Clapotis partiel

Partial clapotis

PAR C. CARRY

INGÉNIEUR AU LABORATOIRE DAUPHINOIS D'HYDRAULIQUE

Des équations générales au second ordre des mouvements résultant de la superposition de plusieurs trains de houles, établies par M. BIESEL. L'auteur tire les équations générales du clapotis partiel.

A ces équations sont joints des abaques permettant, à partir de mesures expérimentales, de connaître le coefficient de réflexion d'un ouvrage et les caractéristiques de la houle incidente.

From second order general equations, established by Mr. BIESEL, of movements resulting from the superposition of several wave trains, the author evolves general equations of the partial clapotis. Graphs are attached to these equations enabling, after the experimental measurements, knowledge of the reflection coefficient of a structure and the characteristics of the incidental wave.

Dans un article précédent, M. BIESEL * a établi les équations générales au second ordre des mouvements résultant de la superposition de plusieurs trains de houles.

Nous nous proposons d'appliquer ces formules au cas particulier du *Clapotis Partiel* qui résulte de la rencontre de deux houles régulières d'amplitudes différentes mais de même fréquence. Ce type de mouvement se produit en particulier devant les modèles des ouvrages partiellement réfléchissants attaqués de front par une houle régulière. Son étude est donc particulièrement intéressante pour l'interprétation des expériences destinées à déterminer le coefficient de réflexion de tels ouvrages. Il est entendu, bien que nous ne le répitions pas systématiquement, que tous les calculs qui suivent sont poussés au second ordre d'approximation seulement, les termes du troisième ordre étant considérés comme négligeables.

Nous rappelons tout d'abord les formules de M. BIESEL (dépliant ci-joint) où les notations utilisées sont les suivantes :

Ox, Ox_0 = axes de coordonnées horizontaux dirigés de gauche à droite, confondus avec le niveau de repos du liquide

Oy, Oy_0 = axes de coordonnées verticaux descendants.

x, y = coordonnées instantanées des particules en mouvement.

x_0, y_0 = coordonnées « initiales » ou au repos des particules.

$2 a_i$ = amplitude de la houle composante n° i .

L_i = longueur d'onde de la houle composante n° i .

* Voir la Houille blanche, n° 3, 1952.

Équations générales au second ordre de la houle irrégulière

General 2nd order equations of irregular waves

D'APRÈS F. BIÉSEL

INGÉNIEUR AU LABORATOIRE DAUPHINOIS D'HYDRAULIQUE

(*La Houille Blanche*, n° 3, 1952, p. 372.)

(Complément à l'article publié dans le présent numéro, p. 482.)

ÉQUATIONS GÉNÉRALES

COORDONNÉES DE LAGRANGE

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\text{ch } m_i (h-y_0)}{\text{sh } m_i h} \sin(k_i t - m_i x_0) - \sum_{i=1}^n a_i^2 \frac{m_i}{4 \text{ sh}^2 m_i h} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\text{ch } 2 m_i (h-y_0)}{\text{sh}^2 m_i h} \right] \sin(2 k_i t - 2 m_i x_0) + \sum_{i=1}^n a_i^2 \frac{m_i k_i \text{ch } 2 m_i (h-y_0)}{2 \text{ sh}^2 m_i h} x t \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_i a_j}{2 \text{ sh } m_i k_i \text{ sh } m_j h} \left\{ \frac{m_i k_i + m_j k_j}{k_i - k_j} \text{ch} \left[(m_i + m_j)(h-y_0) \right] \sin \left[(k_i - k_j)t - (m_i - m_j)x_0 \right] - \frac{m_i k_i + m_j k_j}{k_i + k_j} \text{ch} \left[(m_i - m_j)(h-y_0) \right] \sin \left[(k_i + k_j)t - (m_i + m_j)x_0 \right] + \frac{m_i + m_j}{k_i + k_j} A_{ij} \text{ch} \left[(m_i + m_j)(h-y_0) \right] \sin \left[(k_i + k_j)t - (m_i + m_j)x_0 \right] - \frac{m_i - m_j}{k_i - k_j} B_{ij} \text{ch} \left[(m_i - m_j)(h-y_0) \right] \sin \left[(k_i - k_j)t - (m_i - m_j)x_0 \right] \right\} \\
 y &= y_0 - \sum_{i=1}^n a_i \frac{\text{sh } m_i (h-y_0)}{\text{sh } m_i h} \cos(k_i t - m_i x_0) - \sum_{i=1}^n a_i^2 \frac{m_i}{4 \text{ sh}^2 m_i h} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\cos(2 k_i t - 2 m_i x_0)}{\text{sh}^2 m_i h} \right] \text{sh } 2 m_i (h-y_0) \\
 &- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_i a_j}{2 \text{ sh } m_i h \text{ sh } m_j h} \left\{ \frac{m_i k_i - m_j k_j}{k_i - k_j} \text{sh} \left[(m_i + m_j)(h-y_0) \right] \cos \left[(k_i - k_j)t - (m_i - m_j)x_0 \right] - \frac{m_i k_i - m_j k_j}{k_i + k_j} \text{sh} \left[(m_i - m_j)(h-y_0) \right] \cos \left[(k_i + k_j)t - (m_i + m_j)x_0 \right] + \frac{m_i + m_j}{k_i + k_j} A_{ij} \text{sh} \left[(m_i + m_j)(h-y_0) \right] \cos \left[(k_i + k_j)t - (m_i + m_j)x_0 \right] - \frac{m_i - m_j}{k_i - k_j} B_{ij} \text{sh} \left[(m_i - m_j)(h-y_0) \right] \cos \left[(k_i - k_j)t - (m_i - m_j)x_0 \right] \right\} \\
 \frac{p}{\rho} &= g y_0 + \sum_{i=1}^n g a_i \frac{\text{sh } m_i y_0}{\text{sh } m_i h \text{ ch } m_i h} \cos(k_i t - m_i x_0) + \sum_{i=1}^n g a_i^2 \frac{m_i \text{sh } m_i y_0}{4 \text{ sh}^2 m_i h} \left\{ 3 \cos(2 k_i t - 2 m_i x_0) \left[\frac{\text{ch } m_i y_0}{\text{sh}^2 m_i h} - \frac{2 \text{ch } m_i (h-y_0)}{\text{ch } m_i h} \right] + \frac{2 \text{ch } m_i (h-y_0)}{\text{ch } m_i h} \right\} \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_i a_j}{2 \text{ sh } m_i h \text{ sh } m_j h} \left\{ (k_i^2 - k_j^2) \text{ch} \left[(m_i + m_j)(h-y_0) \right] \cos \left[(k_i - k_j)t - (m_i - m_j)x_0 \right] - (k_i^2 + k_j^2) \text{ch} \left[(m_i - m_j)(h-y_0) \right] \cos \left[(k_i + k_j)t - (m_i + m_j)x_0 \right] + (k_i + k_j) A_{ij} \text{ch} \left[(m_i + m_j)(h-y_0) \right] \cos \left[(k_i + k_j)t - (m_i + m_j)x_0 \right] - (k_i - k_j) B_{ij} \text{ch} \left[(m_i - m_j)(h-y_0) \right] \cos \left[(k_i - k_j)t - (m_i - m_j)x_0 \right] \right\} \\
 -g &- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_i a_j}{2 \text{ sh } m_i h \text{ sh } m_j h} \left\{ \frac{m_i k_i - m_j k_j}{k_i - k_j} \text{sh} \left[(m_i + m_j)(h-y_0) \right] \cos \left[(k_i - k_j)t - (m_i - m_j)x_0 \right] - \frac{m_i k_i - m_j k_j}{k_i + k_j} \text{sh} \left[(m_i - m_j)(h-y_0) \right] \cos \left[(k_i + k_j)t - (m_i + m_j)x_0 \right] + \frac{m_i + m_j}{k_i + k_j} A_{ij} \text{sh} \left[(m_i + m_j)(h-y_0) \right] \cos \left[(k_i + k_j)t - (m_i + m_j)x_0 \right] - \frac{m_i - m_j}{k_i - k_j} B_{ij} \text{sh} \left[(m_i - m_j)(h-y_0) \right] \cos \left[(k_i - k_j)t - (m_i - m_j)x_0 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

COORDONNÉES D'EULER

$$\begin{aligned}
 \varphi &= - \sum_{i=1}^n \frac{a_i k_i}{m_i} \frac{\text{ch } m_i (h-y)}{\text{sh } m_i h} \sin(k_i t - m_i x) - \sum_{i=1}^n \frac{3}{8} a_i^2 k_i \frac{\text{ch } 2 m_i (h-y)}{\text{sh}^2 m_i h} \sin(2 k_i t - 2 m_i x) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_i a_j}{2 \text{ sh } m_i h \text{ sh } m_j h} \left\{ A_{ij} \text{ch} \left[(m_i + m_j)(h-y) \right] \sin \left[(k_i + k_j)t - (m_i + m_j)x \right] - B_{ij} \text{ch} \left[(m_i - m_j)(h-y) \right] \sin \left[(k_i - k_j)t - (m_i - m_j)x \right] \right\} \\
 u &= \sum_{i=1}^n a_i k_i \frac{\text{ch } m_i (h-y)}{\text{sh } m_i h} \cos(k_i t - m_i x) + \sum_{i=1}^n \frac{3}{4} a_i^2 \frac{m_i k_i \text{ch } 2 m_i (h-y)}{\text{sh}^2 m_i h} \cos(2 k_i t - 2 m_i x) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_i a_j}{2 \text{ sh } m_i h \text{ sh } m_j h} \left\{ (m_i + m_j) A_{ij} \text{ch} \left[(m_i + m_j)(h-y) \right] \cos \left[(k_i + k_j)t - (m_i + m_j)x \right] - (m_i - m_j) B_{ij} \text{ch} \left[(m_i - m_j)(h-y) \right] \cos \left[(k_i - k_j)t - (m_i - m_j)x \right] \right\} \\
 v &= \sum_{i=1}^n a_i k_i \frac{\text{sh } m_i (h-y)}{\text{sh } m_i h} \sin(k_i t - m_i x) + \sum_{i=1}^n \frac{3}{4} a_i^2 \frac{m_i k_i \text{sh } 2 m_i (h-y)}{\text{sh}^2 m_i h} \sin(2 k_i t - 2 m_i x) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_i a_j}{2 \text{ sh } m_i h \text{ sh } m_j h} \left\{ (m_i + m_j) A_{ij} \text{sh} \left[(m_i + m_j)(h-y) \right] \sin \left[(k_i + k_j)t - (m_i + m_j)x \right] - (m_i - m_j) B_{ij} \text{sh} \left[(m_i - m_j)(h-y) \right] \sin \left[(k_i - k_j)t - (m_i - m_j)x \right] \right\} \\
 \frac{p}{\rho} &= g y + \sum_{i=1}^n a_i \frac{k_i^2}{m_i} \frac{\text{ch } m_i (h-y)}{\text{sh } m_i h} \cos(k_i t - m_i x) + \sum_{i=1}^n \frac{3}{4} a_i^2 k_i^2 \left[\frac{\text{ch } 2 m_i (h-y)}{\text{sh}^2 m_i h} - \frac{1}{3} \right] \left[\frac{\cos(2 k_i t - 2 m_i x)}{\text{sh}^2 m_i h} - \frac{1}{3} \right] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_i^2 k_i^2}{4} \left(\frac{1}{\text{sh}^2 m_i h} - \frac{1}{3} \right) \\
 &- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_i a_j}{2 \text{ sh } m_i h \text{ sh } m_j h} \left\{ k_i k_j \text{ch} \left[(m_i + m_j)(h-y) \right] \cos \left[(k_i - k_j)t - (m_i - m_j)x \right] + k_i k_j \text{ch} \left[(m_i - m_j)(h-y) \right] \cos \left[(k_i + k_j)t - (m_i + m_j)x \right] - (k_i + k_j) A_{ij} \text{ch} \left[(m_i + m_j)(h-y) \right] \cos \left[(k_i + k_j)t - (m_i + m_j)x \right] + (k_i - k_j) B_{ij} \text{ch} \left[(m_i - m_j)(h-y) \right] \cos \left[(k_i - k_j)t - (m_i - m_j)x \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Dans ces formules on a posé pour simplifier

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \frac{(k_i + k_j)(k_i^2 + k_j^2 + k_j^2) - C_{g,ij}^2 (m_i k_i - m_j k_j)(m_i - m_j)}{(k_i + k_j)^2 \left[1 - \left(\frac{C_{g,ij}}{D_{g,ij}} \right)^2 \right]} \times \frac{\text{ch}(m_i - m_j)h}{\text{ch}(m_i + m_j)h} \\
 B_{ij} &= \frac{(k_i - k_j)(k_i^2 - k_j^2 + k_j^2) - D_{g,ij}^2 (m_i k_i - m_j k_j)(m_i + m_j)}{(k_i - k_j)^2 \left[1 - \left(\frac{C_{g,ij}}{D_{g,ij}} \right)^2 \right]} \times \frac{\text{ch}(m_i + m_j)h}{\text{ch}(m_i - m_j)h}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 C_{g,ij} &= \sqrt{\frac{g}{m_i - m_j}} \text{th} (m_i - m_j)h && \text{célérité propre des ondes de groupe} \\
 C_{g,ij} &= \frac{k_i - k_j}{m_i - m_j} && \text{vitesse des groupes} \\
 D_{g,ij} &= \sqrt{\frac{g}{m_i + m_j}} \text{th} (m_i + m_j)h && \text{célérité propre des demi-ondes} \\
 D_{g,ij} &= \frac{k_i + k_j}{m_i + m_j} && \text{vitesse dite des demi-ondes (vitesse moyenne)}
 \end{aligned}$$

BATTEMENT EN PROFONDEUR QUELCONQUE

COORDONNÉES
DE LAGRANGE

$$x = x_0 + \left[2\alpha \cos(\Delta kt - \Delta m x_0) \right] \frac{\text{ch } m(h-y_0)}{\text{sh } mh} \sin(kt - m x_0) - \left[2\alpha \cos(\Delta kt - \Delta m x_0) \right]^2 \frac{m}{4 \text{ sh}^2 mh} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\text{ch } 2m(h-y_0)}{\text{sh}^2 mh} \right] \sin(2kt - 2m x_0) + \frac{mk \text{ ch } 2m(h-y_0)}{2 \text{ sh}^2 mh} \int \left[2\alpha \cos(\Delta kt - \Delta m x_0) \right]^2 dt - \alpha^2 \frac{mk(\alpha + 2\alpha^2 \text{ch}^2 mh) \text{ch } 2\Delta m(h-y_0)}{4 \Delta k \text{ sh}^2 mh \left[(2\alpha - \alpha^2) \frac{\text{sh } 2\Delta mh}{2\Delta mh} \text{ch}^2 mh - \text{ch } 2\Delta mh \right]} \sin(2\Delta kt - 2\Delta m x_0)$$

$$y = y_0 - \left[2\alpha \cos(\Delta kt - \Delta m x_0) \right] \frac{\text{sh } m(h-y_0)}{\text{sh } mh} \cos(kt - m x_0) - \left[2\alpha \cos(\Delta kt - \Delta m x_0) \right]^2 \frac{m \text{ sh } 2m(h-y_0)}{4 \text{ sh}^2 mh} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\cos(2kt - 2m x_0)}{\text{sh}^2 mh} \right] - \frac{\alpha^2 m \alpha}{2 \text{ sh}^2 mh} \text{sh } 2m(h-y_0) \cos(2\Delta kt - 2\Delta m x_0) + \alpha^2 \frac{mk(\alpha + 2\alpha^2 \text{ch}^2 mh) \text{sh } 2\Delta m(h-y_0)}{4 \Delta k \text{ sh}^2 mh \left[(2\alpha - \alpha^2) \frac{\text{sh } 2\Delta mh}{2\Delta mh} \text{ch}^2 mh - \text{ch } 2\Delta mh \right]} \cos(2\Delta kt - 2\Delta m x_0)$$

$$\frac{\rho}{\rho} = g y_0 + g \left[2\alpha \cos(\Delta kt - \Delta m x_0) \right] \frac{\text{sh } m y_0}{\text{sh } mh \text{ ch } mh} \cos(kt - m x_0) + g \left[2\alpha \cos(\Delta kt - \Delta m x_0) \right]^2 \frac{m \text{ sh } m y_0}{4 \text{ sh}^2 mh} \times \left\{ 3 \cos(2kt - 2m x_0) \left[\frac{\text{ch } m y_0}{\text{sh}^2 mh} - \frac{2 \text{ ch } m(h-y_0)}{\text{ch } mh} \right] + \frac{2 \text{ ch } m(h-y_0)}{\text{ch } mh} \right\} + g \frac{\alpha^2 m \alpha}{\text{sh}^2 mh} \text{sh } m y_0 \text{ ch } m(2h-y_0) \cos(2\Delta kt - 2\Delta m x_0) -$$

$$- g \alpha^2 \frac{mk(\alpha + 2\alpha^2 \text{ch}^2 mh) \text{sh } \Delta m y_0 \text{ ch } \Delta m(2h-y_0)}{2 \Delta k \text{ sh}^2 mh \left[(2\alpha - \alpha^2) \frac{\text{sh } 2\Delta mh}{2\Delta mh} \text{ch}^2 mh - \text{ch } 2\Delta mh \right]} \cos(2\Delta kt - 2\Delta m x_0) + g \alpha^2 \frac{m(\alpha + 2\alpha \text{ch}^2 mh) \text{sh } \Delta m y_0 \text{ sh } \Delta m(2h-y_0)}{\text{sh } mh \text{ ch } mh \left[(2\alpha - \alpha^2) \frac{\text{sh } 2\Delta mh}{2\Delta mh} \text{ch}^2 mh - \text{ch } 2\Delta mh \right]} \cos(2\Delta kt - 2\Delta m x_0)$$

COORDONNÉES
D'EULER

$$\varphi = - \left[2\alpha \cos(\Delta kt - \Delta m x) \right] \frac{k}{m} \frac{\text{ch } m(h-y)}{\text{sh } mh} \sin(kt - m x) - \frac{3}{8} \left[2\alpha \cos(\Delta kt - \Delta m x) \right]^2 k \frac{\text{ch } 2m(h-y)}{\text{sh}^2 mh} \sin(2kt - 2m x) + \alpha^2 \frac{k^2(1 + 2\alpha \text{ch}^2 mh) \text{ch } 2\Delta m(h-y)}{4 \Delta k \text{ sh}^2 mh \left[(2\alpha - \alpha^2) \frac{\text{sh } 2\Delta mh}{2\Delta mh} \text{ch}^2 mh - \text{ch } 2\Delta mh \right]} \sin(2\Delta kt - 2\Delta m x)$$

$$u = \left[2\alpha \cos(\Delta kt - \Delta m x) \right] k \frac{\text{ch } m(h-y)}{\text{sh } mh} \cos(kt - m x) + \frac{3}{4} \left[2\alpha \cos(\Delta kt - \Delta m x) \right]^2 \frac{mk \text{ ch } 2m(h-y)}{\text{sh}^2 mh} \cos(2kt - 2m x) - \alpha^2 \frac{mk(\alpha + 2\alpha^2 \text{ch}^2 mh) \text{ch } 2\Delta m(h-y)}{2 \text{ sh}^2 mh \left[(2\alpha - \alpha^2) \frac{\text{sh } 2\Delta mh}{2\Delta mh} \text{ch}^2 mh - \text{ch } 2\Delta mh \right]} \cos(2\Delta kt - 2\Delta m x)$$

$$v = \left[2\alpha \cos(\Delta kt - \Delta m x) \right] k \frac{\text{sh } m(h-y)}{\text{sh } mh} \sin(kt - m x) + \frac{3}{4} \left[2\alpha \cos(\Delta kt - \Delta m x) \right]^2 \frac{mk \text{ sh } 2m(h-y)}{\text{sh}^2 mh} \sin(2kt - 2m x) - \alpha^2 \frac{mk(\alpha + 2\alpha^2 \text{ch}^2 mh) \text{sh } 2\Delta m(h-y)}{2 \text{ sh}^2 mh \left[(2\alpha - \alpha^2) \frac{\text{sh } 2\Delta mh}{2\Delta mh} \text{ch}^2 mh - \text{ch } 2\Delta mh \right]} \sin(2\Delta kt - 2\Delta m x)$$

$$\frac{\rho}{\rho} = g y + g \left[2\alpha \cos(\Delta kt - \Delta m x) \right] \frac{\text{ch } m(h-y)}{\text{ch } mh} \cos(kt - m x) + \frac{3}{4} g \left[2\alpha \cos(\Delta kt - \Delta m x) \right]^2 m \text{ th } mh \left[\frac{\text{ch } 2m(h-y)}{\text{sh}^2 mh} - \frac{1}{3} \right] \left[\frac{\cos(2kt - 2m x)}{\text{sh}^2 mh} - \frac{1}{3} \right] + \frac{1}{4} g \left[2\alpha \cos(\Delta kt - \Delta m x) \right]^2 m \text{ th } mh \left(\frac{1}{\text{sh}^2 mh} - \frac{1}{3} \right) - g \alpha^2 \frac{m}{2 \text{ sh } mh \text{ ch } mh} \cos(2\Delta kt - 2\Delta m x) -$$

$$- g \alpha^2 m \frac{(1 + 2\alpha \text{ch}^2 mh) \text{ch } 2\Delta m(h-y)}{2 \text{ sh } mh \text{ ch } mh \left[(2\alpha - \alpha^2) \frac{\text{sh } 2\Delta mh}{2\Delta mh} \text{ch}^2 mh - \text{ch } 2\Delta mh \right]} \cos(2\Delta kt - 2\Delta m x)$$

CLAPOTIS IMPARFAIT EN PROFONDEUR QUELCONQUE

COORDONNÉES
DE LAGRANGE

$$x = x_0 + 2\alpha \frac{\text{ch } m(h-y_0)}{\text{sh } mh} \cos(m x_0 - \Delta kt) \sin(kt - \Delta m x_0) - \alpha^2 m \frac{\sin(2m x_0 - 2\Delta kt)}{\text{sh}^2 mh} \left\{ \sin^2(kt - \Delta m x_0) + \frac{\text{ch } 2m(h-y_0)}{4 \text{ sh}^2 mh} \left[3 \cos(2kt - 2\Delta m x_0) + \text{th}^2 mh \right] \right\} - \alpha^2 m \frac{\sin(2m x_0 - 2\Delta kt)}{2 \text{ sh}^2 mh} \left[(\alpha + 1) \text{ch } 2\Delta m(h-y_0) - 1 - \left(\frac{B_c}{\Delta k} + \frac{1}{2 \text{ ch}^2 mh} \right) \text{ch } 2m(h-y_0) \right]$$

$$y = y_0 - 2\alpha \frac{\text{sh } m(h-y_0)}{\text{sh } mh} \sin(m x_0 - \Delta kt) \sin(kt - \Delta m x_0) - \alpha^2 m \frac{\text{sh } 2m(h-y_0)}{\text{sh}^2 mh} \left\{ \sin^2(kt - \Delta m x_0) + \frac{\cos(2m x_0 - 2\Delta kt)}{4 \text{ sh}^2 mh} \left[3 \cos(2kt - 2\Delta m x_0) + \text{th}^2 mh \right] \right\} - \alpha^2 m \frac{\cos(2m x_0 - 2\Delta kt)}{2 \text{ sh}^2 mh} \left[\frac{k}{\Delta k} \text{sh } 2\Delta m(h-y_0) - \left(\frac{B_c}{\Delta k} + \frac{1}{2 \text{ ch}^2 mh} \right) \text{sh } 2m(h-y_0) \right]$$

$$\frac{\rho}{\rho} = g y_0 + 2g\alpha \frac{\text{sh } m y_0}{\text{sh } mh \text{ ch } mh} \sin(m x_0 - \Delta kt) \sin(kt - \Delta m x_0) + g \alpha^2 \frac{\text{sh } m y_0}{2 \text{ sh}^2 mh} \left\{ \text{ch } m(2h-y_0) \left[\frac{\cos(2m x_0 - 2\Delta kt)}{\text{sh}^2 mh} + 4 \sin^2(kt - \Delta m x_0) \right] + 4 \text{ th } mh \text{ sh } m(2h-y_0) \left[1 - 3 \sin^2(kt - \Delta m x_0) \right] + 3 \cos(2m x_0 - 2\Delta kt) \cos(2kt - 2\Delta m x_0) \left[\frac{\text{ch } m y_0}{\text{sh}^2 mh} - \frac{2 \text{ ch } m(h-y_0)}{\text{ch } mh} \right] \right\} -$$

$$- g m \alpha^2 \frac{\cos(2m x_0 - 2\Delta kt)}{\text{sh}^2 mh} \left[\left(\frac{B_c}{\Delta k} + \frac{1}{2 \text{ ch}^2 mh} \right) \text{ch } m(2h-y_0) \text{ sh } m y_0 - \frac{k}{\Delta k} \text{ch } \Delta m(2h-y_0) \text{ sh } \Delta m y_0 \right] - \alpha^2 m \alpha \frac{\cos(2kt - 2\Delta m x_0)}{\text{sh}^2 mh} \cdot \frac{4 \text{ ch}^2 mh - 3}{\text{ch } 2\Delta mh} \text{th } mh \text{ sh } \Delta m(2h-y_0) \text{ sh } \Delta m y_0$$

COORDONNÉES
D'EULER

$$\varphi = 2 \frac{\alpha k}{m} \frac{\text{ch } m(h-y)}{\text{sh } mh} \sin(m x - \Delta kt) \cos(kt - \Delta m x) - 3 \alpha^2 k \frac{\text{ch } 2m(h-y)}{4 \text{ sh}^2 mh} \cos(2m x - 2\Delta kt) \sin(2kt - 2\Delta m x) - \alpha^2 k \frac{4 \text{ ch}^2 mh - 3}{4 \text{ sh}^2 mh \text{ ch } 2\Delta mh} \text{ch } 2\Delta m(h-y) \sin(2kt - 2\Delta m x) - \alpha^2 \frac{B_c}{2 \text{ sh}^2 mh} \text{ch } 2m(h-y) \sin(2m x - 2\Delta kt)$$

$$u = 2 \alpha k \frac{\text{ch } m(h-y)}{\text{sh } mh} \cos(m x - \Delta kt) \cos(kt - \Delta m x) + 3 \alpha^2 m k \frac{\text{ch } 2m(h-y)}{2 \text{ sh}^2 mh} \sin(2m x - 2\Delta kt) \sin(2kt - 2\Delta m x) + \alpha^2 \Delta m k \frac{4 \text{ ch}^2 mh - 3}{2 \text{ sh}^2 mh \text{ ch } 2\Delta mh} \text{ch } 2\Delta m(h-y) \cos(2kt - 2\Delta m x) - \alpha^2 m \frac{B_c}{2 \text{ sh}^2 mh} \text{ch } 2m(h-y) \cos(2m x - 2\Delta kt)$$

$$v = -2 \alpha k \frac{\text{sh } m(h-y)}{\text{sh } mh} \sin(m x - \Delta kt) \cos(kt - \Delta m x) + 3 \alpha^2 m k \frac{\text{sh } 2m(h-y)}{2 \text{ sh}^2 mh} \cos(2m x - 2\Delta kt) \sin(2kt - 2\Delta m x) + \alpha^2 \Delta m k \frac{4 \text{ ch}^2 mh - 3}{2 \text{ sh}^2 mh \text{ ch } 2\Delta mh} \text{sh } 2\Delta m(h-y) \sin(2kt - 2\Delta m x) + \alpha^2 m \frac{B_c}{2 \text{ sh}^2 mh} \text{sh } 2m(h-y) \sin(2m x - 2\Delta kt)$$

$$\frac{\rho}{\rho} = g y + 2g\alpha \frac{\text{ch } m(h-y)}{\text{ch } m} \sin(m x - \Delta kt) \sin(kt - \Delta m x) - g \frac{\alpha^2 m}{\text{sh } mh \text{ ch } mh} \left[\text{ch } 2m(h-y) + \cos(2m x - 2\Delta kt) - 1 \right] \cos^2(kt - 2\Delta m x) + 3g\alpha^2 m \frac{\text{ch } 2m(h-y)}{2 \text{ sh}^2 mh \text{ ch } mh} \cos(2m x - 2\Delta kt) \cos(2kt - 2\Delta m x) +$$

$$+ 2g\alpha^2 m \text{th } mh \cos(2kt - 2\Delta m x) + g \alpha^2 m \frac{4 \text{ ch}^2 mh - 3}{2 \text{ sh } mh \text{ ch } mh} \left[\frac{\text{ch } 2\Delta m(h-y)}{\text{ch } 2\Delta mh} - 1 \right] \cos(2kt - 2\Delta m x) - g \alpha^2 m \frac{\text{ch } 2\Delta m(h-y) - 1}{2 \text{ sh } mh \text{ ch } mh} \cos(2m x - 2\Delta kt)$$

avec $B_c = k \frac{\text{sh } 2\Delta mh - \frac{\Delta k}{k} \text{th } mh \text{ ch } 2\Delta mh}{\text{sh } 2\Delta mh}$

BATTEMENT EN PROFONDEUR INFINIE

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \left[2a \cos (\Delta kt - \Delta mx_0) \right] e^{-my_0} \sin (kt - mx_0) + mk e^{-2my_0} \int \left[2a \cos (\Delta kt - \Delta mx_0) \right]^2 dt - 2a^2 m e^{-2\Delta my_0} \sin (2\Delta kt - 2\Delta mx_0) \\ y &= y_0 - \left[2a \cos (\Delta kt - \Delta mx_0) \right] e^{-my_0} \cos (kt - mx_0) - \frac{1}{2} m \left[2a \cos (\Delta kt - \Delta mx_0) \right]^2 e^{-2my_0} + 2a^2 m (e^{-2\Delta my_0} - e^{-2my_0}) \cos (2\Delta kt - 2\Delta mx_0) \\ \frac{\rho}{\rho} &= gy_0 + 2ga^2 m (e^{-2\Delta my_0} - e^{-2my_0}) \cos (2\Delta kt - 2\Delta mx_0) \\ \varphi &= - \left[2a \cos (\Delta kt - \Delta mx) \right] \frac{k}{m} e^{-my} \sin (kt - mx) + ga^2 k \frac{m}{k} e^{-2\Delta my} \sin (2\Delta kt - 2\Delta mx) \\ u &= \left[2a \cos (\Delta kt - \Delta mx) \right] k e^{-my} \cos (kt - mx) - 4a^2 m \Delta k e^{-2\Delta my} \cos (2\Delta kt - 2\Delta mx) \\ v &= \left[2a \cos (\Delta kt - \Delta mx) \right] k e^{-my} \sin (kt - mx) - 4a^2 m \Delta k e^{-2\Delta my} \sin (2\Delta kt - 2\Delta mx) \\ \frac{\rho}{\rho} &= gy + g \left[2a \cos (\Delta kt - \Delta mx) \right] e^{-my} \cos (kt - mx) - \frac{1}{2} g \left[2a \cos (\Delta kt - \Delta mx_0) \right]^2 m e^{-2my} - 2ga^2 m \frac{\Delta k}{k} e^{-2\Delta my} \cos (2\Delta kt - 2\Delta mx) \end{aligned} \right\}$$

HOULE RÉGULIÈRE EN PROFONDEUR QUELCONQUE (Formules données à titre de comparaison.)

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + a \frac{\text{ch } m(h-y_0)}{\text{sh } mh} \sin (kt - mx_0) - a^2 m \frac{\sin (2kt - 2mx_0)}{4 \text{sh}^2 mh} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\text{ch } 2m(h-y_0)}{\text{sh}^2 mh} \right] + mk \frac{\text{ch } 2m(h-y_0)}{2 \text{sh}^2 mh} \int a^2 dt \\ y &= y_0 - a \frac{\text{sh } m(h-y_0)}{\text{sh } mh} \cos (kt - mx_0) - a^2 m \frac{\text{sh } 2m(h-y_0)}{4 \text{sh}^2 mh} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\cos (2kt - 2mx_0)}{\text{sh}^2 mh} \right] \\ \frac{\rho}{\rho} &= gy_0 + ga \frac{\text{sh } my_0}{\text{sh } mh \text{ch } mh} \cos (kt - mx_0) + ga^2 m \frac{\text{sh } my_0}{4 \text{sh}^2 mh} \left\{ 3 \cos (2kt - 2mx_0) \left[\frac{\text{ch } my_0}{\text{sh}^2 mh} - \frac{2 \text{ch } m(h-y_0)}{\text{ch } mh} \right] + \frac{2 \text{ch } m(h-y_0)}{\text{ch } mh} \right\} \\ \varphi &= -a \frac{k}{m} \frac{\text{ch } m(h-y)}{\text{sh } mh} \sin (kt - mx) - \frac{3}{8} a^2 k \frac{\text{ch } 2m(h-y)}{\text{sh}^4 mh} \sin (2kt - 2mx) \\ u &= ak \frac{\text{ch } m(h-y)}{\text{sh } mh} \cos (kt - mx) + \frac{3}{4} a^2 m k \frac{\text{ch } 2m(h-y)}{\text{sh}^4 mh} \cos (2kt - 2mx) \\ v &= ak \frac{\text{sh } m(h-y)}{\text{sh } mh} \sin (kt - mx) + \frac{3}{4} a^2 m k \frac{\text{sh } 2m(h-y)}{\text{sh}^4 mh} \sin (2kt - 2mx) \\ \frac{\rho}{\rho} &= gy + ga \frac{\text{ch } m(h-y)}{\text{ch } mh} \cos (kt - mx) + \frac{3}{4} ga^2 m \text{th } mh \left[\frac{\text{ch } 2m(h-y)}{\text{sh}^2 mh} - \frac{1}{3} \right] \left[\frac{\cos (2kt - 2mx)}{\text{sh}^2 mh} - \frac{1}{3} \right] + \frac{1}{4} ga^2 m \text{th } mh \left(\frac{1}{\text{sh}^2 mh} - \frac{1}{3} \right) \end{aligned} \right\}$$

HOULE RÉGULIÈRE EN PROFONDEUR INFINIE (Formules données à titre de comparaison.)

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + a e^{-my_0} \sin (kt - mx_0) + mk e^{-2my_0} \int a^2 dt \\ y &= y_0 - a e^{-my_0} \cos (kt - mx_0) - \frac{a^2 m}{2} e^{-2my_0} \\ \frac{\rho}{\rho} &= gy_0 \\ \varphi &= -a \frac{k}{m} e^{-my} \sin (kt - mx) \\ u &= ak e^{-my} \cos (kt - mx) \\ v &= ak e^{-my} \sin (kt - mx) \\ \frac{\rho}{\rho} &= gy + ga e^{-my} \cos (kt - mx) - \frac{1}{2} ga^2 m e^{-2my} \end{aligned} \right\}$$

CLAPOTIS IMPARFAIT EN PROFONDEUR INFINIE

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + 2a e^{-my_0} \cos (mx_0 - \Delta kt) \sin (kt - \Delta mx_0) \\ y &= y_0 - 2a e^{-my_0} \sin (mx_0 - \Delta kt) \sin (kt - \Delta mx_0) - 2a^2 m e^{-2my_0} \sin^2 (kt - \Delta mx_0) \\ \frac{\rho}{\rho} &= gy_0 + 2ga^2 m \left[e^{-2\Delta my_0} - e^{-2my_0} \right] \cos (2kt - 2\Delta mx_0) \\ \varphi &= 2 \frac{ak}{m} e^{-my} \sin (mx - \Delta kt) \cos (kt - \Delta mx) - a^2 k e^{-2\Delta my} \sin (2kt - 2\Delta mx) \\ u &= 2ak e^{-my} \cos (mx - \Delta kt) \cos (kt - \Delta mx) + 4a^2 m \Delta k e^{-2\Delta my} \cos (2kt - 2\Delta mx) \\ v &= -2ak e^{-my} \sin (mx - \Delta kt) \cos (kt - \Delta mx) + 4a^2 m \Delta k e^{-2\Delta my} \sin (2kt - 2\Delta mx) \\ \frac{\rho}{\rho} &= gy + 2ga e^{-my} \sin (mx - \Delta kt) \sin (kt - \Delta mx) - 2ga^2 m e^{-2my} \sin^2 (kt - \Delta mx) + 2ga^2 m (e^{-2\Delta my} - e^{-2my}) \cos (2kt - 2\Delta mx) \end{aligned} \right\}$$

CLAPOTIS RÉGULIER EN PROFONDEUR QUELCONQUE (Formules données à titre de comparaison.)

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + 2a \frac{\text{ch } m(h-y_0)}{\text{sh } mh} \cos mx_0 \sin kt - a^2 m \frac{\sin 2mx_0}{\text{sh}^2 mh} \left[\sin^2 kt + \frac{\text{ch } 2m(h-y_0)}{4 \text{sh}^2 mh} (3 \cos 2kt + \text{th}^2 mh) \right] \\ y &= y_0 - 2a \frac{\text{sh } m(h-y_0)}{\text{sh } mh} \sin mx_0 \sin kt - a^2 m \frac{\text{sh } 2m(h-y_0)}{\text{sh}^2 mh} \left[\sin^2 kt + \frac{\cos 2mx_0}{4 \text{sh}^2 mh} (3 \cos 2kt + \text{th}^2 mh) \right] \\ \frac{\rho}{\rho} &= gy_0 + 2ga \frac{\text{sh } my_0}{\text{sh } mh \text{ch } mh} \sin mx_0 \sin kt + ga^2 m \frac{\text{sh } my_0}{2 \text{sh}^2 mh} \left\{ \text{ch } m(2h-y_0) \left[\frac{\cos 2mx_0}{\text{ch}^2 mh} + 4 \sin^2 kt \right] + 4 \text{th } mh \text{sh } m(2h-y_0) \left[1 - 3 \sin^2 kt \right] + 3 \cos 2mx_0 \cos 2kt \left[\frac{\text{ch } my_0}{\text{sh}^2 mh} - \frac{2 \text{ch } m(h-y_0)}{\text{ch } mh} \right] \right\} \\ \varphi &= 2a \frac{k}{m} \frac{\text{ch } m(h-y)}{\text{sh } mh} \sin mx \cos kt - 3a^2 k \frac{\text{ch } 2m(h-y)}{4 \text{sh}^4 mh} \cos 2mx \sin 2kt \\ u &= 2ak \frac{\text{ch } m(h-y)}{\text{sh } mh} \cos mx \cos kt + 3a^2 m k \frac{\text{ch } 2m(h-y)}{2 \text{sh}^4 mh} \sin 2mx \sin 2kt \\ v &= -2ak \frac{\text{sh } m(h-y)}{\text{sh } mh} \sin mx \cos kt + 3a^2 m k \frac{\text{sh } 2m(h-y)}{2 \text{sh}^4 mh} \cos 2mx \sin 2kt \\ \frac{\rho}{\rho} &= gy + 2ga \frac{\text{ch } m(h-y)}{\text{ch } mh} \sin mx \sin kt - ga^2 m \frac{\cos^2 kt}{\text{sh } mh \text{ch } mh} \left[\text{ch } 2m(h-y) + \cos 2mx - 1 \right] + 3ga^2 m \frac{\text{ch } 2m(h-y)}{2 \text{sh}^3 mh \text{ch } mh} \cos 2mx \cos 2kt + 2ga^2 m \text{th } mh \cos 2kt \end{aligned} \right\}$$

CLAPOTIS RÉGULIER EN PROFONDEUR INFINIE (Formules données à titre de comparaison.)

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + 2a e^{-my_0} \cos mx_0 \sin kt \\ y &= y_0 - 2a e^{-my_0} \sin mx_0 \sin kt - 2a^2 m e^{-2my_0} \sin^2 kt \\ \frac{\rho}{\rho} &= gy_0 + 2ga^2 m \left[1 - e^{-2my_0} \right] \cos 2kt \\ \varphi &= 2a \frac{k}{m} e^{-my} \sin mx \cos kt \\ u &= 2ak e^{-my} \cos mx \cos kt \\ v &= 2ak e^{-my} \sin mx \cos kt \\ \frac{\rho}{\rho} &= gy + 2ga e^{-my} \sin mx \cos kt - 2ga^2 m e^{-2my} \sin^2 kt + 2ga^2 m (1 - e^{-2my}) \cos 2kt \end{aligned} \right\}$$

T_i = période de la houle composante n° i .

$m_i = \frac{2\pi}{L_i}$ « nombre d'onde ».

$k_i = \frac{2\pi}{T}$ fréquences angulaires.

g = accélération de la pesanteur.

h = profondeur moyenne de l'eau.

m_i, k_i et h sont liés par la relation classique $k_i^2 = m_i g \operatorname{th} m_i h$.

Nous considérerons alors les équations relatives à deux houles composantes d'indices 1 et 2 et nous poserons :

$$m_1 = -m_2 = m \quad k_1 = k_2 = k$$

Nous prendrons comme amplitude a_1 et $-a_2$ **.

Certains coefficients des formules générales prennent une valeur indéterminée par suite des relations ci-dessus. Il est facile de lever cette indétermination par le procédé classique du passage à la limite. On obtient ainsi en particulier :

$$A_{12} = \frac{k}{2} [2 \operatorname{ch} 2mh - 1] = \frac{m_1 + m_2}{k_1 - k_2} = \frac{4k \operatorname{ch}^2 mh}{g(2mh + \operatorname{sh} 2mh)}$$

$$\frac{B_{12}}{k_1 - k_2} = \frac{1}{4} \left[\operatorname{th}^2 mh + \frac{6mh - \operatorname{sh} 2mh}{2mh + \operatorname{sh} 2mh} \right]$$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les formules du clapotis.

CLAPOTIS PARTIEL

En coordonnées de Lagrange :

$$x = x_0 + \frac{\operatorname{ch} m(h - y_0)}{\operatorname{sh} mh} \left[(a_1 + a_2) \sin kt \cos mx_0 - (a_1 - a_2) \cos kt \sin mx_0 \right]$$

$$+ \frac{m}{4 \operatorname{sh}^2 mh} \left[1 - \frac{3 \operatorname{ch} 2m(h - y_0)}{2 \operatorname{sh}^2 mh} \right] \left[(a_2^2 - a_1^2) \sin 2kt \cos 2mx_0 + (a_1^2 + a_2^2) \cos 2kt \sin 2mx_0 \right]$$

$$+ \frac{ma_2 a_1 \sin 2mx_0}{2 \operatorname{sh}^2 mh} \left[-\frac{3 \operatorname{sh} 2mh + 2mh}{\operatorname{sh} 2mh + 2mh} + \frac{\operatorname{ch} 2m(h - y_0)}{2} \left(\operatorname{th}^2 mh + \frac{6mh - \operatorname{sh} 2mh}{2mh + \operatorname{sh} 2mh} \right) \right]$$

$$y = y_0 - \frac{\operatorname{sh} m(h - y_0)}{\operatorname{sh} mh} \left[(a_1 - a_2) \cos mx_0 \cos kt + (a_1 + a_2) \sin mx_0 \sin kt \right]$$

$$- \frac{m \operatorname{sh} 2m(h - y_0)}{4 \operatorname{sh}^2 mh} \left[a_1^2 + a_2^2 + \frac{3}{2} \frac{(a_1^2 + a_2^2) \cos 2kt \cos 2mx_0 + (a_1^2 - a_2^2) \sin 2mx_0 \sin 2kt}{\operatorname{sh}^2 mh} \right]$$

$$+ \frac{ma_2 a_1}{2 \operatorname{sh}^2 mh} \left\{ \operatorname{sh} 2m(h - y_0) \left[\cos 2kt + \frac{1}{2} \left(\operatorname{th}^2 mh + \frac{6mh - \operatorname{sh} 2mh}{2mh + \operatorname{sh} 2mh} \right) \cos 2mx_0 \right] \right.$$

$$\left. - \frac{4m(h - y_0) \operatorname{sh}^2 mh}{2mh + \operatorname{sh} 2mh} \cos 2mx_0 \right\}$$

** Nous avons pris $-a_2$ pour obtenir des formules comparables à celles de M. MICHE.

$$\begin{aligned}
\frac{p}{\varphi g} = & y_0 + \frac{2 \operatorname{sh} m y_0}{\operatorname{sh}^2 m h} \left[(a_1 - a_2) \cos kt \cos m x_0 + (a_1 + a_2) \sin kt \sin m x_0 \right] \\
& + \frac{3 m \operatorname{sh} m y_0}{4 \operatorname{sh}^2 m h} \left[\frac{\operatorname{ch} m y_0}{\operatorname{sh}^2 m h} - \frac{2 \operatorname{ch} m (h - y_0)}{\operatorname{ch} m h} \right] \left[(a_1^2 + a_2^2) \cos 2 kt \cos 2 m x_0 + (a_1^2 - a_2^2) \sin 2 kt \sin 2 m x_0 \right] \\
& + \frac{m (a_1^2 + a_2^2) \operatorname{sh} m y_0 \operatorname{ch} m (h - y_0)}{2 \operatorname{ch} m h \operatorname{sh}^2 m h} \\
& + \frac{m a_1 a_2}{2 \operatorname{sh}^2 m h} \left\{ \left[\operatorname{th} m h (2 \operatorname{ch} 2 m h - 1 - 3 \operatorname{ch} 2 m (h - y_0)) + \operatorname{sh} 2 m (h - y_0) \right] \cos 2 kt \right. \\
& \left. + \left[\operatorname{th} m h - \frac{4 m (h - y_0) \operatorname{sh} 2 m h}{2 m h + \operatorname{sh} 2 m h} + \frac{\operatorname{sh} 2 m (h - y_0)}{2} \operatorname{th}^2 m h + \frac{(m h - \operatorname{sh} 2 m h)}{2 m h + \operatorname{sh} 2 m h} \right] \cos 2 m x_0 \right\}
\end{aligned}$$

En coordonnées d'Euler :

$$\begin{aligned}
\varphi = & \frac{k}{m} \left\{ \frac{\operatorname{ch} m (h - y)}{\operatorname{sh} m h} \left[(a_1 + a_2) \sin kt \cos m x - (a_1 - a_2) \cos kt \cos m x \right] \right. \\
& - \frac{3 m \operatorname{ch} 2 m (h - y)}{8 \operatorname{sh}^4 m h} \left[(a_1^2 + a_2^2) \sin 2 kt \cos 2 m x + (a_2^2 - a_1^2) \cos 2 kt \sin 2 m x \right] \\
& \left. - \frac{m a_1 a_2 (2 \operatorname{ch} 2 m h - 1)}{4 \operatorname{sh}^2 m h} \sin 2 kt \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U = & k \left\{ \frac{\operatorname{ch} m (h - y)}{\operatorname{sh} m h} \left[(a_1 + a_2) \cos kt \cos m x + (a_1 - a_2) \sin kt \sin m x \right] \right. \\
& \left. + \frac{3}{4} \frac{m \operatorname{ch} 2 m (h - y)}{\operatorname{sh}^4 m h} \left[(a_1^2 - a_2^2) \cos 2 kt \cos 2 m x + (a_1^2 + a_2^2) \sin 2 m x \sin 2 kt \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V = & k \left\{ \frac{\operatorname{sh} m (h - y)}{\operatorname{sh} m h} \left[(a_1 + a_2) \sin kt \cos m x + (a_2 - a_1) \sin m x \cos kt \right] \right. \\
& \left. + \frac{3 m \operatorname{sh}^2 m (h - y)}{4 \operatorname{sh}^4 m h} \left[(a_1^2 + a_2^2) \sin 2 kt \cos 2 m x + (a_2^2 - a_1^2) \sin 2 m x \cos 2 kt \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{p}{\varphi} = & g y + \frac{k^2}{m} \left\{ \frac{\operatorname{ch} m (h - y)}{\operatorname{sh} m h} \left[(a_1 - a_2) \cos kt \cos m x + (a_1 + a_2) \sin kt \sin m x \right] \right. \\
& + \frac{3 m}{4 \operatorname{sh}^2 m h} \left[\frac{\operatorname{ch} 2 m (h - y)}{\operatorname{sh}^2 m h} - \frac{1}{3} \right] \left[(a_1^2 + a_2^2) \cos 2 kt \cos 2 m x + (a_1^2 - a_2^2) \sin 2 kt \sin 2 m x \right] \\
& + \frac{m (a_1^2 + a_2^2)}{4 \operatorname{sh}^2 m h} \left[1 - \operatorname{ch} 2 m (h - y) \right] \\
& \left. - \frac{m a_1 a_2}{2 \operatorname{sh}^2 m h} \left[\cos 2 m x + [\operatorname{ch} 2 m (h - y) - 2 \operatorname{ch} 2 m h + 1] \cos 2 kt \right] \right\}
\end{aligned}$$

CLAPOTIS PARFAIT

En faisant $a_1 = a_2 = a$ dans les formules précédentes, nous obtenons celles du clapotis parfait.

En coordonnées de Lagrange :

$$x = x_0 + 2a \frac{\text{ch } m(h - y_0)}{\text{sh } mh} \sin kt \cos mx_0 + \frac{ma^2}{2 \text{sh}^2 mh} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\text{ch } 2m(h - y_0)}{\text{sh}^2 mh} \right) \cos 2kt \sin 2mx_0$$

$$+ \left[-\frac{3 \text{sh } 2mh + 2mh}{\text{sh } 2mh + 2mh} + \frac{\text{ch}^2 m(h - y_0)}{2} \left(\frac{6mh - \text{sh } 2mh}{2mh + \text{sh } 2mh} + \text{th}^2 mh \right) \right] \sin 2mx_0 \left\{ \right.$$

$$y = y_0 - 2a \frac{\text{sh } m(h - y_0)}{\text{sh } mh} \sin mx_0 \sin kt - \frac{ma^2}{2 \text{sh}^2 mh} \left\{ \text{sh } 2m(h - y_0) \right.$$

$$\left[1 + \frac{3 \cos 2kt \cos 2mx_0}{2 \text{sh}^2 mh} - \cos 2kt - \frac{1}{2} \left(\text{th}^2 mh + \frac{6mh - \text{sh } 2mh}{2mh + \text{sh } 2mh} \right) \cos 2mx_0 \right]$$

$$+ \frac{4m(h - y_0) \text{sh } 2mh}{2mh + \text{sh } 2mh} \cos 2mx_0 \left\{ \right.$$

$$\frac{p}{\rho g} = y_0 + \frac{4a \text{sh } my_0}{\text{sh } mh} \sin kt \sin mx_0$$

$$+ \frac{ma^2}{2 \text{sh}^2 mh} \left\{ 3 \text{sh } my_0 \left(\frac{\text{ch } m y_0}{\text{sh}^2 mh} - \frac{2 \text{ch } m(h - y_0)}{\text{ch } mh} \right) \cos 2kt \cos 2mx_0 + \frac{2 \text{sh } m y_0 \text{ch } m(h - y_0)}{\text{ch } mh} \right.$$

$$+ \left[\text{th } mh (2 \text{ch}^2 mh - 1 - 3 \text{ch}^2 m(h - y_0)) + \text{sh } 2m(h - y_0) \right] \cos 2kt$$

$$+ \left[\text{th } mh + \frac{\text{sh } 2m(h - y_0)}{2} \left(\text{th}^2 mh + \frac{6mh - \text{sh } 2mh}{2mh + \text{sh } 2mh} \right) \right] \cos 2mx_0 \left\{ \right.$$

En coordonnées d'Euler :

$$\varphi = \frac{k}{m} \left\{ + 2a \frac{\text{ch } m(h - y)}{\text{sh } mh} \sin kt \cos mx \right.$$

$$- \frac{ma^2}{4 \text{sh}^2 mh} \left[\frac{3 \text{ch } 2m(h - y)}{\text{sh}^2 mh} \sin 2kt \cos 2mx + (2 \text{ch } 2mh - 1) \sin 2kt \right] \left\{ \right.$$

$$U = k \left[\frac{2a \text{ch } m(h - y)}{\text{sh } mh} \cos kt \cos mx + \frac{3}{2} \frac{ma^2 \text{ch } 2m(h - y)}{\text{sh}^4 mh} \cos 2kt \cos 2mx \right]$$

$$V = k \left[+ 2a \frac{\text{sh } m(h - y)}{\text{sh } mh} \sin kt \cos mx + \frac{3ma^2 \text{sh } 2m(h - y)}{2 \text{sh}^4 mh} \sin 2kt \cos 2mx \right]$$

$$\frac{p}{\rho} = gy + \frac{k^2}{m} \left\{ \frac{2 a \operatorname{ch} m (h-y)}{\operatorname{sh} mh} \sin mx \sin kt \right. \\ \left. + \frac{m a^2}{2 \operatorname{sh}^2 mh} \left[3 \left(\frac{\operatorname{ch} 2 m (h-y)}{\operatorname{sh}^2 mh} - \frac{1}{3} \right) \cos 2 kt \cos 2 mx + 1 - \operatorname{ch} 2 m (h-y) - \cos 2 mx \right. \right. \\ \left. \left. - (\operatorname{ch} 2 m (h-y) - 2 \operatorname{ch} 2 mh + 1) \cos 2 kt \right] \right\}$$

En examinant les formules précédentes, nous constatons qu'elles présentent de légères différences avec celles de M. MICHE, les voici :

pour x :

$$\frac{m a^2}{\operatorname{sh}^2 mh} \left[\frac{\operatorname{sh} 2 mh - 2 mh \operatorname{ch} 2 m (h-y_0)}{2 mh + \operatorname{sh} 2 mh} \right] \sin 2 mx_0$$

pour y :

$$- 2 m a^2 \left[\frac{mh \operatorname{sh} 2 m (h-y_0) - m (h-y_0) \operatorname{sh} 2 mh}{\operatorname{sh}^2 mh (2 mh + \operatorname{sh} 2 mh)} \right] \cos 2 mx_0$$

pour $\frac{n}{\rho g}$:

$$- 4 m a^2 \left[\frac{mh \operatorname{sh}^2 m (h-y_0) - m (h-y_0) \operatorname{sh} 2 mh}{\operatorname{sh}^2 mh (2 mh + \operatorname{sh} 2 mh)} \right]$$

pour φ :

$$- \frac{k a^2}{4 \operatorname{sh}^2 mh} (2 \operatorname{ch} 2 mh - 1) \sin 2 kt$$

Cette dernière différence est sans importance physique puisqu'elle ne dépend que du temps. Les autres différences, qui s'annulent d'ailleurs pour y et p à la surface et au fond, proviennent de ce que les définitions de x_0 et y_0 caractérisant une particule ne sont pas exactement les mêmes chez MM. BIESEL et MICHE, quoique on ait au fond $y_0 = h$ et à la surface $y_0 = 0$ chez tous les deux.

N. B. — Si nous appelons $x_0 y_0$ la place d'une particule au repos chez M. BIESEL et $x_1 y_1$ la place de la même particule au repos chez M. MICHE, nous avons :

$$x_0 = x_1 + \frac{m a^2 [\operatorname{sh} 2 mh - 2 mh \operatorname{ch} 2 m (h-y_1)]}{\operatorname{sh}^2 mh (2 mh + \operatorname{sh} 2 mh)} \sin 2 mx_1 \\ y_0 = y_1 - \frac{2 m a^2 [mh \operatorname{sh} 2 m (h-y_1) - m (h-y_1) \operatorname{sh} 2 mh]}{\operatorname{sh}^2 mh (2 mh + \operatorname{sh} 2 mh)} \cos 2 mx_1$$

Ces deux systèmes de positions des particules au repos sont également acceptables, car ils satisfont à l'équation de continuité d'un fluide incompressible :

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_0} \frac{\partial y_1}{\partial y_0} - \frac{\partial x_1}{\partial y_0} \frac{\partial y_1}{\partial x_0} = \frac{\partial x_2}{\partial x_0} \frac{\partial y_2}{\partial y_0} - \frac{\partial x_2}{\partial y_0} \frac{\partial y_2}{\partial x_0} = 1$$

La divergence entre les deux systèmes de formules n'est donc qu'apparente et ne les empêche pas d'être physiquement équivalents à l'ordre d'approximation considéré. Sous réserves d'études poussées en troisième ordre, il est d'ailleurs impossible de faire un choix rationnel entre ces deux représentations. Tout ce que l'on peut dire est que le système de coordonnées initiales utilisé par M. MICHE conduit à des formules un peu plus simples tandis que le système utilisé par M. BIESEL se raccorde d'une façon continue à la famille d'équations plus générale qu'il a établie dans l'article déjà cité.

SURFACE LIBRE

En faisant $y = 0$ dans les formules précédentes, nous obtenons les équations paramétriques des surfaces libres, x_0 étant le paramètre.

Clapotis partiel :

$$\begin{aligned}
 x = x_0 + \frac{1}{\text{th } mh} & \left[(a_1 + a_2) \sin kt \cos mx_0 - (a_1 - a_2) \cos kt \sin mx_0 \right] \\
 - \frac{m (2 \text{ ch } 2 mh + 1)}{8 \text{ sh}^4 mh} & \left[(a_2^2 - a_1^2) \sin 2 kt \cos mx_0 + (a_2^2 + a_1^2) \cos 2 kt \sin 2 mx_0 \right] \\
 + \frac{ma_1 a_2 \sin 2 mx_0}{4 \text{ sh}^2 mh} & \left[\frac{-6 \text{ sh } 2 mh - 4 mh + \text{ch } 2 mh (6 mh - \text{sh } 2 mh)}{\text{sh } 2 mh + 2 mh} + \text{th}^2 mh \text{ ch } 2 mh \right]
 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 y = - & \left[(a_1 - a_2) \cos mx_0 \cos kt + (a_1 + a_2) \sin mx_0 \sin kt \right] \\
 - \frac{m}{2 \text{ th } mh} & \left[a_1^2 + a_2^2 + \frac{3}{2} \frac{(a_1^2 + a_2^2) \cos 2 kt \cos 2 mx_0 + (a_1^2 - a_2^2) \sin 2 mx_0 \sin 2 kt}{\text{sh}^2 mh} \right] \\
 + \frac{ma_1 a_2}{\text{th } mh} & \left[\cos 2 kt - \frac{\cos 2 mx_0}{2 \text{ ch}^2 mh} \right]
 \end{aligned} \quad (2)$$

Clapotis parfait :

$$\begin{aligned}
 x = x_0 + \frac{2a}{\text{th } mh} \sin kt \cos mx_0 - \frac{m a^2}{4 \text{ sh}^2 mh} & \left\{ \frac{(2 \text{ ch } 2 mh + 1)}{\text{sh}^2 mh} \cos 2 kt \sin 2 mx_0 \right. \\
 - \sin 2 mx_0 & \left[\frac{-6 \text{ sh } 2 mh - 4 mh + \text{ch } 2 mh (6 mh - \text{sh } 2 mh)}{\text{sh}^2 mh + 2 mh} + \text{th}^2 mh \text{ ch } 2 mh \right] \Big\}
 \end{aligned}$$

$$y = -2a \sin mx_0 \sin kt - \frac{m a^2}{\text{th } mh} \left[1 + \cos 2 kt + \frac{\cos 2 mx_0}{2 \text{ sh}^2 mh} + \frac{3}{2} \frac{\cos 2 kt \cos 2 mx_0}{\text{sh}^2 mh} \right]$$

EQUATION EXPLICITE DE LA SURFACE LIBRE DU CLAPOTIS PARTIEL

Les formules paramétriques (1) et (2) conviennent mal pour une étude détaillée de la surface libre; aussi avons-nous recherché une équation explicite de la surface libre.

Pour obtenir la cote vraie en x_0 , à partir de la cote y donnée par (2) au point x et non x_0 , nous devons rajouter à cette dernière cote l'expression $-(x - x_0) \frac{dy}{dx_0}$ qui fait intervenir la pente $\frac{dy}{dx_0}$ et l'écart $x - x_0$; nous avons ainsi :

$$\begin{aligned}
 x - x_0 &= \frac{1}{\text{th } mh} \left[(a_1 - a_2) \sin kt \cos mx_0 - (a_1 + a_2) \cos kt \sin mx_0 \right] \\
 \frac{dy}{dx_0} &= -m \left[-(a_1 + a_2) \sin mx_0 \cos kt + (a_1 - a_2) \cos mx_0 \sin kt \right] - (x - x_0) \frac{dy_0}{dx_0} \\
 &= \frac{m}{2 \text{ th } mh} \left[a_1^2 + a_2^2 + (a_1^2 + a_2^2) \cos 2 mx_0 \cos 2 kt \right. \\
 &\quad \left. + 2 a_1 a_2 (-\cos 2 kt + \cos 2 mx_0) - (a_1^2 - a_2^2) \sin 2 mx_0 \sin 2 kt \right]
 \end{aligned}$$

et nous obtenons ainsi l'équation explicite de la surface libre y en fonction de x_0 que nous pouvons rebaptiser x sans inconvénient :

$$y = -[(a_1 - a_2) \cos mx \cos kt + (a_1 + a_2) \sin mx \sin kt] + \frac{m a_1 a_2}{2 \operatorname{th} mh} (1 + \operatorname{th}^2 mh) \cos 2 mx \quad (3)$$

$$- \frac{m}{2 \operatorname{th} mh} \left(1 + \frac{3}{2 \operatorname{sh}^2 mh}\right) \left[(a_1^2 + a_2^2) \cos 2 kt \cos 2 mx + (a_1^2 - a_2^2) \sin 2 kt \sin 2 mx \right]$$

L'équation (3) est, comme les équations (1) et (2), le début d'un développement en série de puissance de a_1 et a_2 , mais nous croyons que la série (3) établie à partir des séries (1) et (2) est moins convergente que celle-ci. En tous les cas, du point de vue mathématique, l'équation (3) et les équations (1) et (2) ne sont pas équivalentes, mais ne doivent pas différer de termes d'ordre inférieur au troisième. Ces considérations interviennent surtout lorsque la cambrure devient importante et qu'il y a lieu de discuter la validité des équations précédentes.

MAXIMUM DE LA SURFACE LIBRE :

Le but de cette étude étant essentiellement de pouvoir, à partir de mesures expérimentales, déterminer les amplitudes a_1 et a_2 d'un clapotis partiel de période et de longueur d'onde déterminées, il nous faut tout d'abord déterminer en quels points ces mesures devront être faites, c'est-à-dire pour quelles valeurs de mx . La méthode classique consiste à faire deux séries de mesures, une aux ventres et une aux nœuds d'amplitude verticale. Ces nœuds et ventres sont définis par la propriété que l'amplitude verticale y est respectivement minimum et maximum; on sait que si l'on se limite aux théories du premier ordre ils sont définis par $mx = (\pi/2) \pm k\pi$ pour les ventres et $mx = 0 (\pm k\pi)$ pour les nœuds. Avec les théories du second ordre, on constate que les nœuds et les ventres répondant à la définition ci-dessus sont donnés par des valeurs de mx plus complexes, si bien que l'on a intérêt à abandonner la notion classique de nœud et de ventre, et à placer d'autorité les points de mesure en $mx = 0 (\pm k\pi)$ et $mx = (\pi/2) + k\pi$. Le repérage des points de la dernière famille est rendu physiquement possible par le fait, facile à démontrer, qu'ils correspondent à la position maximum maximorum d'altitude (et non d'amplitude) atteinte par le profil. Leur repérage à la pointe est donc en principe facile. Les points de la série $mx = 0 (\pm k\pi)$ se déduisent des précédents par des translations de $L/4$.

ETUDE DE LA VARIATION DE NIVEAU EN $mx = (\pi/2)(1 + 2k)$.

Nous commencerons donc par étudier la variation de niveau en $mx = (\pi/2)(1 + 2k)$ en fonction du temps. Nous remarquerons que nous obtiendrons le même résultat en $mx = -(\pi/2)(1 + 2k)$ avec un déphasage dans le temps de $kt = \pi$.

Nous avons :

$$y = -(a_1 + a_2) \sin kt + \frac{m}{2 \operatorname{th} mh} \left(1 + \frac{3}{2 \operatorname{sh}^2 mh}\right) (a_1^2 + a_2^2) \cos 2 kt - \frac{m a_1 a_2}{2 \operatorname{th} mh} (1 + \operatorname{th}^2 mh)$$

Les maxima et minima sont alors donnés par :

$$y' = 0 = -(a_1 + a_2) \cos kt - \frac{2m}{\operatorname{th} mh} \left(1 + \frac{3}{2 \operatorname{sh}^2 mh}\right) (a_1^2 + a_2^2) \sin kt \cos kt$$

qui s'annule pour :

$$kt = \frac{3\pi}{2} \quad kt = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et } \sin kt = - \frac{(a_1 + a_2)}{\frac{2m}{\operatorname{th} mh} \left(1 + \frac{3}{2 \operatorname{sh}^2 mh}\right) (a_1^2 + a_2^2)} = N$$

Ces derniers extremums existent ou non suivant les valeurs des paramètres.

On peut montrer que lorsqu'ils existent, ce sont des maxima de y (c'est-à-dire des points bas) et qu'ils sont supérieurs aux maxima relatifs donnés par $kt = (3\pi/2)$.

Posons :

$$\beta = \frac{a_2}{a_1} \quad \frac{1}{z} = \frac{2\pi}{\text{th } mh} \left(1 + \frac{3}{2 \text{sh}^2 mh} \right) \text{ (fig. 1)} \quad \alpha_1 = \frac{a_1}{zL} \quad (3 \text{ bis})$$

FIG. 1

Nous pouvons tracer dans un plan a_1, β une courbe de délimitation de l'existence de sinus qui est :

$$\alpha_1 = \frac{1 + \beta}{1 + \beta^2} \quad (\text{fig. 2}). \quad (4)$$

Les maxima et minima de y sont alors les suivants :

$$y_{\min} \left(kt = \frac{\pi}{2} \right) = M_2 = -(a_1 + a_2) - \frac{m}{2 \text{th } mh} \left(1 + \frac{3}{2 \text{sh}^2 mh} \right) (a_1^2 + a_2^2) - \frac{m a_1 a_2}{2 \text{th } mh} (1 + \text{th}^2 mh)$$

$$y_{\max} \left(kt = \frac{3\pi}{2} \right) = M_1 = a_1 + a_2 - \frac{m}{2 \text{th } mh} \left(1 + \frac{3}{2 \text{sh}^2 mh} \right) (a_1^2 + a_2^2) - \frac{m a_1 a_2}{2 \text{th } mh} (1 + \text{th}^2 mh) \quad \text{si } N > 1$$

$$y_{\max} = M_3 = -(a_1 + a_2) N + \frac{m}{2 \text{th } mh} \left(1 + \frac{3}{2 \text{sh}^2 mh} \right) (a_1^2 + a_2^2) (1 - 2 N^2) - \frac{m a_1 a_2}{2 \text{th } mh} (1 + \text{th}^2 mh)$$

si $N < 1$

Si nous appelons A la variation de niveau à $mx = (\pi/2)$, nous avons :

$$A = |y_{\max} - y_{\min}|$$

Soit :

$$A = 2(a_1 + a_2) \quad \text{si } N > 1 \quad (5)$$

et :

$$A = (a_1 + a_2) (1 - N) + \frac{m}{\text{th } mh} \left(1 + \frac{3}{2 \text{sh}^2 mh} \right) (a_1^2 + a_2^2) (1 - N^2) \quad \text{si } N < 1$$

ce qui donne, en remplaçant N par sa valeur :

$$A = 2(a_1 + a_2) + \frac{\left[a_1 + a_2 - \frac{2m}{\text{th } mh} (a_1^2 + a_2^2) \left(1 + \frac{3}{2 \text{sh}^2 mh} \right) \right]^2}{\frac{4m}{\text{th } mh} (a_1^2 + a_2^2) \left(1 + \frac{3}{2 \text{sh}^2 mh} \right)} \quad (6)$$

ETUDE DE LA VARIATION DE NIVEAU EN $mx = k\pi$.

Remarquons, comme précédemment, que l'on aurait aussi bien pu étudier la variation de niveau en $mx = \pi$.

Nous avons, pour $mx = 0$:

$$y = -(a_1 - a_2) \cos kt - \frac{m}{\text{th } mh} \left(1 + \frac{3}{2 \text{sh}^2 mh} \right) (a_1^2 + a_2^2) \cos 2kt + \frac{m a_1 a_2}{2 \text{th } mh} (1 + \text{th}^2 mh)$$

FIG. 2

Les maxima et minima ont lieu pour $y' = 0$, c'est-à-dire :

$$kt = 0, \quad kt = \pi \quad \text{et} \quad \cos kt$$

$$= - \frac{a_1 - a_2}{\frac{2m}{\text{th } mh} \left(1 + \frac{3}{2 \text{sh}^2 mh} \right) (a_1^2 + a_2^2)} = P$$

Comme précédemment, la courbe d'existence du cosinus peut être tracée dans le plan α_1, β ; elle a pour équation :

$$\alpha_1 = \frac{1 - \beta}{1 + \beta^2} \quad (\text{fig. 2}). \quad (7)$$

Les maxima et minima de y sont alors les suivants :

$$\begin{aligned} y_{\max}(kt = 0) &= M_6 = -(a_1 - a_2) - \frac{m}{2 \text{th } mh} \left(1 + \frac{3}{2 \text{sh}^2 mh} \right) (a_1^2 + a_2^2) + \frac{m a_1 a_2}{2 \text{th } mh} (1 + \text{th}^2 mh) \\ y_{\min}(kt = \pi) &= M_5 = (a_1 - a_2) - \frac{m}{2 \text{th } mh} \left(1 + \frac{3}{2 \text{sh}^2 mh} \right) (a_1^2 + a_2^2) + \frac{m a_1 a_2}{2 \text{th } mh} (1 + \text{th}^2 mh) \quad \text{si } P > 1 \\ y_{\min}(\cos kt = P) &= M_4 = -(a_1 - a_2) P + \frac{m a_1 a_2}{2 \text{th } mh} (1 + \text{th}^2 mh) \\ &\quad - \frac{m}{2 \text{th } mh} \left(1 + \frac{3}{2 \text{sh}^2 mh} \right) (a_1^2 + a_2^2) (2P^2 - 1) \quad \text{si } P < 1 \end{aligned}$$

Si on appelle B la variation de niveau à $mx = 0$, nous avons :

$$B = |y_{\max} - y_{\min}|$$

$$B = 2(a_1 - a_2) \quad \text{si } P > 1 \quad (8)$$

$$B = (a_1 - a_2)(1 - P) + \frac{m}{\text{th } mh} \left(1 + \frac{3}{2 \text{sh}^2 mh}\right) (a_1^2 + a_2^2)(P^2 - 1) \quad \text{si } P < 1$$

Où en remplaçant P par sa valeur :

$$B = 2(a_1 - a_2) + \frac{\left[a_1 - a_2 - \frac{2m}{\text{th } mh} (a_1^2 + a_2^2) \left(1 + \frac{3}{2 \text{sh}^2 mh}\right) \right]^2}{\frac{4m}{\text{th } mh} (a_1^2 + a_2^2) \left(1 + \frac{3}{2 \text{sh}^2 mh}\right)} \quad (9)$$

ABAQUES

Nous pouvons maintenant construire des abaques donnant, à partir des mesures expérimentales A et B, l'amplitude a_1 et l'amplitude a_2 ou le coefficient de réflexion $\beta = a_2/a_1$; pour ceci nous nous servirons des formules 5, 6, 8 et 9 donnant A et B en fonction de a_1 et a_2 .

En examinant le plan α_1, β , nous déterminons trois groupes de formules suivant que nous sommes de part et d'autre des courbes définies par (4) et (7) délimitant l'existence des sinus et des cosinus, définies précédemment. Nous appellerons ces divers cas zone I, II et III.

Pour pouvoir représenter les résultats par une seule famille de courbes, nous poserons :

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{\alpha L} \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{\alpha L}$$

et les formules précédentes deviennent après transformation, pour la :

ZONE I

$$\frac{A}{\alpha L} = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 (1 + \beta) \quad (10)$$

$$\frac{B}{\alpha L} = \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_1 (1 - \beta) \quad (11)$$

ZONE II

$$\frac{A}{\alpha L} = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 (1 + \beta) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{B}{\alpha L} &= \alpha_1 - \alpha_2 + \frac{[\alpha_1 - \alpha_2 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)]^2}{4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \\ &= \alpha_1 (1 - \beta) + \frac{[1 - \beta - \alpha_1 (1 + \beta^2)]^2}{4(1 + \beta^2)} \end{aligned} \quad (13)$$

ZONE III

$$\begin{aligned} \frac{A}{\alpha L} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{[\alpha_1 + \alpha_2 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)]^2}{4(\alpha_1^2 + \beta^2)} \\ &= \alpha_1 (1 + \beta) + \frac{[1 + \beta - \alpha_1 (1 + \beta^2)]^2}{4(1 + \beta^2)} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{B}{\alpha L} &= \alpha_1 - \alpha_2 + \frac{[\alpha_1 - \alpha_2 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)]^2}{4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \\ &= \alpha_1 (1 - \beta) + \frac{[1 - \beta - \alpha_1 (1 + \beta^2)]^2}{4(1 + \beta^2)} \end{aligned} \quad (15)$$

Nous pensons que la manière la plus utile pour représenter abaques les formules précédentes est de porter :

en abscisse :

$$D = \frac{A}{2\alpha L} + \frac{B}{2\alpha L}$$

et en ordonnée :

$$R = \frac{A - B}{A + B}$$

Nous avons alors pour les différentes zones les formules suivantes, qui ont été mises en abaques dans la figure 3 :

ZONE I

$$D = \alpha_1 \quad (16)$$

$$R = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \beta \quad (17)$$

Fig. 3

ZONE II

$$D = \alpha_1 + \frac{[1 - \beta - \alpha_1 (1 + \beta^2)]^2}{8(1 + \beta^2)} \quad (18)$$

$$R = \frac{2\alpha_1\beta - \frac{[1 - \beta - \alpha_1 (1 + \beta^2)]^2}{4(1 + \beta^2)}}{2\alpha_1 + \frac{[1 - \beta - \alpha_1 (1 + \beta^2)]^2}{4(1 + \beta^2)}} \quad (19)$$

ZONE III

$$D = \alpha_1 + \frac{1}{4} [(1 - \alpha_1)^2 + \alpha_1^2 \beta^2] \quad (20)$$

$$R = \frac{\beta \left(\alpha_1 + \frac{1}{1 + \beta^2} \right)}{2\alpha_1 + \frac{1}{2} [(1 - \alpha_1)^2 + \alpha_1^2 \beta^2]} \quad (21)$$

Les courbes délimitant les zones s'écrivent alors :

zone I, zone II :

$$D = \frac{1 - R}{1 + R^2} \quad (22)$$

zone II, zone III :

$$D = \frac{2 + 2\beta + \beta^2}{2(1 + \beta^2)} \quad R = \frac{\beta(2 + \beta)}{2 + 2\beta + \beta^2} \quad (23)$$

Nous remarquerons d'autre part que la courbe $\beta = 1$ est dans la zone II :

$$D = \frac{8(1 - R)}{(1 + R)^2}$$

et dans la zone III :

$$R = \frac{1}{2D} \sqrt{2D - \frac{1}{4}}$$

Nous constatons que les formules applicables à la zone I sont les mêmes que celles bien connues obtenues en ne tenant compte que des termes de premier ordre.

De façon à rendre plus précise la lecture du graphique, il nous a alors paru utile de tracer dans les zones II et III non les courbes $\alpha_1 = C^{te}$ et $\beta = C^{te}$, mais des courbes donnant les valeurs relatives :

$$\nu = \frac{\alpha_1}{D} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\beta_1}{R}$$

En effet, on obtient ainsi directement la valeur des coefficients de correction qui sont voisins de l'unité dans la région où l'on utilisera le plus les abaques, c'est-à-dire principalement dans la zone II.

Dans la zone I, nous avons évidemment :

$$\mu = 1 \quad \nu = 1$$

COURBES $\mu = C^{te}$:

(Fig. 4)

En partant des équations précédentes et en éliminant $\alpha_1 \beta \nu$, nous obtenons :

Fig. 4

ZONE II

$$D = \frac{R\mu + 1}{(R+1)(R^2\mu^2 + 1)} \left\{ 1 - R\mu + \frac{4R(\mu-1)}{R+1} \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{8(\mu-1)R}{R+1} \left[\frac{2(\mu-1)R}{1+R} + 1 - R\mu \right]} \right\}$$

ZONE III

$$D = \frac{\mu^2 [1 + \sqrt{1 - R^2}]}{2(1 + R^2\mu^2)}$$

où nous avons évidemment $\mu > 1$

COURBES $\nu = C^{te}$:

Si au lieu d'éliminer ν , nous éliminons μ , nous obtenons :

ZONE II

$$D = \frac{3 - R - 2\nu \pm \sqrt{8(1-R)(1-\nu)}}{2\nu^2 - 2\nu(R+1) + (R+1)^2}$$

ZONE III

$$R = \frac{D(4-\nu) - 1}{2D[2D(2-\nu) - 1]} \sqrt{-D^2\nu^2 + 2D(2-\nu) - 1}$$

avec évidemment : $\nu < 1$.

Nous nous sommes limités à $D < 8$ pour les

courbes précédentes en supposant que pour $D > 8$ nous aurions des cambrures et des longueurs relatives trop importantes mettant en cause la validité des équations utilisées.

CONCLUSION ET MODE D'EMPLOI DES ABAQUES.

En résumé, nous avons établi les formules et les abaques au deuxième ordre près permettant, à partir de mesures expérimentales, de calculer les amplitudes de deux houles régulières de même fréquence et de sens de propagation opposée, autrement dit du clapotis partiel.

A partir de la mesure de la profondeur d'eau au repos h , de la longueur d'onde L nous calculons tout d'abord le paramètre sans dimension α donnée soit par la figure 1, soit par la formule 3 bis. Ensuite, à partir des mesures de A , différence d'altitude entre crête et creux pris au point d'altitude maximum, et de B , différence d'altitude entre crête et creux pris à un point distant de $L/4$ du point précédent, nous formons les quantités :

$$D = \frac{A}{2\alpha L} + \frac{B}{2\alpha L} \quad \text{et} \quad R = \frac{A-B}{A+B}$$

Nous pouvons alors soit nous servir de la figure 3, soit de la figure 4. Avec la figure 3, nous lisons $\beta = (a_1/a_2)$ et $\alpha_1 = (\alpha_1/\alpha L)$ où α_1 et α_2 sont les amplitudes recherchées des deux houles incidentes ou réfléchies. Avec la figure 4, nous lisons le nombre μ qui nous permet d'avoir $a_1/a_2 = \beta$ par la relation $\beta = \mu R$.