans les calculs de table de fonctions.

En mécanique des fluides, les applications

principales ont été faites en aérodynamique qui a bénéficié, pendant la guerre, de l'essor de l'aviation. En hydrodynamique, les applications sont plus restreintes et pourtant de nombreuses études conduisent à des équations inintégrables dans la plupart des cas, mais dont les solutions pourraient être facilement tabulées. Ainsi, dans une communication sur le problème des « roll-waves », M. DRESSLER fournit une solution dépendant de fonctions dont la tabulation permettrait de confronter théorie et expérience.

Dans le domaine de l'hydraulique, on essaye de ne pas recourir aux calculs numériques, car les procédés classiques sont toujours longs et fastidieux. Les machines mathématiques permettent de pallier ces inconvénients. Un calcul numérique, même très complexe, n'est plus un obstacle. La possession d'un outil aussi puissant que les machines mathématiques modernes permet d'envisager les problèmes sous un angle absolument nouveau.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DRONKERS J.J. — *De Ingenieur*, 5-10-51, n° 40, 137.146. Calcul de marées.
- [2] KEULEGAN G.H. — *Research Paper*, R P 1544. National Bureau of Standards. Effects of turbulence and channel slope on translation waves.
- [3] ALLARD P. — *Annales de Géophysique*, janvier-mars 1951, pp. 9-44. Forme et énergie de l'onde de marée de vive eau entre les Héaux de Bréhat et le cap de la Hague.

DISCUSSION

(Président : M. HUPNER)

M. le Président remercie M. FAURE et souligne le grand intérêt à la fois théorique et pratique de sa communication.

M. MEYER signale que les Ets Neyrpac ont constaté que les calculs qu'ils ont faits avec la machine à carte perforée comportaient des erreurs de l'ordre de 20 à 25 %, dues principalement au remplacement des dérivées par des différences finies; il demande à M. FAURE quelles sont les dispositions à prendre pour éviter ces erreurs.

M. FAURE répond que les résultats obtenus au Laboratoire National d'Hydraulique au moyen de la machine et avec le calcul direct sont du même ordre de grandeur : en particulier, pour les débits et les vitesses moyennes, les valeurs calculées à partir des relevés de la répartition verticale des vitesses, effectués par la Division des Essais Extérieurs du Service E.R.H. d'E.D.F., ne présentent aucune différence avec les valeurs données par la machine à carte perforée.

M. MEYER dit qu'il s'est toutefois rendu compte que les résultats changent suivant que l'on fait la sommation des différences finies suivant l'axe des x (déplacements) et l'axe des t (temps), ou les directions de propagation des ondes. Ces dernières semblent les meilleures; malheureusement dans le cas des canaux il y a deux vitesses différentes pour les ondes et il faut que la machine

marque toujours plus vite que les ondes, autrement les résultats deviennent complètement faux.

Une meilleure approximation serait obtenue en poussant jusqu'aux dérivées d'un ordre supérieur au second, vraisemblablement y^{IV} ou y^{VI} au lieu de y'' . Ceci reviendrait physiquement à tenir compte de 8 à 10 points au lieu de 4 par rectangle.

M. FAURE répond que dans l'exemple cité, les vitesses qui sont introduites dans le calcul sont déterminées à partir de valeurs qui, pratiquement, font intervenir les quatre ordres de dérivation.

Sur la demande de M. le Président, M. MEYER précise :

1° Que le Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique n'a pas encore appliqué les procédés de calcul mécanique à des modèles en cours d'études, mais a tenu d'abord à vérifier ses résultats sur un cas schématisé constitué par un canal rectangulaire dans lequel a été réalisé un écoulement de caractéristiques connues; la mise au point de l'emploi de la machine sera poursuivie avant son application aux études en cours.

2° Que les méthodes graphiques ne prêtent pas aux mêmes critiques que celles qu'il signale dans le calcul par machine bien que les unes et les autres fassent intervenir des différences finies car les méthodes graphiques intègrent suivant les ondes, alors que la machine pro-

cède suivant les axes de coordonnées, ce qui introduit les erreurs signalées plus haut.

M. FAURE rappelle que le but du calcul qu'il a exposé consistait en la détermination des pertes de charge et que les résultats obtenus sur ce point sont suffisamment précis, les autres valeurs n'étant indiquées qu'accessoirement et comme ordres de grandeurs.

M. le Président remarque l'intérêt des observations de M. MEYER, dont la conclusion serait la nécessité de choisir judicieusement dans le plan du calcul le système de coordonnées et, éventuellement, la direction des axes.

M. FAURE précise que les erreurs ne sont pas dues à la machine elle-même, mais au procédé d'intégration.

Sur la demande de M. le Président, M. FAURE rappelle que pour le problème de la Gironde :

1° Les données étaient les courbes de marée et les points de sondage; les vitesses n'étant connues qu'en un nombre restreint de points, l'équation de continuité a permis de déterminer l'ensemble des valeurs de cet élément dont on a vérifié la concordance avec les quelques valeurs connues (débits au bec d'Ambès notamment).

2° Les quantités d'énergie dissipée ont été trouvées égales à :

a) Pour la marée étudiée (coefficient 100) : 0,85 MW par km², 8,5 millions de kWh pour l'ensemble de l'estuaire (surface 400 km²);

b) Pendant une année comprenant 705 marées, en prenant le coefficient 0,5 pour ramener à la moyenne : 2,9 milliards de kWh.

(A titre de comparaison, M. ALLARD a trouvé pour la Manche, entre la Bretagne et le Cotentin, soit pour 6.000 km² de surface, 106 milliards de kWh par an.)

M. ALLARD fait les remarques suivantes :

1° La différence trouvée entre l'énergie dissipée en Gironde d'après les calculs de M. FAURE et celle qu'il a trouvée lui-même pour le golfe de Saint-Malo provient particulièrement du fait que l'unité de hauteur dans cette partie de la Manche a une valeur approximativement double de celle qu'elle atteint en moyenne en Gironde. La nature des fonds a aussi une incidence : en Gironde le mouvement liquide se produit dans un canal de section assez irrégulière dont une partie est entretenue artificiellement par des dragages. En Manche, il s'agit d'une région avec récifs, rochers, bancs de sable et toutes les irrégularités des fonds naturels, donc une région au relief sous-marin très complexe. Il est par suite bien difficile d'interpréter *a priori* les différences entre les chiffres obtenus pour les énergies dissipées dans les deux domaines en cause.

2° En ce qui concerne les données relatives aux vitesses, il n'y a pas lieu de regretter que celles-ci ne soient pas données par l'expérience, par mesure directe; l'équation de continuité appliquée dans un canal permet de calculer la vitesse moyenne dans une section qui est précisément la quantité dont on a besoin et qui échapperait à une mesure directe faite en un point isolé. En pleine mer où les débits liquides ne sont pas canalisés, on est obligé d'utiliser des mesures directes de courant

faites en un point ou plusieurs points, faute d'un renseignement intégré qui serait préférable.

3° Ce qui, en tout état de cause, reste délicat dans ce genre de calculs est l'évaluation des dérivées quel que soit le procédé employé pour y parvenir : qu'il soit graphique ou mécanique tel que M. FAURE le préconise. L'avantage du procédé graphique est d'amortir les résultats des mesures en en prenant la moyenne, le procédé de calcul mécanique risque peut-être d'être plus brutal, mais il présente incontestablement l'avantage de la rapidité.

Sur la demande de M. le Président, M. FAURE précise que la seule erreur humaine dans l'emploi de la machine consiste en l'inversion des cartes, ce qui donne alors des résultats tout à fait incohérents.

M. MEYER estime toutefois qu'en général les machines à calculer peuvent introduire des erreurs inexplicables, sans doute par substitution d'un chiffre à un autre au cours des opérations, ainsi qu'il a pu le constater récemment dans un très simple calcul de puissance de groupe hydro-électrique.

M. FAURE indique qu'avant le calcul d'intégration, tous les calculs intermédiaires avaient été faits à la machine à calculer, vérifiés à la règle à calcul et, éventuellement, rectifiés.

M. le Président, pensant à la possibilité d'appliquer cette méthode de calcul aux problèmes d'élasticité qui comportent de nombreuses équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites, demande quel est le nombre maximum d'inconnues des systèmes calculables avec ce genre de machine.

M. FAURE répond que la machine employée pour le calcul des pertes d'énergie dans les marées permet de résoudre des systèmes d'équations à 15-20 inconnues, mais qu'il existe des types permettant la solution de systèmes à 30 inconnues.

Cette capacité de calcul paraissant faible à M. le Président, pour les calculs de barrage divisés en anneaux horizontaux et en murs, M. MEYER signale un procédé de subdivision des inconnues, qui est applicable pour la plupart des problèmes avec conditions aux limites. Si on cherche par exemple Φ dans un domaine dans lequel $\Delta\Phi = 0$ et où Φ est connu sur le contour, on peut chercher d'abord $\partial\Phi/\partial n$ sur le contour, il n'y a alors qu'environ $3n$ inconnues alors qu'il y a environ n^2 si on cherche directement Φ dans le domaine — on en déduit alors Φ partout par une formule de Green.

M. MEYER signale d'autre part que les erreurs faites sur les problèmes avec conditions aux limites sont plus petites que celles qui entachent les problèmes avec conditions initiales : dans les premiers, en effet, par exemple avec l'équation de LAPLACE, les phénomènes ont tendance à s'égaliser à l'intérieur des limites, tandis que dans les autres, la moindre erreur s'amplifie au fur et à mesure des opérations. Il résulte de l'ensemble de ces remarques que les machines à cartes perforées paraissent pouvoir rendre beaucoup de services en hydraulique.

M. le Président remarque qu'en élasticité, où les problèmes présentent des conditions aux limites, la conclusion de M. MEYER est rassurante.

La séance est levée à 11 h 46.