Vitesse de chute des grains de sable dans les fluides en milieu infini

Relation entre le coefficient de traînée et le coefficient de forme

Settling velocity of sand grains in fluids in an infinite medium

Relationship between drag coefficient and shape coefficient

PAR R. DURAND ET G. COHEN DE LARA

INGÉNIEURS AU LABORATOIRE DAUPHINOIS D'HYDRAULIQUE

Vérification expérimentale de l'influence fondamentale du maître-couple sur la vitesse de chute limite d'une particule solide dans l'eau, lorsqu'elle oppose naturellement sa plus grande section au mouvement. — Définition d'un coefficient de forme rapporté à la sphère ayant même densité et même poids que le grain. — Remarques sur les coefficients de traînée de diverses sphères associées au grain.

Experimental verification of fundamental influence of main torque on the limit settling velocity of a grain of sand in water, when its greatest cross-section is naturally normal to the direction of motion.—Definition of a shape coefficient with reference to a sphere having same specific gravity and same weight as the grain.—Remarks on drag coefficient of various spheres connected with the grain.

La vitesse de chute du grain de sable isolé en eau calme paraît bien constituer un paramètre essentiel pour l'étude des problèmes d'écoulements mixtes d'eau et de matériaux.

Le grain atteint sa vitesse de chute limite lorsque son poids apparent P_a est égal à sa traînée T , c'est-à-dire à la résistance hydrodynamique résultant du mouvement relatif. Il est d'usage depuis NEWTON d'exprimer cette traînée sous la forme :

$$T = Cx \varphi S \frac{W^2}{2} \quad (1)$$

avec :

φ masse spécifique du fluide,

S maître couple du grain dans la direction du mouvement,

W vitesse limite de chute,

Cx coefficient de traînée (nombre sans dimensions).

Il semble logique de prendre comme corps de comparaison la sphère dont le coefficient de traînée a été longuement étudié. La forme des grains naturels s'en rapproche d'ailleurs toujours plus ou moins par suite de l'usure réciproque des grains.

Pour une sphère de masse spécifique φ' et de diamètre d , l'équilibre des forces en régime d'équilibre s'écrit :

$$\frac{\pi d^3}{6} (\varphi' - \varphi) g = Cx \varphi \frac{\pi d^2}{4} \frac{W^2}{2} \quad (2)$$

Si l'on connaît d , φ et φ' , la mesure de W per-

FIG. 1. — Coefficient de traînée C_x en fonction du nombre de Reynolds Wd/ν pour des sphères.

met de déterminer la valeur du coefficient de traînée C_x . Celui-ci se présente comme une fonction du nombre de Reynolds.

$$R_e = \frac{Wd}{\nu} \quad (\nu \text{ viscosité cinématique de l'eau}).$$

Cette fonction est représentée en coordonnées logarithmiques par la courbe de la figure 1.

Les points d'essais correspondent soit à des essais de vitesse de chute, soit à des essais en soufflerie.

Lorsque le grain s'écarte de la forme sphérique, sa vitesse de chute devient différente de celle de la sphère de même volume et de même densité. Le diamètre de cette sphère de référence est appelé diamètre nominal d_n . C'est aussi le diamètre de la sphère ayant même poids et même densité.

Le diamètre de la sphère ayant même vitesse de chute et même densité est appelé diamètre équivalent d_e .

Il est généralement difficile de caractériser de façon précise la forme des grains. Un grand nombre de coefficients de forme ont été définis. Il s'agit de choisir les mieux adaptés au problème étudié, en fonction des possibilités de mesure.

Chacun de ces coefficients de forme correspond à des conditions hydrodynamiques particulières et devient insuffisant lorsque ces conditions changent.

Les essais de M. McNOWN ont montré que lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à 10^{-1} , le grain tombant en chute libre conserve son orientation initiale. Dans ce domaine, un grain de forme non sphérique possède plusieurs valeurs de vitesse de chute, correspondant cha-

cune à une orientation particulière sur sa trajectoire.

Lorsque le nombre de Reynolds est compris entre 10^{-1} et 300, le grain tend rapidement à opposer sa plus grande section au mouvement, quelle que soit son orientation initiale.

Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 300, le grain oscille autour de la position d'équilibre précédente. Son mouvement de chute est analogue à celui d'une feuille morte. La traînée du grain augmente notablement.

Ces expériences fondamentales montrent combien il est difficile de concevoir un coefficient de forme unique qui soit valable pour toutes les dimensions des grains, même en se limitant au problème des vitesses de chute.

Lorsque les grains tendent naturellement à opposer leur plus grande section au mouvement, il est relativement facile de mesurer ce maître couple maximum S en utilisant une chambre claire. Les grains ont en effet tendance à se placer naturellement sur la platine de la loupe en présentant leur plus grande section. Après relevé du contour de la chambre claire, on peut planimétrer l'aire S . Il semble d'ailleurs que ce soit la seule caractéristique de forme que l'on puisse mesurer avec quelque précision pour des grains fins, les indices d'émoussé semblant n'intervenir que de façon secondaire sur la valeur de la vitesse de chute.

Les résultats d'essai que nous présentons ici sont relatifs à des grains pour lesquels le nombre de Reynolds associé à la vitesse de chute limite est compris entre 0,1 et 300.

Au cours des essais de vitesse de chute, nous avons bien vérifié que ces grains descendaient de façon stable, en opposant constamment leur maître couple maximum au mouvement de chute.

I. — ETUDE EXPÉRIMENTALE

Les grains de sable étudiés ont été prélevés dans la Loire à Nantes. Il s'agit des matériaux utilisés pour l'étude systématique des conditions de refoulement en conduite que nous avons entreprise pour le Service Maritime des Ponts et Chaussées de la Loire-Inférieure.

Ces sables ont été séparés en bandes granulométriques étroites par passage sur des tamis de laboratoire dont les vides de maille suivaient approximativement une progression géométrique de raison $\sqrt{2}$. La figure 2 montre des échantillons des grains étudiés. Le diamètre moyen de tamisage était compris entre 0,15 mm et 2,04 mm.

FIG. 2.

En haut : Les grains sont grossis 20 fois.

En bas : Les grains sont grossis 4,5 fois.

Après lavage et séchage à l'étuve, nous avons effectué sur chaque échantillon les mesures suivantes :

1) *Mesure de la densité du sable :*

Elle est effectuée au pycnomètre; on en déduit aisément la masse spécifique.

2) *Mesure du diamètre nominal d_n :*

On détermine le poids moyen d'un grain par pesée au trébuchet de 250, 500 et 1.000 grains

du même échantillon. On en déduit la valeur du diamètre nominal avec une très bonne précision.

3) *Mesure de l'aire du maître couple maximum S :*

Pour chaque catégorie étudiée, nous avons relevé à la chambre claire le contour apparent de 50 grains. En imprimant de petites secousses à la platine du microscope, on arrive à placer les grains suivant leur section maximum. Les aires ainsi délimitées ont été planimétrées. Après avoir mesuré avec un micromètre étalon le coefficient

d'agrandissement du microscope et de sa chambre claire, nous en avons déduit l'aire moyenne S du maître couple maximum des grains. La figure 3 donne quelques exemples des profils obtenus à la chambre claire.

FIG. 3. — Profils de grains de sable passant entre deux tamis ayant pour vide de maille 0,26 mm et 0,185 mm.

4) Mesure de la vitesse de chute :

Nous avons mesuré successivement la vitesse de chute dans l'eau de tous les grains observés à la chambre claire. Nous avons utilisé un tube de verre de 100 mm de diamètre et de 80 cm de longueur. Nous avons noté le passage successif du grain devant deux repères distants de 60 cm en utilisant un chronomètre au 1/100° de seconde.

Dans ces conditions, nous pouvions négliger l'influence des parois latérales et du fond de l'éprouvette.

Finalement, nous avons pu déterminer une valeur moyenne de la vitesse limite de chute pour chaque catégorie de grains.

Connaissant la masse spécifique ρ' du sable, le diamètre nominal d_n , le maître couple maximum S et la vitesse de chute W , nous pouvons déterminer le coefficient de traînée réel C_x par la relation :

$$(\rho' - \rho) g \frac{\pi d_n^3}{6} = C_x \rho S \frac{W^2}{2} \quad (3)$$

En portant en coordonnées logarithmiques les valeurs de C_x ainsi déterminées en fonction du nombre de Reynolds $\frac{W d_n}{\nu}$, les points d'essais correspondant à chaque catégorie de sable se placent avec une bonne approximation sur la courbe relative aux sphères (fig. 4).

On peut dire que le nombre de Reynolds utilisé présente en quelque sorte un caractère volumétrique puisque :

$$d_n = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$$

V étant le volume de la sphère.

Ainsi la mesure du maître couple maximum S permet bien de caractériser complètement la forme des grains de sable étudiés, du point de vue de la vitesse de chute limite. Le coefficient de traînée réel du grain est le même que celui des sphères à condition de prendre pour référence :

$$R_0 = \frac{W d_n}{\nu}$$

Avec cette réserve, la modification de forme ne semble pas avoir modifié la force de traînée.

FIG. 4. — Coefficient de traînée réel des grains de sable en fonction du nombre de Reynolds $W d_n / \nu$.

FIG. 5. — Coefficient de forme et sphères associées au grain.

II. — COEFFICIENT DE FORME ψ ET SPHÈRES ASSOCIÉES

Nous pouvons maintenant, grâce à ce résultat, définir un coefficient de forme ψ .

Si en partant des mêmes grains nous n'avions pas mesuré le maître couple S , nous n'aurions pu définir qu'un coefficient de traînée fictif Cx_0 , en utilisant la relation :

$$(\varphi' - \varphi) g \frac{\pi d_n^3}{6} = Cx_0 \varphi \frac{\pi d_n^2}{4} \frac{W^2}{2} \quad (4)$$

Si nous divisons, membre à membre, l'équation (4) par l'équation (3), il vient :

$$1 = \frac{Cx_0}{Cx} \times \frac{\pi d_n^2}{4 S}$$

ou :

$$\frac{Cx}{Cx_0} = \frac{\frac{\pi d_n^2}{4}}{S} = \psi \quad (5)$$

Nous appellerons ψ le rapport de la section droite de la sphère de même poids et même densité à la section droite maximum S du grain. C'est un coefficient de forme qui caractérise la section du grain.

Si nous portons les valeurs de Cx et Cx_0 sur le même graphique : $\left(\log Cx; \log \frac{W d_n}{v} \right)$, le point A correspond à Cx et le point B à Cx_0 (fig. 5). On voit facilement, d'après la relation (5), que le segment BA est égal à $\log \psi$.

1. Sphère de même poids et même densité.

Nous allons rechercher où se place sur la figure 5 le point correspondant à la sphère de diamètre nominal d_n .

Pour cette sphère, l'essai en vitesse de chute donnera une vitesse W_1 , d'où l'on peut déduire

par la relation suivante la valeur du coefficient de traînée Cx_1 :

$$(\varphi' - \varphi) g \frac{\pi d_n^3}{6} = Cx_1 \varphi \frac{\pi d_n^2}{4} \frac{W_1^2}{2} \quad (6)$$

En combinant avec l'équation (4), il vient :

$$\frac{Cx_0}{Cx_1} = \left(\frac{W_1}{W} \right)^2 = \left(\frac{\frac{W_1 d_n}{v}}{\frac{W d_n}{v}} \right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 \quad (7)$$

Le point figuratif C de la sphère de diamètre nominal est donc à la fois sur la courbe relative aux sphères et sur une droite de pente (-2) passant par le point B.

2. Sphère de diamètre équivalent.

Sa vitesse de chute sera par définition la même que celle du grain de comparaison. Soit d_e son diamètre.

Le coefficient de traînée Cx_2 se déduit de la relation suivante :

$$(\varphi' - \varphi) g \frac{\pi d_e^3}{6} = Cx_2 \varphi \frac{\pi d_e^2}{4} \frac{W^2}{2} \quad (8)$$

En combinant avec l'équation (4), il vient :

$$\frac{Cx_2}{Cx_0} = \frac{d_e}{d_n} = \frac{\frac{W d_e}{v}}{\frac{W d_n}{v}} = \frac{R_2}{R_0} \quad (9)$$

Le point figuratif D de la sphère de diamètre équivalent est donc à la fois sur la courbe relative aux sphères et sur une droite de pente $(+1)$ passant par le point B.

3. Caractéristiques de la sphère correspondant au point A.

Considérons parmi les sphères correspondant au point A, celle qui a même vitesse de chute et même diamètre nominal que le grain. Sa densité est nécessairement différente de celle du grain. Soit ρ'_0 la masse spécifique correspondante :

On aura :

$$(\rho'_0 - \rho) g \frac{\pi d_n^3}{6} = Cx \rho \frac{\pi d_n^2}{4} \frac{W^2}{2} \quad (10)$$

En combinant avec l'équation (4), il vient :

$$\frac{\rho'_0 - \rho}{\rho' - \rho} = \frac{Cx}{Cx_0} = \psi \quad (11)$$

Le rapport des densités apparentes sera égal à ψ .

III. — MOUVEMENTS DE CHUTE EN FEUILLE MORTE

Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 300, les grains tombent « en feuille morte ». Le grain oppose au mouvement des sections droites variables et le coefficient de forme ψ que nous avons défini ne suffit plus à caractériser le grain. Par analogie, on pourrait définir un coefficient ψ' associé à une section fictive S' . Le rapport $K = \psi'/\psi$ pourrait caractériser en quelque sorte le degré de stabilité du grain autour de sa position d'équilibre. Il faudrait rechercher expérimentalement dans quelle mesure ce coefficient K dépend de la forme du grain.

IV. — UTILISATION DU FACTEUR DE FORME ψ

Les essais que nous avons effectués sur du sable de Loire demanderaient à être complétés par des essais sur d'autres matériaux. Si la pro-

priété mise en évidence se conserve pour d'autres formes de grains, on peut remarquer que la détermination expérimentale de ψ pourrait ensuite remplacer l'essai de vitesse de chute.

Connaissant le diamètre nominal, on tracera la droite de pente (— 2) passant par le point figuratif correspondant à la sphère de même diamètre nominal. Si l'on connaît ψ , le point figuratif B du graphique 5 sera sur cette droite et sera situé suivant la verticale à une distance égale à $\log \psi$ de la courbe des Cx de la sphère. On déduira aisément la valeur de la vitesse de chute de la position du point B.

Pour faciliter le travail, on pourrait utiliser le graphique de la figure 6 sur lequel sont figurés deux réseaux de droites gradués en diamètres nominaux et en diamètres équivalents (le graphique est calculé pour des sables de densité 2,65).

CONCLUSION

Les essais de vitesse de chute que nous avons effectués sur des sables de Loire, combinés avec la mesure du maître couple maximum des grains, nous ont montré que le coefficient de traînée réel demeurerait le même que celui des sphères, sous réserve de prendre comme nombre de Reynolds de comparaison $\frac{W d_n}{\nu}$, d_n étant le diamètre nominal. Ceci nous amène à définir un coefficient de forme ψ valable lorsque les grains tombent en présentant naturellement leur maître couple maximum, c'est-à-dire pour des nombres de Reynolds compris entre 10^{-1} et 300. Ce coefficient de forme est le rapport de la section de la sphère de diamètre nominal à la section maximum du grain.

FIG. 6. — Diagramme permettant la détermination du coefficient de forme.