Distribution des vitesses moyennes pour l'écoulement turbulent dans les conduites cylindriques

Distribution of mean velocities with turbulent flow in cylindrical pipes

PAR R. LEGENDRE

INGÉNIEUR EN CHEF DU GÉNIE MARITIME

Une nouvelle relation différentielle entre la turbulence et la force moyenne de viscosité, inspirée des résultats de REICHARDT, sert de base à l'intégration de la loi de distribution des vitesses dans toute la section, ainsi qu'au calcul du débit et du coefficient de frottement. L'ensemble des résultats relatifs à l'écoulement turbulent dans les conduites cylindriques est ainsi rattaché à une loi simple qui, sans difficulté d'intégration insurmontable, définit l'influence du nombre de Reynolds pour la totalité de la courbe de distribution des vitesses, sauf peut-être dans le domaine de transition.

A new differential relation, inspired by REICHARDT's results, between turbulence and the mean force of viscosity, serves as a basis for integration of the velocity distribution law throughout the section, as well as for calculation of the discharge and of the friction coefficient. All the results relating to turbulent flow in cylindrical pipes are thus linked to a simple law which, without involving great difficulties of integration, defines the influence of the Reynold's number for the entire velocity distribution curve, except perhaps in the transition field.

INTRODUCTION

Par une étude antérieure (1), nous avons tenté de représenter l'écoulement turbulent dans le

noyau central d'une conduite cylindrique à partir des résultats anciens de NIKURADSE (2).

(1) Note sur la distribution des vitesses moyennes pour l'écoulement turbulent dans les conduites cylindriques. *La Houille Blanche*, n° A, 1948 (Mém. et Trav. S.H.F., n° 1, 1948).

(2) J. NIKURADSE. — Gesetzmässigkeiten des turbulenten Strömungen in glatten Röhren. *Forschungsheft*, 356, 1932.

(3) Film turbulent dans les conduites. *La Houille Blanche*, mai 1950.

(4) H. REICHARDT. — Der Einfluss der wandnahen Strömung auf der turbulente Wärmeübergang. *Mitteilungen aus dem Max Planck Institut*, 1950.

(5) H. REICHARDT. — Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeits Verteilung in glatten Leitungen. *Z.A.M.M.*, juillet 1951.

Nous avons, d'autre part, recherché une relation déterminant la turbulence dans le film au voisinage de la paroi (3) et assurant un raccordement continu de la loi de distribution des vitesses dans le noyau à la loi de distribution des vitesses dans le film.

Simultanément, REICHARDT publiait (4-5) de nouveaux résultats sur la distribution des vitesses et présentait une interpolation empirique très voisine de celle que nous avons proposée.

L'objet de la présente étude est une retouche de la relation déterminant la turbulence, faite en vue d'une extrapolation dans le noyau central

avec représentation correcte des résultats de REICHARDT.

LOI RÉDUITE DU FROTTEMENT

La loi réduite de frottement peut être représentée sous la forme simple :

$$y = g + h$$

où :

- y est le rapport du rayon local au rayon R de la conduite;
- g est le rapport de la pente locale de la courbe de distribution des vitesses moyennes du/dy à la pente de cette courbe à la paroi du/dy_p ;
- h est le rapport $u v/u_*^2$ de la valeur moyenne du produit des composantes axiale et radiale de la vitesse au carré de la vitesse de frottement u_* :

$$u_*^2 = \tau/\varrho = - \frac{R}{2\varrho} \frac{dp}{dx}$$

où τ est la tension de frottement à la paroi, ϱ la masse spécifique et dp/dx le gradient de pression.

Il doit être noté que, la turbulence étant négligeable au voisinage immédiat de la paroi, la pente de la courbe de distribution des vitesses est déterminée par la viscosité seule.

$$\tau = -\mu \frac{1}{R} \frac{du}{dy_p}$$

où $\mu = \varrho \nu$ est la viscosité absolue et ν la viscosité cinématique :

$$- \frac{1}{u_*} \frac{du}{dy_p} = \frac{u_* R}{\nu} = \frac{1}{2\varepsilon}$$

et ε est l'inverse du nombre de REYNOLDS formé avec la vitesse de frottement.

RELATION DÉTERMINANT LA TURBULENCE

Pour notre étude antérieure du film, nous avons introduit une relation complémentaire :

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{h^{1/3}}{g} \right] = - \frac{kh}{2\varepsilon}$$

où k est la constante de KARMAN.

Nous avons signalé que cette relation ne peut pas être extrapolée dans le noyau.

La présente étude est fondée sur la relation :

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{h}{g} \left(\frac{h}{y} \right)^{1/3} \right] = - \frac{kh}{2\varepsilon} \frac{4y^2 - 1}{3}$$

L'introduction de y dans le premier membre a essentiellement pour objet de conserver un sens à la relation pour les valeurs négatives de y . Elle n'altère pratiquement pas la loi des vitesses dans le film, où y est très voisin de 1, et simplifie l'extrapolation dans le noyau, où h/y est très voisin de 1.

L'introduction dans le second nombre de la fonction $\frac{4y^2 - 1}{3}$, qui est égale à 1 à la paroi, est destinée à la représentation des résultats de REICHARDT.

PENTE DE LA COURBE DE DISTRIBUTION DES VITESSES

La relation ci-dessus peut être facilement intégrée et définit la pente de la courbe de distribution des vitesses en fonction du rayon réduit y . Posons en effet :

$$h = y - g = y S^3$$

Alors la relation prend la forme d'une équation différentielle à variables séparées :

$$\frac{4 - S^3}{(1 - S^3)^2} dS = - \frac{k}{2\varepsilon} \frac{4y^2 - 1}{3} y dy$$

Pour les conditions limites à la paroi $S = 0$ et $y = 1$, elle s'intègre immédiatement par :

$$I(S) = \frac{S}{1 - S^3} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + S + S^2}{(1 - S)^2} + \sqrt{3} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3} S}{2 + S} = \frac{k}{12\varepsilon} (1 - y^2) (1 + 2y^2)$$

Lorsque y décroît de 1 à 0, la valeur commune des deux membres croît de 0 à $3/32 k/\varepsilon$ pour $y = 1/2$, puis décroît jusqu'à $k/12\varepsilon$ pour $y = 0$. Parallèlement, S croît de 0 à une valeur $S_1 (k/\varepsilon)$ pour $y = 1/2$, puis décroît jusqu'à une valeur $S_0 (k/\varepsilon)$ pour $y = 0$. Ces valeurs sont déterminées par :

$$I(S_1) = \frac{3}{32} \frac{k}{\varepsilon} \quad I(S_0) = \frac{1}{12} \frac{k}{\varepsilon}$$

La variable S reste toujours inférieure à 1, mais s'en approche d'autant plus que ε est plus petit, c'est-à-dire que le nombre de REYNOLDS est plus grand.

La variation de S avec y étant ainsi détermi-

née, la pente réduite de la courbe de distribution de vitesse $1/u_* du/dy$ est définie par :

$$-\frac{1}{u_*} du/dy = -\frac{y}{u_*} du/dy_y = \frac{y}{2\varepsilon} = \frac{y(1-S^2)}{2\varepsilon}$$

DISTRIBUTION DES VITESSES DÉBIT ET COEFFICIENT DE FROTTEMENT

Des intégrations supplémentaires sont nécessaires pour le calcul de la vitesse locale, du débit et du coefficient de frottement.

La distribution des vitesses est définie par :

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{2\varepsilon} \int_y^1 (1-S^2) y dy$$

La vitesse déficitaire, différence de la vitesse maximum u_m sur l'axe et de la vitesse locale u , est déterminée par :

$$\frac{u_m - u}{u_*} = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^y (1-S^2) y dy$$

Le débit est le produit de la section par la masse spécifique et par la vitesse moyenne V dans la section définie par :

$$\frac{V}{u_*} = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^y (1-S^2) y^2 dy$$

Enfin, le coefficient de frottement C_f est donné, sans intégration nouvelle, par :

$$C_f = 2 \frac{u_*^2}{V^2}$$

Il n'est fonction, comme V/u_* , que de ε , c'est-à-dire du nombre de REYNOLDS.

SOLUTION EXACTE

Le rayon réduit peut être exprimé explicitement en fonction du paramètre s et la solution exacte peut être calculée numériquement par les formules :

$$4 \frac{y^2}{3} - 1 = \sqrt{1 - \frac{32}{3} \frac{\varepsilon}{k} I(S)}$$

$$k \frac{u}{u_*} = \int_0^S \frac{4 - S^2}{1 - S^2} \sqrt{1 - \frac{32}{3} \frac{\varepsilon}{k} I(S)} dS$$

$$k \frac{V}{u_*} = \int_0^{S_0} \frac{4 - S^2}{1 - S^2} \left[1 + \frac{3}{\sqrt{1 - \frac{32}{3} \frac{\varepsilon}{k} I(S)}} \right] \frac{dS}{4}$$

Si la détermination négative du radical est retenue pour le calcul de $y < 0,5$, il convient de procéder aux intégrations d'abord de 0 à S_1 pour la détermination positive du radical, puis de S_1 à S ou à S_0 pour la valeur négative du radical.

La formule d'intégration montre que pour $y < 0,5$:

$$u(y^2) = 2u(1/4) - u(1/2 - y^2)$$

La solution exacte peut présenter de l'intérêt pour l'étude précise des faibles nombres de REYNOLDS dans le domaine de raccordement du régime turbulent au régime laminaire. Elle ne sera pas exploitée par la suite.

DISTRIBUTION APPROXIMATIVE DES VITESSES

Mettant en évidence l'allure de variation de la vitesse au voisinage de la paroi, on peut écrire :

$$k \frac{u}{u_*} = J(S) + A(y^2, \varepsilon)$$

avec :

$$J(S) = S + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + S + S^2}{(1 - S)^2} + \sqrt{3} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3} S}{2 + S}$$

En dérivant et tenant compte de la relation entre y et s , il est possible d'obtenir :

$$\frac{dA}{dy^2} = 4 \frac{1 - S^2}{1 + 2y^2} I(S)$$

Le produit $(1 - S^2) I(S)$ est nul pour $S = 0$, mais tend vers 1 lorsque S s'approche de 1 et, pour une correction, il peut suffire de le confondre avec 1 (*). Alors :

$$A \sim 2 \ln \frac{3}{1 + 2y^2}$$

En définitive, la distribution des vitesses est définie paramétriquement, en première approximation, par :

$$4 \frac{y^2}{3} - 1 = \sqrt{1 - \frac{32}{3} \frac{\varepsilon}{k} I(S)}$$

$$k \frac{u}{u_*} \sim J(S) + 2 \ln \frac{3}{1 + 2y^2}$$

(*) Une intégration par parties pourrait fournir une approximation plus serrée :

$$A \sim 2(1 - S^2) I(S) \ln \frac{3}{1 + 2y^2} + \dots$$

En particulier, la vitesse maximum sur l'axe u_m peut être calculée par :

$$k \frac{u_m}{u_*} \sim J(S_0) + 2 \ln 3$$

La valeur correspondante de ε , c'est-à-dire du nombre de REYNOLDS, est donnée par :

$$\varepsilon = \frac{k}{12 I(S_0)}$$

CALCUL DE LA DISTRIBUTION DES VITESSES

Les résultats du calcul sont représentés sur la figure 1.

Fig. 1

La courbe en trait plein correspond à la limite pour $\varepsilon = 0$ de la distribution des vitesses u/u_* portée en fonction de $y_+ = (1-y)/2\varepsilon$ sur une échelle logarithmique.

La courbe en trait discontinu correspond à la vitesse maximum réduite u_m/u en fonction de $y_+ = \frac{1}{2\varepsilon}$ pour $y = 0$. Elle cesse d'être significative pour les petites valeurs de y , en raison des approximations faites.

La courbe en trait ponctué représente la distribution des vitesses pour $\varepsilon = 0,01$. Elle n'est pas connue avec précision, puisque les approximations supposent ε très petit, mais donne une image de l'influence du nombre de REYNOLDS.

Les courbes correspondant à des valeurs de ε plus faibles, du domaine des nombres de REYNOLDS usuels, n'ont pas été tracées car elles sont pratiquement confondues avec la courbe limite pour $\varepsilon = 0$ lorsque y_+ est modéré et s'élèvent ensuite légèrement au-dessus de cette courbe pour franchir même la courbe des vitesses maxima avant d'y aboutir.

Les points expérimentaux de NIKURADSE et de REICHARDT ont été reportés sur la figure sans indication du nombre de REYNOLDS ou de la valeur de ε car ils correspondent tous à des nombres de REYNOLDS assez élevés et il est déjà satisfaisant de constater qu'ils sont voisins de la courbe limite et plutôt au-dessous dans la région $10 < y_+ < 100$ où les courbes théoriques montrent précisément que la vitesse doit diminuer pour une valeur donnée de y_+ lorsque ε croît.

La représentation des résultats expérimentaux dans le domaine des grandes valeurs de y_+ est un peu moins satisfaisante.

COEFFICIENT DE FROTTEMENT APPROXIMATIF

Le procédé d'approximation, utilisé pour le calcul de la distribution des vitesses, peut aussi être exploité pour la détermination de la vitesse moyenne dans la section, mais l'erreur introduite dans chacun des calculs ne garantit pas leur parfaite correspondance.

La vitesse moyenne est la limite pour $y = 0$ de $V(y)$:

$$\frac{V(y)}{u_*} = \frac{1}{2\varepsilon} \int_y^1 (1 - S^2) y^2 dy$$

Posons :

$$k \frac{V(y)}{u_*} = J(S) + B(y^2, \varepsilon)$$

La dérivation et l'élimination partielle de y donne :

$$\frac{dB}{dy^2} = \frac{1}{1 + 2y^2} I(S) = \frac{1}{4} \frac{dA}{dy^2}$$

$$B = \frac{A}{4} \sim \frac{1}{2} \ln \frac{3}{1 + 2y^2}$$

et, en passant à la limite :

$$k \frac{V}{u_*} \sim J(S_0) + \frac{1}{2} \ln 3$$

ou encore, en rapprochant de la loi de vitesse maxima et en adoptant $k = 0,4$:

$$\frac{u_m}{u_*} \sim \frac{V}{u_*} \sim \frac{3}{2k} \ln 3 = \frac{15}{4} \ln 3 \sim 4,12$$

valeur très voisine de celle déduite par PRANDTL des résultats expérimentaux, soit 4,07.

Il est alors facile de calculer le coefficient de

frottement $\mathcal{C}_f$ et le nombre de REYNOLDS $\mathcal{R}$ correspondant en fonction du paramètre S_0 :

$$k \sqrt{\frac{2}{\mathcal{C}_f}} = J(S_0) + \frac{1}{2} \ln 3$$

$$\mathcal{R} = \frac{2VR}{\nu} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{V}{u_*} = \frac{12 I(S_0)}{k} \sqrt{\frac{2}{\mathcal{C}_f}}$$

Les résultats du calcul sont représentés sur la figure 2, où ils sont comparés avec les résultats expérimentaux.

FIG. 2

Dans le domaine franchement turbulent, le coefficient de frottement calculé est un peu trop

faible. Ceci doit être rapproché de la valeur trop élevée de la vitesse maxima, déjà mise en évidence sur la figure 1, et qui entraîne la vitesse moyenne. Il ne serait possible de remédier à cette imperfection qu'en retouchant quelque peu la loi de couche-limite ou la loi d'extrapolation vers le noyau de REICHARDT. Nous avons antérieurement étudié la relation :

$$I(S) = \frac{k}{8\varepsilon} (1 - y^4)$$

qui correspond à la relation complémentaire simple :

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{h}{g} \left(\frac{h}{y} \right)^{1/3} \right] = - \frac{k}{2\varepsilon} h y^2$$

et conduit à une valeur plus satisfaisante de la vitesse maxima, de la vitesse moyenne et du coefficient de frottement, mais s'accorde moins bien avec la distribution des vitesses dans le noyau telle qu'elle est présentée par REICHARDT.

Dans le domaine de transition, les résultats expérimentaux montrent un raccordement du régime turbulent au régime laminaire beaucoup moins progressif que celui qu'indique le calcul. Il est vraisemblable que ceci subsisterait s'il était renoncé aux facilités des approximations qui sont plus spécialement hasardées dans ce domaine.

CONCLUSION

Il semble possible de représenter l'ensemble des résultats expérimentaux relatifs à l'écoulement dans les conduites cylindriques en partant d'une loi élémentaire assez simple qui, sans difficulté d'intégration insurmontable, définit l'influence du nombre de REYNOLDS pour la totalité de la courbe de distribution des vitesses, sauf peut-être dans le domaine de transition.

Il est vraisemblablement possible d'améliorer encore la représentation en retouchant quelque peu la loi élémentaire. Celle-ci n'a pourtant pas de signification physique profonde car il est vraisemblable que la turbulence satisfait à une équation intégrale dont les équations différentielles, progressivement compliquées depuis VON KARMAN, ne donnent qu'une image approchée.

DISCUSSION

(Président : M. BARRILLON)

M. DANIEL signale que M. BIÉSEL a fait récemment une étude analogue basée sur des hypothèses simplifiées et définissant théoriquement la harpe et la courbe de Nikuradse, mais s'écartant de la droite de Blasius pour redescendre vers le bas après le genou. Cette théorie expliquerait certains résultats d'expériences, notamment celles de COMOLLET, et tendrait à résoudre le problème de la stabilité de l'écoulement laminaire.

M. LEGENDRE remarque que le genou est beaucoup moins accentué si on remplace l'échelle des coefficients

de frottement par celle des résistances: or, dans la stabilité, c'est la résistance, produit du coefficient de frottement par le carré de la vitesse qui compte. M. LEGENDRE pensait qu'il pouvait exister pour des vitesses croissantes un faux équilibre laminaire prolongé et qu'en revanche, si on diminuait la vitesse, on pouvait se raccorder d'une façon continue à la courbe, par suite du retour de la turbulence.

M. le Président remercie M. LEGENDRE et propose de demander à M. BIÉSEL de présenter son étude à une prochaine réunion.