Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux

Contribution to the study of permanent and non-permanent flows in channels

PAR FRANÇOIS SERRE

INGÉNIEUR CIVIL DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Importance et portée de l'hypothèse consistant à négliger la courbure des filets liquides. Établissement des équations différentielles de l'écoulement permanent compte tenu des effets de courbure, d'une part en appliquant le théorème des quantités de mouvement, d'autre part en appliquant le théorème de Bernoulli. L'exploitation de ces équations pour l'étude générale des courbes de remous.

Applications à la détermination des lignes de remous dans un certain nombre de cas classiques en régime permanent : écoulement fluvial et torrentiel, ressaut, ressaut ondulé (théorie du déferlement) — changements de pente et notion de section de contrôle — écoulements par vanne de fond — déversoirs à large seuil (influence de la rugosité, ondulations de surface, résultats théoriques et expérimentaux).

Étude du régime variable : établissement des équations aux dérivées partielles de l'écoulement. Le parti que l'on peut en tirer dans l'étude des intumescences, de la houle, du ressaut déferlant en régime variable.

The importance and consequences of the hypothesis involving disregard of stream curvature. Development of differential equations for the permanent flow, taking into account the effects of curvature, by applying the momentum principle on the one hand, and the Bernoulli theorem on the other. Exploitation of these equations for the general study of backwater curves.

Applications to the determination of the backwater curve in a certain number of classical cases under permanent flow : tranquil and torrential flow, jump, undulated jump (breaking theory)—changes of bottom slopes and notion of control section—discharge under bottom gates—broad-crested weirs (influence of roughness, surface undulations, theoretical and experimental results).

Study of the non-permanent flow; formation of partial differential equations of flow. The advantages which can be gained in the study of swell, waves, breaking jump under variable flow.

Nous nous proposons, dans ce mémoire, d'étudier les écoulements permanents et variables dans les canaux, en tenant compte de l'inclinaison et de la courbure des filets liquides, hypothèses qui n'interviennent pas dans la théorie des écoulements « graduellement variés ».

Cette restriction conduit, pour les écoulements permanents, à des résultats physiquement absurdes lorsque la hauteur d'eau est voisine de la hauteur critique. L'équation différentielle de la ligne d'eau montre que la pente de la surface libre tend alors vers l'infini, ce qui est en con-

tradition avec une des hypothèses de la théorie, qui suppose essentiellement la composante verticale de la vitesse négligeable vis-à-vis de la composante horizontale. Les équations que nous allons établir vont nous permettre de prouver que le passage par la hauteur critique n'entraîne pas obligatoirement une augmentation très forte de la pente et d'expliquer les phénomènes d'on-

dulation de la surface libre, pour lesquels l'effet de courbure joue un rôle particulier.

De la même façon, les équations aux dérivées partielles des écoulements variables nous conduiront à une étude complète des ondes de translation et nous permettront de considérer comme des « ondes stationnaires » les ondulations de surface et le ressaut en régime permanent.

I. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE L'ÉCOULEMENT PERMANENT

Dans tout ce qui va suivre, nous nous placerons délibérément dans l'hypothèse d'un écoulement plan en considérant un canal prismatique de section rectangulaire et de grande largeur l vis-à-vis de la hauteur d'eau y .

Nous supposerons également la pente i suffisamment faible pour qu'on puisse poser :

$$\cos i = 1 \quad \sin i = i$$

adoptant le mode de représentation d'EULER, nous prendrons pour axes de coordonnées Ox dirigé vers le bas suivant l'axe du radier, Oz perpendiculaire au radier dirigé vers le haut.

Appliquons le théorème des quantités de mouvement à la portion de fluide comprise entre les sections (s) et (s') d'abscisse x et $x + dx$.

FIG. 1

En projection sur l'axe Ox , on obtient :

$$\int \int_{(s')} p \, d\sigma + \int \int_{(s')} \rho u^2 \, d\sigma - \int \int_{(s)} \rho u^2 \, d\sigma - \int \int_{(s)} p \, d\sigma = \rho g l i y \, dx - \tau_0 l \, dx \quad (1)$$

avec les notations suivantes :

u composante de la vitesse sur l'axe Ox ,

τ_0 force de frottement sur le radier par unité de surface.

Cette équation est écrite en supposant, ce qui est conforme à l'expérience, que le fluide peut être considéré comme parfait en dehors de la

couche limite, l'influence de la viscosité se traduisant par une force de frottement tangentielle du liquide sur la paroi.

Par analogie avec l'étude des écoulements graduellement variés, posons :

$$M = \frac{1}{l} \int \int_{(s)} \frac{p}{\rho g} \, d\sigma + \frac{1}{l} \int \int_{(s)} \frac{u^2}{g} \, d\sigma$$

M est une fonction de x définie par l'intégrale simple :

$$M(x) = \int_0^{y(x)} \frac{p(z, x)}{\rho g} \, dz + \int_0^{y(x)} \frac{u^2(z, x)}{g} \, dz \quad (2)$$

l'équation (1) s'écrit alors :

$$M(x + dx) - M(x) = \left[i y - \frac{\tau_0}{\rho g} \right] dx$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dM}{dx} = i y - \frac{\tau_0}{\rho g} \quad (3)$$

Le fluide pouvant être considéré comme parfait en dehors de la couche limite, la répartition de la pression dans la section (s) est donnée par l'équation :

$$\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial z} = -1 - \frac{u}{g} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{w}{g} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4)$$

qui conduirait, en négligeant la composante transversale de la vitesse, à une répartition hydrostatique de la pression.

En ce qui concerne la répartition des vitesses normales dans la section (s) , nous admettrons que la courbe de répartition est indépendante de la section et reste identique en coordonnées sans dimensions, et nous poserons :

$$\frac{u(z, x)}{U} = F\left(\frac{z}{y}\right)$$

U désignant la valeur moyenne dans la section (s) de la composante horizontale de la vitesse u :

$$U = \frac{Q}{ly} = \frac{1}{y} \int_0^y u(z, x) \, dz$$

u et w étant liés par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

on peut poser :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad w = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

on en déduit :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{Q}{ly} F' \left(\frac{z}{y} \right)$$

$$\psi(x, z) = \frac{Q}{l} F \left(\frac{z}{y} \right) + \varphi(x)$$

φ étant une fonction arbitraire de x , d'où :

$$w(z, x) = - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{Q}{ly^2} F' \left(\frac{z}{y} \right) z \frac{dy}{dx} - \varphi'(x)$$

$$w(z, x) = u(z, x) \frac{z}{y} \frac{dy}{dx} - \varphi'(x)$$

L'écoulement étant permanent, la surface libre est ligne de courant; on doit donc avoir :

$$w(y, x) = u(y, x) \frac{dy}{dx}$$

$\varphi'(x)$ est donc identiquement nul et :

$$w(z, x) = u(z, x) \frac{z}{y} \frac{dy}{dx}$$

on a également :

$$w(o, x) = 0$$

Dans ces conditions, l'équation (4) s'écrit :

$$\frac{1}{\varrho g} \frac{\partial p}{\partial z} = -1 + \left[\frac{Q^2}{gl^2 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{Q^2}{gl^2 y} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) \right] \left(\frac{z}{y^2} F' \left(\frac{z}{y} \right) \right)$$

ou, en intégrant et en écrivant qu'à la surface libre :

$$z = y \quad p = 0$$

$$\frac{1}{\varrho g} p(z, x) = -z + y + \left[\frac{Q^2}{gl^2 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{Q^2}{gl^2 y} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) \right] \int_y^z \frac{z}{y^2} F' \left(\frac{\alpha}{y} \right) d\alpha$$

ou, en posant $\alpha/y = \beta$ (β étant une variable sans dimension) :

$$\frac{1}{\varrho g} p(z, x) = -z + y + \left[\frac{Q^2}{gl^2 y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{gl^2 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \int_{z/y}^1 \beta F'^2(\beta) d\beta \quad (5)$$

on peut alors effectuer le calcul des intégrales définies figurant dans (2) :

$$\frac{1}{\varrho g} \int_0^y p(z, x) dz = \int_0^y (y - z) dz + \left[\frac{Q^2}{gl^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{gl^2 y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \int_0^y \frac{dz}{y} \int_{z/y}^1 \beta F'^2(\beta) d\beta$$

ou, en posant $z/y = \lambda$ (λ étant une variable sans dimension) :

$$\frac{1}{\varrho g} \int_0^y p(z, x) dz = \frac{y^2}{2} + \left[\frac{Q^2}{gl^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{gl^2 y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \int_0^1 d\lambda \int_{\lambda}^1 \beta F'^2(\beta) d\beta$$

En définitive :

$$\frac{1}{\varrho g} \int_0^y p dz = \frac{y^2}{2} + K \left[\frac{Q^2}{gl^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{gl^2 y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]$$

$K = \int_0^1 d\lambda \int_{\lambda}^1 \beta F'^2(\beta) d\beta$ étant une constante dont la valeur est donnée par la courbe de répartition des vitesses dans une section.

$$\int_0^y \frac{u^2}{g} dz = \frac{Q^2}{gl^2 y^2} \int_0^y F'^2 \left(\frac{z}{y} \right) dz$$

ou en posant $z/y = \lambda$:

$$\int_0^y \frac{u^2}{g} dz = \frac{Q^2}{gl^2 y} \int_0^1 F'^2(\lambda) d\lambda = \alpha \frac{Q^2}{gl^2 y}$$

$\alpha = \int_0^1 F'^2(\lambda) d\lambda$ étant un coefficient de répartition des vitesses.

L'équation (2) prend alors la forme :

$$M(x) = \frac{y^2}{2} + \alpha \frac{Q^2}{gl^2 y} + K \frac{Q^2}{gl^2} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]$$

Avec les hypothèses du mouvement graduellement varié (répartition uniforme des vitesses et hydrostatique des pressions dans la section), M était une quantité caractéristique de la section et ne dépendait que de la hauteur d'eau y :

$$M = \frac{y^2}{2} + \frac{Q^2}{gl^2 y}$$

REMARQUE. — Les équations précédentes ont été obtenues par application du théorème des quantités de mouvement en projection sur l'axe Ox . Appliquons le théorème des quantités de mouvement en projection sur l'axe Oz à la portion de fluide comprise entre les sections (s) et (s') et située au-dessus du plan de côte z .

FIG. 2

L'influence de la viscosité étant négligeable en dehors de la couche limite, on a :

$$l \varphi g (y - z) dx + \int \int_{(s')} \varphi uw d\sigma - \int \int_{(s)} \varphi uw d\sigma - l \varphi w^2 (z, x) dx = l p (z, x) dx$$

Posons :

$$L(x, z) = \frac{1}{lg} \int \int_s uw d\sigma = \frac{1}{g} \int_z^y uw dz$$

il vient :

$$y - z + \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{w^2}{g} (z, x) = \frac{p(z, x)}{\varphi g}$$

tenant compte des expressions de u et w , on obtient :

$$\begin{aligned} L(x, z) &= \frac{Q^2}{gl^2 y} \frac{dy}{dx} \int_{z/y}^1 \beta F'^2(\beta) d\beta \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= \left[\frac{Q^2}{gl^2 y} \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{Q^2}{gl^2 y^2} - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \int_{z/y}^1 \beta F'^2(\beta) d\beta + \\ &\quad + \frac{Q^2}{gl^2 y^4} z^2 F'^2\left(\frac{z}{y}\right) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \\ &= \left[\frac{Q^2}{gl^2 y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{gl^2 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \int_{z/y}^1 \beta F'^2(\beta) d\beta \\ &\quad + \frac{w^2}{g} (z, x) \end{aligned}$$

on retombe sur la formule (5) donnant la valeur de la pression.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE L'ÉCOULEMENT

La force de frottement par unité de surface du fluide sur le radier peut se mettre sous la forme :

$$\tau_0 = C_f \varphi \frac{U^2}{2}$$

U désignant la valeur moyenne dans la section de la composante horizontale de la vitesse $U = Q/l y$ et C_f un coefficient de frottement qui, pour un écoulement hydrauliquement rugueux, ne dépend pas du nombre de REYNOLDS mais du rayon hydraulique égal à la hauteur d'eau y pour un canal rectangulaire très large :

$$\frac{\tau_0}{\varphi g} = \frac{C_f}{2g} \frac{Q^2}{l^2 y^2}$$

En faisant intervenir le coefficient de CHÉZY, comme il est d'usage pour les écoulements à surface libre, $C = \sqrt{2g/C_f}$, les équations différentielles de l'écoulement (3) et (6) s'écrivent :

$$\begin{cases} M(x) = \frac{y^2}{2} + \alpha \frac{Q^2}{gl^2 y} + K \frac{Q^2}{gl^2} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \\ \frac{dM}{dx} = iy - \frac{Q^2}{C^2 l^2 y^2} \end{cases} \quad \begin{cases} M(x) = \frac{y^2}{2} + \frac{Q^2}{gl^2 y} + \frac{Q^2}{3gl^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{3gl^2 y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \\ \frac{dM}{dx} = iy - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^2} \end{cases} \quad (8)$$

Nous nous placerons désormais dans l'hypothèse d'une répartition uniforme des vitesses normales u dans une section.

Dans ces conditions :

$$F'\left(\frac{z}{y}\right) = 1$$

Les coefficients sans dimensions α et K prennent les valeurs suivantes :

$$\alpha = \int_0^1 F'^2(\lambda) d\lambda = 1$$

$$K = \int_0^1 d\lambda \int_\lambda^1 \beta F'^2(\beta) d\beta = \frac{1}{3}$$

Les équations (7) s'écrivent alors :

II. — AUTRE FORME DES ÉQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT PERMANENT

Nous obtiendrons une nouvelle forme des équations de l'écoulement permanent en appliquant le théorème de BERNOULLI généralisé à la portion du fluide comprise entre les sections (s) et (s') normales au radier, distantes de dx .

FIG. 2 bis

Dans l'hypothèse d'une répartition uniforme des vitesses normales dans la section, on obtient :

$$\int \int_{(s)} \left(\frac{p}{\omega} + Z + \frac{u^2 + w^2}{2g} \right) u \, d\sigma - \int \int_{(s')} \left(\frac{p}{\omega} + Z + \frac{u^2 + w^2}{2g} \right) u \, d\sigma = -\frac{\tau_0}{\omega} u l \, dx$$

Z représentant la cote d'un point quelconque de la section (s) ou (s') par rapport au plan horizontal de référence passant par A.

Pour un point de la section (s'), on a :

$$Z = z \cos i - dx \sin i = z - i \, dx$$

et pour un point de la section (s) :

$$Z = z \cos i = z$$

Supposons u constant dans une section, nous divisons les deux membres de la relation par $l u y$ et nous posons :

$$H(x) = \frac{1}{y} \int_0^y \left(\frac{p}{\omega} + z + \frac{u^2 + w^2}{2g} \right) dz$$

l'équation précédente s'écrit :

$$H(x + dx) - H(x) = \left(i - \frac{\tau_0}{\omega y} \right) dx$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dH}{dx} = i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3}$$

Dans l'hypothèse d'une répartition uniforme des vitesses normales, la composante transversale de la vitesse :

$$w = u \frac{z}{y} \frac{dy}{dx}$$

$$u = U = \frac{Q}{ly}$$

En se reportant à l'équation (5), il vient de même :

$$\frac{p}{\omega} = y - z + \frac{y^2 - z^2}{2} \left[\frac{Q^2}{gl^2 y^3} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{gl^2 y^4} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]$$

On obtient ainsi, par une intégration immédiate :

$$H(x) = \frac{1}{y} \int_0^y \left(\frac{p}{\omega} + z + \frac{u^2 + w^2}{2g} \right) dz = y + \frac{Q^2}{2gl^2 y^2} + \frac{Q^2}{3gl^2 y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{6gl^2 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

Les équations de l'écoulement permanent se mettent alors sous la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} H(x) &= y + \frac{Q^2}{2gl^2 y^2} + \frac{Q^2}{3gl^2 y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{6gl^2 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \\ \frac{dH}{dx} &= i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Les deux systèmes (8) et (9) sont manifestement équivalents car ils conduisent, pour la détermination de la ligne d'eau $y = y(x)$, à la même équation différentielle du troisième ordre.

Cette circonstance nous conduit à une remarque intéressante concernant les fonctions $H(x)$ et $M(x)$. La dérivation de ces deux fonctions fait apparaître la relation :

$$\frac{dM}{dx} = y \frac{dH}{dx}$$

soit :

$$\boxed{\frac{dM}{dH} = y}$$

identique à celle qui relie les deux fonctions M et H qui interviennent dans la théorie des écoulements graduellement variés. La fonction M et la charge spécifique H dans une section ne dé-

pendent alors que de la hauteur d'eau dans la section envisagée et se réduisent à :

$$H_1(y) = y + \frac{Q^2}{2 g l^2 y^2}$$

$$M_1(y) = \frac{y^2}{2} + \frac{Q^2}{g l^2 y}$$

En seconde approximation, H et M dépendent

non seulement de la hauteur d'eau, mais également de la pente et de la courbure de la ligne de remous dans la section envisagée.

Nous allons déduire de ces équations une étude des différentes formes de ligne de remous, ce qui nous permettra de mettre en évidence les cas où les hypothèses de base de la théorie des écoulements « graduellement variés » ne sont pas applicables.

III. — ÉTUDE DES LIGNES DE REMOUS

La détermination de ces lignes se ramène à l'étude des systèmes différentiels (8) ou (9).

Nous utiliserons le système (9) qui fait intervenir la charge spécifique H(x), car son intégration conduit à une interprétation géométrique intéressante.

L'intégrale générale du système :

$$\left\{ \begin{aligned} H &= y + \frac{Q^2}{2 g l^2 y^2} + \frac{Q^2}{3 g l^2 y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{6 g l^2 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \\ \frac{dH}{dx} &= i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \end{aligned} \right. \quad (9)$$

dépend de trois constantes arbitraires dont l'une est un paramètre de translation parallèle à l'axe Ox, puisque x n'intervient pas explicitement dans les équations.

On peut donc la mettre sous la forme :

$$H = H(x - c_1, c_2, c_3)$$

$$y = y[x - c_1, c_2, c_3]$$

Une intégrale quelconque non singulière de (9) peut donc être représentée dans le plan HOy par une courbe (C) définie paramétriquement en fonction de $t = x - c_1$ et dépendant de deux paramètres. Ces courbes (C) sont les courbes intégrales d'une équation différentielle du second ordre :

$$F\left(H, y, \frac{dH}{dy}, \frac{d^2 H}{dy^2}\right) = 0$$

que nous formerons plus loin.

Nous commencerons par étudier les intégrales infiniment voisines d'une intégrale connue de (9) qui correspond au régime uniforme dans le canal.

La hauteur normale $y = y_0$, correspondant au

régime uniforme dans le canal, est la solution de l'équation :

$$i - \frac{Q^2}{c^2(y) l^2 y^3} = 0$$

qui satisfait à la relation classique de CHÉZY :

$$Q = C(y_0) l \sqrt{y_0 i}$$

(la hauteur d'eau y_0 représentant le rayon hydraulique pour un canal de grande largeur D).

Le point P du plan HOy de coordonnées :

$$\left\{ \begin{aligned} y &= y_0 \\ H &= y_0 + \frac{Q^2}{2 g l^2 y_0^2} \end{aligned} \right.$$

correspond manifestement à une solution du système (9) indépendante de x.

FIG. 3

Le point P est situé sur la courbe (H) d'équation :

$$H = y + \frac{Q^2}{2 g l^2 y^2}$$

courbe classique dont le sommet C correspond à la hauteur critique :

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g l^2}}$$

La position du point P par rapport à C sur la courbe (H) définit la nature du régime dans le canal, fluvial si $y_0 > y_c$, torrentiel si $y_0 < y_c$.

La recherche des intégrales du système (9) asymptotiques à cette solution, c'est-à-dire telles que le point figuratif de la courbe (C) correspondante tende vers le point P lorsque x augmente indéfiniment soit par valeurs positives, soit par valeurs négatives, se rattache à un problème classique sur la « stabilité conditionnelle » résolu par POINCARÉ et LIAPOUNOFF.

Considérons en effet le système auxiliaire :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z \\ \frac{dH}{dx} = i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} = \psi(y) \\ \frac{Q^2}{3 gl^2} \frac{dz}{dx} = y \left[H + \frac{Q^2}{6 gl^2 y^2} z^2 - y - \frac{Q^2}{2 gl^2 y^2} \right] \\ = \varphi(y, z, H) \end{cases} \quad (10 a)$$

équivalent au système (9) et écrivons les « équations aux variations » de ce système correspondant à l'intégrale particulière :

$$z = 0 \quad y = y_0 \quad H = y_0 + \frac{Q^2}{2 gl y_0^2} = H_0$$

Ces équations s'écrivent en posant :

$$H = H_0 + \xi \quad y = y_0 + \eta \quad z = \zeta$$

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dx} = \zeta \\ \frac{d\xi}{dx} = \psi(y_0) \eta \\ \frac{Q^2}{3 gl^2} \frac{d\zeta}{dx} = \left(-y_0 + \frac{Q^2}{gl^2 y_0^2} \right) \eta + y_0 \xi \end{cases} \quad (11 a)$$

système linéaire et homogène dont l'intégration se ramène à celle de l'équation linéaire du troisième ordre :

$$\frac{Q^2}{3 gl^2} \frac{d^3 \eta}{dx^3} + \left(y_0 - \frac{Q^2}{gl^2 y_0^2} \right) \frac{d\eta}{dx} = y_0 \psi(y_0) \eta \quad (12 a)$$

L'existence de solutions de (9) asymptotiques à $y = y_0$ est liée au signe des parties réelles de l'équation caractéristique de (12 a) qui s'écrit :

$$\frac{Q^2}{3 gl^2} m^3 + \left(y_0 - \frac{Q^2}{gl^2 y_0^2} \right) m = y_0 \psi(y_0) \quad (13 a)$$

On est conduit, pour la discussion du signe et de la réalité des racines de (13 a) à envisa-

ger deux cas suivant le signe de la quantité $y_0 - \frac{Q^2}{gl^2 y_0^2}$.

$$\text{Premier cas : } y_0 - \frac{Q^2}{gl^2 y_0^2} > 0$$

c'est-à-dire $y_0 > y_c$, cas du régime fluvial dans le canal.

Les racines de (13 a) sont les abscisses des points d'intersection de la cubique :

$$u = \frac{Q^2}{3 gl^2} m^3 + \left(y_0 - \frac{Q^2}{gl^2 y_0^2} \right) m$$

avec la droite d'ordonnée $u = y_0 \psi(y_0)$, $\psi(y)$ étant une fonction croissante de y : $\psi'(y_0) > 0$.

FIG. 4

L'examen de la figure 4 montre que (13) admet une seule racine réelle positive m_1 et deux racines imaginaires conjuguées :

$$m_1 = \alpha + \beta i \quad m_2 = \alpha - \beta i$$

De la relation $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ on tire d'ailleurs $\alpha = -\frac{m_1}{2} < 0$ qui montre que la partie réelle des racines imaginaires est négative.

Dans ces conditions, il existe une double infinité de solutions du système (9) asymptotiques à l'intégrale particulière $y = y_0$, $H = H_0$, lorsque x augmente indéfiniment par valeurs positives.

Les courbes (C) correspondantes du plan HOy dépendent d'une seule constante arbitraire et s'enroulent en spirale autour du point P.

En effet, η pour x très grand et positif est donné par l'expression :

$$\eta = c_2 e^{\alpha x} \sin \beta (x - c_1) \quad \text{où} \quad \alpha = -\frac{m_1}{2} < 0$$

en posant :

$$t = x - c_1$$

Il vient, pour t très grand :

$$\begin{cases} y = y_0 + c e^{-m_1 t/2} \sin \beta t \\ H = H_0 + \xi = H_0 + \frac{Q^2}{3 g l^2 y_0} \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \left(1 - \frac{Q^2}{g l^2 y_0^3}\right) \eta \end{cases}$$

qui montrent que le point $P(y_0, H_0)$ est un point asymptote. Il est d'ailleurs facile de montrer que lorsque x augmente indéfiniment, le point figuratif tourne autour de P dans le sens positif.

FIG. 5

Il existe également une simple infinité de solutions du système (9) asymptotiques à la solution $y = y_0$, $H = H_0$, lorsque x augmente indéfiniment par valeurs négatives. A ces solutions correspond dans le plan HOy une courbe (C) unique passant par le point P que nous désignerons par (C_0) .

La forme de cette courbe sera précisée ultérieurement; nous nous bornerons pour le moment à étudier son allure au voisinage du point P .

Pour x augmentant indéfiniment par valeurs négatives, on a :

$$y = y_0 + c_1 e^{m_1 x}$$

$$H = H_0 + \xi$$

ou en tenant compte de (11) :

$$\frac{dH}{dx} = \psi(y_0) \eta = \psi(y_0) c_1 e^{m_1 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = m_1 c_1 e^{m_1 x}$$

on en déduit la pente de la tangente à C_0 au point d'arrêt P :

$$\frac{dH}{dy} = \frac{\psi(y_0)}{m_1}$$

m_1 étant la racine réelle positive de l'équation (13), tenant compte de cette équation on peut écrire :

$$\frac{dH}{dy} = \frac{\psi(y_0)}{m_1} = 1 - \frac{Q^2}{g l^2 y_0^3} + \frac{Q^2}{3 g l^2 y_0} m_1^2$$

La pente de la tangente en P à la courbe (H) ayant précisément pour valeur $1 - \frac{Q^2}{g l^2 y_0^3}$ on voit qu'elle est inférieure à la pente de la tangente à (C_0) .

Il est intéressant de connaître la position de la courbe (C_0) par rapport à sa tangente au point P . Nous utiliserons à cet effet les dévelop-

FIG. 6

pements en série utilisé par POINCARÉ et LIAPOUNOFF pour mettre en évidence le caractère asymptotique de certaines solutions, dans l'hypothèse où l'équation caractéristique admet des racines dont les parties réelles ne sont pas toutes de même signe.

Le système (10 a) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d\eta}{dx} = \zeta$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \psi(y_0) \eta + \frac{1}{2} \psi''(y_0) \eta^2 + \dots$$

$$\frac{Q^2}{3 g l^2} \frac{d\zeta}{dx} = \left(\frac{Q^2}{g l^2 y_0^2} - y_0 \right) \eta' + y_0 \xi +$$

$$\frac{1}{2} \left[\left(-2 - \frac{Q^2}{g l^2 y_0^3} \right) \eta^2 + 2 \eta \xi + \frac{Q^2}{3 g l^2 y_0} \zeta^2 \right] + \dots$$

en posant comme précédemment :

$$H = H_0 + \xi \quad y = y_0 + \eta \quad z = \zeta$$

et en développant en série les fonctions $\psi(y)$ et $\varphi(H, y, z)$ au voisinage du point $H_0, y_0, 0$.

Posons :

$$u_1 = c_1 e^{m_1 x}$$

m_1 étant la racine positive de l'équation caractéristique (13 a) et proposons-nous de trouver des séries entières à coefficients constants, ordonnées suivant les puissances de u_1 :

$$\xi = \sum \alpha_n u_1^n$$

$$\eta = \sum \beta_n u_1^n$$

$$\zeta = \sum \gamma_n u_1^n$$

et satisfaisant formellement aux équations (10 a), ces séries commençant par des termes du premier degré en u_1 , puisque pour $u_1 = 0$, c'est-à-dire $x = -\infty$, on doit avoir :

$$\xi = \eta = \zeta = 0$$

En substituant les développements précédents dans les équations (10 a) et en écrivant qu'on obtient une identité, on est conduit, en tenant compte de la relation :

$$\frac{d}{dx} (u_1^n) = m_1 n u_1^{n-1}$$

à un système linéaire pour la détermination des coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, les seconds membres se déduisant par des additions et des multiplications des coefficients des séries (10 a) et des coefficients déjà déterminés des séries (14 a).

Les premiers termes α_1, β_1 et γ_1 sont solutions du système homogène :

$$m_1 \beta_1 = \gamma_1$$

$$m_1 \alpha_1 = \psi'(y_0) \beta_1$$

$$\frac{Q^2}{3 gl^2} m_1 \gamma_1 = \left(\frac{Q^2}{gl^2 y_0^2} - y_0 \right) \beta_1 + y_0 \alpha_1$$

dont le déterminant est nul puisque m_1 est racine de l'équation caractéristique (13 a). Ce système admet donc une simple infinité de solutions :

$$\beta_1 = \lambda$$

$$\alpha_1 = \frac{\psi'(y_0)}{m_1} \lambda$$

$$\gamma_1 = m_1 \lambda$$

où λ est une constante arbitraire. On voit aussitôt que la constante λ , intervenant à la puissance n dans les termes $\alpha_n \beta_n \gamma_n$:

$$\alpha_n = K_n \lambda^n$$

peut être incorporée au coefficient c_1 qui intervient dans la relation :

$$u_1 = c_1 e^{m_1 x}$$

En effet :

$$\alpha_n u_1^n = K_n (\lambda c_1)^n e^{n m_1 x}$$

λ ne constitue donc pas une nouvelle constante arbitraire et on peut prendre $\lambda = 1$.

Il existe donc un développement en série unique (14 a) correspondant aux solutions du système (9) asymptotiques à la solution particulière $y = y_0$:

$$H = H_0 = y_0 + \frac{Q^2}{2 gl^2 y_0^2} \quad z = \frac{dy}{dx} = 0$$

Ces solutions dépendent d'une seule constante arbitraire c_1 qui est évidemment un paramètre de translation puisqu'on peut écrire :

$$c_1 e^{m_1 x} = e^{m_1(x-x_0)}$$

La courbe (C_0) , qui représente toutes ces solutions dans le plan HOy , est définie, au voisinage du point P, par le développement :

$$H - H_0 = \xi = \sum \alpha_n u_1^n = \frac{\psi'(y_0)}{m_1} u_1 + \alpha_2 u_1^2 + \dots$$

$$y - y_0 = \eta = \sum \beta_n u_1^n = u_1 + \beta_2 u_1^2 + \dots$$

absolument convergent si la valeur absolue de c_1 est inférieure à une limite convenable.

La position de la courbe (C_0) par rapport à sa tangente en P dépend donc du signe de la quantité :

$$\alpha_2 - \beta_2 \frac{\psi'(y_0)}{m_1}$$

Nous avons déterminé α_2 et β_2 à l'aide des considérations précédentes. Nous avons admis dans le calcul que le coefficient $c(y)$ était peu variable et gardait la valeur $c(y_0)$ correspondant au régime uniforme, ce qui conduit à la relation :

$$\psi''(y_0) = - \frac{4}{y_0} \psi'(y_0)$$

Dans ces conditions on obtient, après des calculs assez longs et en tenant compte du fait que m_1 est racine de (13 a) :

$$\alpha_2 - \beta_2 \frac{\psi'(y_0)}{m_1} = \frac{Q^2 \psi'(y_0)}{2 g l^2 y_0^3} \times \frac{3 - 5 y_0^2 m_1^2}{(2 m_1)^3 \frac{Q^2}{3 g l^2} - (2 m_1) \left[\frac{Q^2}{g l^2 y_0^2} - y_0 \right] - y_0 \psi'(y_0)}$$

le dénominateur est évidemment positif, car en posant :

$$F(m) = \frac{Q^2}{3 g l^2} m^3 - \left(\frac{Q^2}{g l^2 y_0^2} - y_0 \right) m - y_0 \psi'(y_0)$$

on voit que :

$$F(m_1) = 0 \quad F(2 m_1) > 0$$

Le signe de $\alpha_2 - \beta_2 \frac{\psi'(y_0)}{m_1}$ est donc celui de la quantité $3 - 5 y_0^2 m_1^2$; or, l'équation caractéristique peut s'écrire en faisant intervenir la pente du canal i reliée à la hauteur normale par la formule :

$$i = \frac{Q^2}{c^2(y_0) l^2 y_0^3} = 0$$

et en prenant $\psi'(y_0) = \frac{3 Q^2}{c^2(y_0) l^2 y_0^4}$ (on néglige la variation de $c(y)$:

$$\frac{c^2(y_0) i}{3 g} y_0^3 m^3 + \left[1 - \frac{c^2(y_0) i}{g} \right] y_0 m = 3 i$$

La condition $3 - 5 y_0^2 m_1^2 > 0$ se traduit alors par l'inégalité :

$$i < \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{3 + \frac{4}{5} \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{c^2(y_0)}{g}}$$

condition qui est pratiquement toujours remplie dans l'hypothèse que nous avons faite d'une pente suffisamment faible pour qu'on puisse poser :

$$\cos i = 1 \quad \sin i = i$$

REMARQUE. — La même méthode pourrait être utilisée pour la détermination des solutions asymptotiques au régime uniforme pour $x = +\infty$ en utilisant des développements en séries doubles suivant les puissances croissantes de :

$$u_2 = c_2 e^{m_2 x} \quad u_3 = c_3 e^{m_3 x}$$

m_2 et m_3 étant les racines réelles ou complexes, à partie réelle négative de l'équation (13 a).

On mettrait ainsi en évidence une double infinité de solution du système (9) asymptotiques à la solution $y = y_0$, $H = H_0$ auxquelles correspondrait dans le plan HOy une simple infinité de courbes (C).

Deuxième cas : $y_0 - \frac{Q^2}{g l^2 y_0^2} < 0$

c'est-à-dire $y_1 < y_0$, cas du régime torrentiel dans le canal.

La cubique d'équation :

$$u = \frac{Q^2}{3 g l^2} m^3 + \left(y_0 - \frac{Q^2}{g l^2 y_0^2} \right) m$$

est représentée sur la figure 7.

FIG. 7

Si la hauteur normale y_0 n'est pas trop petite, c'est-à-dire si la pente du canal n'est pas trop forte, l'équation (13) admet encore une seule racine réelle positive m_1 et deux racines imaginaires dont la partie réelle est négative, m_1 et m_2 .

FIG. 8

Les résultats sont identiques à ceux du premier cas, l'allure des courbes (C) admettant le point P pour point asymptote et celle de la courbe (C₀) passant par P est précisée par la figure 8.

Mais si y_0 est suffisamment petit, c'est-à-dire si la pente du canal est très forte, l'équation (13) admet trois racines réelles dont une positive m_1 et deux négatives m_2 et m_3 .

Le résultat reste inchangé en ce qui concerne la courbe (C₀), mais les courbes (C) du plan HOy correspondant à la double infinité de solution du système (9) asymptotiques à l'intégrale particulière $y = y_0$, $H = H_0$, lorsque x augmente indéfiniment par valeurs positives, n'admettent plus le point P comme point asymptote. Elles passent toutes par le point P et elles sont tangentes en ce point. Déterminons la pente de cette tangente.

Pour x positif et très grand, (C) est défini par les équations paramétriques :

$$y = y_0 + c_2 e^{m_2 x} + c_3 e^{m_3 x}$$

$$H = H_0 + \psi(y_0) \left[\frac{c_2}{m_2} e^{m_2 x} + \frac{c_3}{m_3} e^{m_3 x} \right]$$

$$\frac{dH}{dy} = \psi(y_0) \frac{c_2 e^{m_2 x} + c_3 e^{m_3 x}}{m_2 c_2 e^{m_2 x} + c_3 m_3 e^{m_3 x}}$$

m_2 et m_3 étant négatifs, désignons par m_3 la racine la plus grande en valeur absolue, on a :

$$\frac{dH}{dy} = \psi(y_0) \frac{c_2 + c_3 e^{(m_3 - m_2)x}}{m_2 c_2 + m_3 c_3 e^{(m_3 - m_2)x}}$$

La pente de la tangente à (C) en P s'obtient en faisant $x = +\infty$; comme $m_3 - m_2 < 0$, il vient :

$$\frac{dH}{dy} = \frac{\psi(y_0)}{m_2}$$

m_2 étant la racine négative de (13) dont la valeur absolue est la plus faible. Sa position par rapport à la tangente à (H) au point P est précisée sur la figure 9.

FIG. 9

TRACÉ DES COURBES (C)

Le tracé des courbes (C) et l'étude de leurs points à l'infini se déduisent aisément de la forme de l'équation différentielle du second ordre (E) dont elles sont les courbes intégrales.

Cette équation s'obtient à partir du système (9) :

$$\begin{cases} \frac{Q^2}{gl^2} \left[\frac{1}{3y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{6y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = H - y - \frac{Q^2}{2gl^2 y^2} \\ \frac{dH}{dx} = i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \end{cases}$$

Multiplions les deux membres de la première équation par dy/dx , cette équation s'écrit :

$$\frac{Q^2}{6gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = H - y - \frac{Q^2}{2gl^2 y^2}$$

ou, en tenant compte de la deuxième équation :

$$\frac{Q^2}{6gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y} \left(i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \right)^2 \left(\frac{dy}{dH} \right)^2 \right] = H - y - \frac{Q^2}{2gl^2 y^2}$$

En intégrant, on aboutit à l'équation intégrale-différentielle :

$$\frac{Q^2}{6gl^2 y} \left(i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \right)^2 \left(\frac{dy}{dH} \right)^2 = \int_{y_1}^y \left(H - y - \frac{Q^2}{2gl^2 y^2} \right) dy + \frac{Q^2}{6gl^2 y_1} \left(i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y_1^3} \right)^2 \left(\frac{dy}{dH} \right)_{y=y_1}^2 \quad (E)$$

où l'intégrale simple possède une interprétation géométrique évidente.

C'est l'aire comprise entre les courbes (C) et (H) et les droites d'abscisses y_1 et y .

Il est facile d'en conclure que, quand y augmente indéfiniment, les courbes (C) sont asymptotes à la courbe (H).

En effet, lorsque y tend vers $+\infty$, dy/dH est

FIG. 10

positif et limité supérieurement, sinon le deuxième membre de l'équation (E) serait négatif pour y suffisamment grand, ce qui est impossible, le premier membre étant positif.

Dans ces conditions, le premier membre de (E) tend vers 0 et l'intégrale :

$$\int_y^y \left(H - y - \frac{Q^2}{2gl^2 y^2} \right) dy$$

tend vers une limite finie négative lorsque y tend vers $+\infty$.

La quantité sous le signe somme tend donc vers 0, ce qui montre que (C) est asymptote à (H).

La courbe (C) $y = y(x)$ $H = H(x)$ étant définie paramétriquement en fonction de x , l'équation :

$$\frac{dH}{dx} = i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \quad i > 0$$

montre que le point à l'infini de (C) s'obtient lorsque x augmente indéfiniment par valeurs positives, exception faite des courbes (C) particulières qui admettent le point P pour point asymptote.

Le point à l'infini dans la direction Oy est d'ailleurs un point singulier du système différentiel (9). L'étude des intégrales au voisinage de ce point va nous permettre de préciser l'allure des courbes (C).

Le système (9) se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{6gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{z^2}{y} \right] &= H - y - \frac{\lambda}{2gl^2 y^2} \\ z \frac{dH}{dy} &= i - \frac{\lambda}{c^2 l^2 y^3} \end{aligned} \quad (10)$$

où on a posé :

$$\lambda = Q^2 \quad z = \frac{dy}{dx}$$

système qui définit les deux fonctions :

$$z = \frac{dy}{dx} = z(y, \lambda) \quad H = H(y, \lambda)$$

de la variable y , ces deux fonctions dépendant en outre de deux constantes arbitraires.

Pour $\lambda = 0$, la solution du système (10) est unique et se réduit à :

$$\begin{cases} H = y \\ z = i \end{cases}$$

L'étude des solutions du système (10) au voisinage de $\lambda = 0$ ne peut se faire par la méthode classique des équations aux variations, car $dz/dy = f(H, z, y, \lambda)$ n'est pas une fonction continue de λ pour $\lambda = 0$.

Il existe une solution et une seule du système (10) représentée par deux fonctions holomorphes de λ au voisinage de $\lambda = 0$. Ces fonctions $z = z_1(y, \lambda)$, $H = H_1(y, \lambda)$ sont, pour λ suffisamment petit, développables en série entière de λ de la forme :

$$z_1(y, \lambda) = i + \lambda \xi_1(y) + \dots + \lambda^n \xi_n(y) + \dots$$

$$H_1(y, \lambda) = y + \lambda \eta_1(y) + \dots + \lambda^n \eta_n(y) + \dots$$

En écrivant que ces développements satisfont formellement aux équations (10), on est conduit aux relations de récurrence :

$$\begin{cases} \eta_n(y) = \frac{1}{6gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y} \sum_{p=0}^{n-1} \xi_p(y) \xi_{n-p-1}(y) \right] \\ \xi_n(y) = - \sum_{p=0}^{n-1} \xi_p(y) \frac{d}{dy} \eta_{n-p}(y) \end{cases} \quad (11)$$

valables pour $n > 1$ et où $\xi_0 = i$ $\eta_0(y) = y$;

quant aux valeurs de ξ_1 et η_1 , elles sont données par :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2gl^2 y^2} \left(1 - \frac{i^2}{3} \right) = \frac{b_1}{gl^2 y^2} \\ \xi_1 &= \frac{1}{gl^2 y^3} \left[i - \frac{i^3}{3} - \frac{g}{c^2} \right] \end{aligned}$$

Si on suppose que le coefficient de CHÉZY c est indépendant de y , les développements peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} z_1(y, Q^2) = i + a_1 \frac{Q^2}{gl^2 y^3} + \dots + a_n \left(\frac{Q^2}{gl^2 y^3} \right)^n + \dots \\ H_1(y, Q^2) = y \left[1 + b_1 \frac{Q^2}{gl^2 y^3} + \dots + b_n \left(\frac{Q^2}{gl^2 y^3} \right)^n + \dots \right] \end{cases} \quad (12)$$

où a_n et b_n sont des coefficients sans dimensions indépendants de y avec :

$$a_0 = i \quad b_0 = 1$$

$$a_1 = i - \frac{i^3}{3} - \frac{g}{c^2} \quad b_1 = \frac{1}{2} - \frac{i^2}{6}$$

a_n et b_n étant donnés pour $n > 1$ par les relations récurrentes :

$$b_n = -\frac{3n-2}{6} \sum_{p=0}^{n-1} a_p a_{n-p-1}$$

$$a_n = \sum_{p=0}^{n-1} (3n-3p-1) a_p b_{n-p}$$

Ces formules ne sont plus valables si le coefficient de CHÉZY c est fonction de y . Les développements précédents peuvent encore se mettre sous la forme (12), mais a_n et b_n dépendent alors de y . De toute façon, leur convergence est assurée si $\frac{Q^2}{gl^2 y^3}$ est inférieur à une limite convenable.

Toutes les autres solutions du système (10) sont, nous l'avons vu, asymptotiques à cette solution particulière lorsque y augmente indéfiniment par valeurs positives.

Pour l'étude de ces solutions infiniment voisines, on est conduit au changement de fonctions :

$$H(y) = H_1(y) + \eta(y)$$

$$z(y) = z_1(y) + \xi(y)$$

ξ et η sont solutions du système :

$$\begin{cases} (z_1 + \xi) \frac{d\eta}{dy} + \frac{dH_1}{dy} \xi = 0 \\ \frac{Q^2}{6gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{\xi}{y} (\xi + 2z_1) \right] = \eta \end{cases} \quad (13)$$

qui admet la solution particulière $\xi = 0$, $\eta = 0$.

Nous nous proposons de développer les intégrales de (13) suivant les puissances des valeurs initiales ξ_0 et η_0 , qui correspondent à $y = y_0$.

Posons :

$$\xi = \sum a_{mn}(y) \xi_0^m \eta_0^n \quad \eta = \sum \beta_{mn}(y) \xi_0^m \eta_0^n$$

En écrivant que ces développements satisfont identiquement à (13), on voit que les coefficients $[a_{10}(y), \beta_{10}(y)]$ et $[a_{01}(y), \beta_{01}(y)]$ forment deux systèmes de solutions des équations aux variations, déterminés respectivement par les conditions initiales $a_{10}(y_0) = 1$, $\beta_{10}(y_0) = 0$ et $a_{01}(y_0) = 0$, $\beta_{01}(y_0) = 1$, les coefficients $a_{mn}(y)$, $\beta_{mn}(y)$ étant déterminés de proche en proche, pour $m+n > 1$, par des systèmes d'équations linéaires avec les conditions initiales $a_{mn}(y_0) = 0$, $\beta_{mn}(y_0) = 0$. Les séries ainsi obtenues seront certainement convergentes pour $y > y_0$ pourvu que les valeurs absolues de η_0 et ξ_0 soient inférieures à un nombre positif assez petit.

Les équations aux variations du système (13),

relatives à la solution particulière $\xi = 0$, $\eta = 0$, s'écrivent :

$$\begin{cases} z_1 \frac{d\eta}{dy} + \frac{dH_1}{dy} \xi = 0 \\ \frac{Q^2}{3gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{z_1}{y} \xi \right] = \eta \end{cases} \quad (14)$$

système linéaire et homogène conformément à la théorie.

On en déduit que β_{10} et β_{01} sont deux solutions particulières de l'équation linéaire et homogène du second ordre.

$$\frac{Q^2}{3gl^2} \frac{d}{dy} \left[K(y) \frac{d\eta}{dy} \right] + \eta = 0 \quad (15)$$

où :

$$K(y) = \frac{z_1^2(y)}{y \frac{dH_1}{dy}}$$

satisfaisant aux conditions initiales :

$$\beta_{01}(y_0) = 1, \quad \frac{d\beta_{01}}{dy}(y_0) = 0 :$$

$$\beta_{10}(y_0) = 0, \quad \frac{d\beta_{10}}{dy}(y_0) = -\frac{1}{z_1(y_0)} \frac{dH_1}{dy}(y_0)$$

Si la valeur initiale $y_0^{(*)}$ est suffisamment grande, $K(y)$ est, pour $y > y_0$, une fonction continue de y , positive, qui tend vers 0 pour y infini (cf. éq. 12); il est donc possible de choisir un nombre positif A tel que $K(y) < A$, quel que soit $y > y_0$.

Dans ces conditions, d'après le théorème de STURM, une intégrale de (15) a au moins une racine comprise entre deux racines consécutives d'une solution de l'équation :

$$\frac{Q^2}{3gl^2} A \frac{d^2\eta}{dy^2} + \eta = 0$$

dont les intégrales admettent une infinité de racines supérieures à y_0 .

Il en est donc de même des intégrales de (15) qui sont de plus asymptotiques à la solution $\eta = 0$, la forme même de l'équation (15) montrant que l'intégrale :

$$\int_{y_0}^{\infty} \eta(y) dy$$

a un sens.

On en déduit que toutes les courbes intégrales (C) d'équation $H = H(y)$, solutions du sys-

(*) Ne pas confondre y_0 avec la hauteur normale.

tème (10), coupent une infinité de fois la courbe intégrale particulière (C_1) d'équation :

$$H = H_1(y) = y \left[1 + b_1 \frac{Q^2}{gl^2 y^3} + \dots \right]$$

à laquelle elles sont asymptotes.

FIG. 11

POINTS DE COURBES (C) OU LA TANGENTE EST PARALLÈLE AUX AXES DE COORDONNÉES

Les courbes (C) étant définies paramétriquement en fonction de x , les points de ces courbes, où la tangente est parallèle à Ox , correspondent à $dH/dx = 0$; la deuxième équation du système (9) montre que les points se trouvent tous sur la droite d'équation $y = y_0$, à l'exception du point P où cette droite rencontre la courbe (H), (y_0 : hauteur normale).

Quant aux points de (C), où la tangente est parallèle à OH , l'examen de la première équation de (9), mise sous la forme :

$$\frac{Q^2}{6 gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = H - y - \frac{Q^2}{gl^2 y^3}$$

conduit à la propriété suivante :

L'aire comprise entre la courbe (H), une courbe (C) et deux tangentes à (C) parallèles à OH est nulle; l'équation :

$$\frac{Q^2}{gl^2} \left[\frac{1}{3y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{6y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = H - y - \frac{Q^2}{2 gl^2 y^2}$$

montre également qu'en un point où la tangente est parallèle à OH , le sens de la concavité dé-

Cette analyse permet de montrer que toutes les courbes de remous, à l'exception de celles qui tendent vers le régime uniforme lorsque x tend vers $+\infty$, admettent une asymptote horizontale lorsque x augmente indéfiniment par valeurs positives.

En effet, pour y suffisamment grand, $z = \frac{dy}{dx}$ peut être défini par le développement :

$$\frac{dy}{dx} = i + a_1 \frac{Q^2}{gl^2 y^3} + \dots + a_n \left(\frac{Q^2}{gl^2 y^3} \right)^n + \dots + \Sigma \alpha_{mn}(y) \xi_0^m \eta_0^n \quad (16)$$

série uniformément convergente de y pour y assez grand,

Les intégrales $\int_{y_0}^{\infty} \alpha_{mn}(y) dy$ ayant un sens, les courbes $y = y(x)$, intégrales de l'équation à variables séparées (16), admettent une asymptote horizontale d'équation $y = ix + c$ lorsque x augmente indéfiniment par valeurs positives.

pend de la position du point par rapport à la courbe H (voir figure 12).

FIG. 12

Les courbes (C) peuvent posséder des points de rebroussement; en un tel point, on a à la fois :

$$\left(\frac{dy}{dx} \right) = 0 \quad \frac{dH}{dx} = 0$$

Ces points se trouvent donc sur la droite

$y = y_0$ (y_0 étant la hauteur normale). La pente de la tangente au point de rebroussement est :

$$m = \frac{\frac{d^2H}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

comme $\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{d}{dy} \left[\frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \right] \frac{dy}{dx} = 0$

cette pente est nulle, sauf si en ce point on a également $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, mais on a alors

$$H = y + \frac{Q^2}{2gl^2 y^2}$$

et le point coïncide avec le point P d'intersection de la courbe (H) et de la droite $y = y_0$.

L'étude des courbes (C) passant par ce point a déjà été faite.

FIG. 13

Les résultats précédents vont nous permettre de déduire du tracé des courbes (C) les lignes de remous correspondant aux diverses conditions aux limites.

(A suivre.)