Le calcul du mouvement non permanent dans les rivières par la méthode dite des "Lignes d'influence"

Calculation of non permanent flow in rivers by the method known as "influence Lines"

Note sur l'exactitude des résultats

Note on the accuracy of the results

PAR H. HOLSTERS

Le mouvement non permanent en rivière, ses équations fondamentales, en négligeant les termes d'inertie secondaires, leur résolution par les méthodes aux différences finies : les méthodes exactes, la méthode simplifiée dite des lignes d'influence. — Les répercussions du choix, arbitraire, d'une profondeur moyenne et d'une célérité sur l'évolution calculée d'un profil d'onde élémentaire, puis de courbes de marée : le choix d'une profondeur trop grande régularise le profil sans en modifier la forme générale; le choix d'une profondeur trop faible conduit à des oscillations rapidement divergentes. — Exemples de calcul. — Influence des termes d'inertie secondaires.

Non-permanent flow in rivers; its fundamental equations, ignoring secondary terms of inertia; their solution by methods of finite differences : exact methods; simplified method called "influence lines". Repercussions of the arbitrary choice of mean depth and of velocity on the calculated evolution, firstly of an elementary wave profile, secondly of tidal curves : choice of a too large depth regularises the profile without modifying the general form : choice of a too small depth leads to rapidly diverging oscillations. Examples of calculation. Influence of secondary terms of inertia.

I. — Introduction.

De nombreuses méthodes ont déjà été proposées pour résoudre le problème du mouvement non permanent dans les rivières, notamment pour le cas des marées fluviales.

La comparaison des résultats obtenus par les différentes méthodes montre de plus en plus que les méthodes basées sur la théorie des caractéristiques donnent des résultats exacts. Certaines considérations pourraient même faire croire que ces méthodes sont les seules à pouvoir donner un bon résultat. Ce problème s'est d'ailleurs déjà posé immédiatement après la pu-

blication de MASSAU (1) en 1901 et a donné lieu à une longue polémique, restée d'ailleurs sans conclusion bien nette.

En examinant les publications plus récentes de CRAYA, RÉ et SCHÖNFELD, qui sont basées sur la théorie exacte des caractéristiques, des doutes pourraient même surgir quant à l'exactitude

(1) Pour une liste d'études consacrées au mouvement non permanent, spécialement en ce qui concerne la théorie des caractéristiques, nous renvoyons à la bibliographie annexée à l'étude de SCHÖNFELD : « Propagation of Tides and Similar Waves », Staatsdrukkerij- en Uitgeversbedrijf, La Haye, 1951.

des méthodes simplifiées, telles que celle dite des « lignes d'influence » (2).

Le but de la présente note est d'étudier les erreurs découlant des simplifications introduites dans cette dernière méthode.

II. — Equations de mouvement.

Le mouvement non permanent est régi par deux équations : l'équation « dynamique » et l'équation de « continuité ».

En prenant comme fonctions inconnues le débit q et la hauteur d'eau h par rapport à un plan de comparaison horizontal, ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{1}{gBH} \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{q|q|}{C^2 B^2 H^3} \quad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = - B \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2)$$

B étant la largeur en surface, H la profondeur moyenne, c'est-à-dire la section mouillée divisée par la largeur en surface et C le coefficient de CHEZY. Dans ces équations, nous ne tenons pas compte des termes d'inertie secondaires.

Sauf spécification contraire, nous raisonnons dans ce qui suit comme si les termes d'inertie secondaires n'existaient pas.

III. — Méthodes générales de résolution.

On distingue d'abord deux grandes catégories : les méthodes analytiques et les méthodes par différences finies.

Dans la première catégorie, les méthodes basées sur l'analyse harmonique sont les plus intéressantes. Au prix d'une schématisation très poussée, LORENTZ a élaboré une méthode qui permet de calculer assez rapidement la composante fondamentale de la marée. Mais la représentation de la marée par cette seule composante est assez rudimentaire. Elle ne permet pas, par exemple, de se rendre compte de la propagation plus rapide des marées hautes que celle des marées basses.

Les méthodes plus perfectionnées de MAZURE, DRONKERS et SCHÖNFELD permettent d'introduire les composantes d'ordre supérieur. Mais les calculs deviennent rapidement très compli-

qués quand le nombre d'harmoniques augmente ; pourtant, dans la plupart des cas, il en faut beaucoup pour se rapprocher de la forme exacte des courbes naturelles.

Pour atteindre une plus grande précision, il faut faire appel aux méthodes de la deuxième catégorie. En effet, on peut ici, en principe, se rapprocher autant que l'on veut de la solution exacte, en prenant des différences ou intervalles suffisamment petits.

Les équations (1) et (2) sont des relations entre les dérivées par rapport au temps des fonctions h et q , et leurs dérivées par rapport aux abscisses. Connaissant les dérivées par rapport au temps, on peut calculer les dérivées par rapport aux abscisses et inversement. Dès lors, on distingue de nouveau deux subdivisions :

a) CALCUL SUIVANT L'AXE DES x . — On part des courbes $h(t)$ et $q(t)$ à l'embouchure ($x = 0$). On en déduit les dérivées par rapport au temps en mesurant l'inclinaison des tangentes. Par les relations (1) et (2), on calcule les dérivées par rapport aux x . On passe finalement aux différences finies Δx , ce qui permet de constituer point par point les courbes h et q dans la section d'abscisse Δx .

b) CALCUL SUIVANT L'AXE DES t . — On applique les mêmes principes, mais en remplaçant x par t . On part donc d'une situation initiale $h(x)$, $q(x)$ à l'instant $t = 0$ et on en déduit la situation à l'instant Δt .

Les méthodes de la première catégorie se heurtent à une difficulté fondamentale. Considérons, par exemple, le cas de la marée fluviale qui est déterminée à l'aval par le niveau de la mer et à l'amont par le débit d'amont. Le débit à l'embouchure n'étant donc pas une donnée du problème, il faudra partir avec une courbe estimée et essayer de retrouver à l'extrémité amont le débit amont constant. Il est clair que même un calculateur expérimenté n'arrivera au bon résultat qu'après bien des tâtonnements.

La seconde catégorie ne présente pas cet inconvénient. En effet, la situation initiale, tant du point de vue des hauteurs d'eau que des débits, est toujours connue s'il s'agit d'un mouvement apériodique. Dans le cas d'une marée-tempête, par exemple, ce sera la fin de la marée normale précédente. Si, par contre, le régime étudié est purement périodique, la situation initiale est arbitraire. On peut, par exemple, prendre un régime permanent quelconque. Dans tous les cas, l'influence de la situation initiale disparaîtra par le jeu des résistances de frottement et par la répétition périodique de la courbe marégraphique à l'embouchure.

(2) H. HOLSTERS. — « Le calcul du mouvement non permanent dans les rivières par la méthode dite des lignes d'influence ». *Revue générale de l'Hydraulique*, janvier à octobre 1947.

J. LAMOEN. — « Tides and Current Velocities in a Sea-Level Canal ». *Engineering*, July 29, 1949.

IV. — Calcul par différences finies suivant l'axe des temps.

Une des méthodes possibles de la catégorie mentionnée en dernier lieu est la suivante :

On considère dans le plan (x, t) les cinq points A, P, O, F et K (voir figure 1).

FIG. 1

Les variables x , t , h et q ont respectivement les valeurs suivantes :

Au point K :	x	t	h	q
Au point A :	$x - L$	t	h_a	q_a
Au point O :	$x + L$	t	h_o	q_o
Au point P :	x	$t - T$	h_p	q_p
Au point F :	x	$t + T$	h_f	q_f

Appliquons les équations de mouvement (1) et (2) au point K, en introduisant des différences finies Δx et Δt , pour lesquelles nous prenons :

$$\Delta x = x_o - x_a = 2L$$

$$\Delta t = t_f - t_p = 2T$$

Nous obtenons deux relations où figurent h_a , h_o , h_f , q_a , q_o , q_f , q_p . En résolvant celles-ci par rapport à q_f et h_f on trouve deux formules simples (voir Ann. I, 8) de la forme :

$$q_f = f(q_p, h_a, h_o) \quad (3)$$

$$h_f = g(h_p, q_a, q_o) \quad (4)$$

Ces deux relations permettent de calculer les fonctions h et q de la façon suivante :

Considérons la figure 2 qui représente le plan (x, t) . Le plan est divisé par des lignes horizontales correspondant aux instants $t = 0$, $t = T$, $t = 2T$, etc., et par des lignes verticales correspondant aux sections d'entredistance L . La section $x = 0$ passe par l'embouchure du fleuve, la section A_7 représente l'extrémité amont du fleuve.

Supposons connu le débit au point A_3 , et la cote aux points B_2 et B_4 . La formule (3) donne alors directement le débit en C_3 . De la même façon, on peut déterminer le débit en C_1 et C_5 . Le

débit en C_7 ne doit pas être calculé, car c'est une donnée du problème.

Connaissant maintenant les débits au moment $t = 2T$, la formule (4) permet de déterminer les cotes au moment $t = 3T$, à l'exception de la cote à l'embouchure qui est une donnée du problème.

En répétant le même procédé, on arrive ainsi à calculer progressivement toutes les cotes dans les sections paires aux instants impairs (T , $3T$, $5T$, etc.) et tous les débits dans les sections impaires aux instants paires.

Jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune simplification dont l'effet ne puisse être rendu négligeable en prenant les intervalles L et T suffisamment petits (en dehors de ce qui a été dit au sujet des termes d'inertie secondaires).

Il semble donc que le procédé esquissé doive donner la solution exacte des équations de mouvement dans le cas où les termes d'inertie secondaires sont négligeables, quelle que soit la valeur relative des intervalles T et L , pourvu que ces intervalles soient suffisamment petits.

V. — Lignes d'influences.

Revenons à la figure 2.

Le débit en E_3 dépend des cotes en D_2 et D_4 , et du débit en C_3 . Disons plus simplement que le point E_3 dépend des points D_2 , D_4 et C_3 . De même D_2 dépend de C_1 , C_3 et B_2 , et ainsi de suite.

Il en résulte finalement que E_3 est déterminé par toute la zone limitée par les lignes inclinées $B_0 E_3$ et $E_3 A_7$. Cette zone constitue le « passé » de E_3 , c'est-à-dire l'ensemble des points qui ont pu influencer E_3 . Un raisonnement analogue conduit à considérer la zone au-dessous de $H_0 E_3 H_6$ comme le « futur » de E_3 , c'est-à-dire la zone qui sera influencée par ce point.

De plus, on voit que le point B_0 , par exemple, intervient uniquement dans le calcul de tout ce qui se trouve au-dessous de la ligne $B_0 H_6$; de même, le point A_7 intervient uniquement au-dessus de $A_7 H_0$ et pas au-dessous.

Cela signifie, en d'autres termes, que les lignes telles que $B_0 H_6$ et $A_7 H_0$ délimitent les zo-

FIG. 2

nes d'influence émanant des points tels que B_0 et A_7 , ou encore que ces lignes inclinées représentent des trajectoires de propagation d'influence, ou simplement des lignes d'influence.

Or, l'inclinaison de ces lignes vaut $T:L$, ce qui correspond à une célérité $V = \pm (L/T)$, déterminée par une profondeur fictive H' d'après la formule $V = \sqrt{gH'}$, le signe (+) valant pour la propagation vers l'amont, le signe (—) pour la propagation vers l'aval.

Il résulte de tout cela qu'en appliquant la méthode du paragraphe IV avec des intervalles L et T arbitraires, nous supposons que les influences se propagent avec la célérité V' également arbitraire.

Ce résultat est en contradiction avec la théorie des caractéristiques. En effet, d'après cette théorie, les influences ont la célérité bien déterminée $V = \pm \sqrt{gH}$, H étant la profondeur moyenne locale, quand on fait abstraction de la vitesse du courant.

Pour concilier les deux conceptions, il semble suffisant de prendre V' égal à V . Mais la célérité V est variable dans le temps; dans le cas de la marée fluviale, par exemple, elle est plus grande à marée haute qu'à marée basse.

Dès lors, il devient impossible, en toute rigueur, de construire un réseau dont tous les points sont bien alignés verticalement et horizontalement.

Dans la méthode des lignes d'influence, on se contente d'un compromis. On applique les formules (3) et (4) à un réseau déterminé par la célérité $V' = V_m$, correspondant à la profondeur moyenne H_m . Dans le cas de la marée fluviale, par exemple, ce sera la profondeur sous la cote de mi-marée.

De cette façon, la construction d'un réseau régulier devient possible, tout en ne s'écartant pas trop de la célérité réelle.

Néanmoins, il peut subsister un doute quant à l'exactitude des calculs. Dans ce qui suit, nous essayerons de déterminer la nature et l'ordre de grandeur des erreurs possibles.

VI. — Application de la méthode au cas d'une onde élémentaire.

Nous considérons d'abord un onde élémentaire sans frottement.

Soit un canal de longueur infinie et de section rectangulaire. La pente de fond est nulle. L'eau est initialement immobile et le niveau libre correspond à la cote 0. Supposons, pour fixer les idées, que la profondeur H soit de 5 m.

Nous provoquons à l'embouchure du canal une onde triangulaire. Le niveau monte par exemple à partir de $t = 0$ pendant 20 minutes

pour atteindre la cote +10 centimètres, et redescend graduellement après pour retomber à 0 après 40 minutes.

Il en résulte une onde de translation se propageant vers l'amont. Comme il n'existe aucun facteur qui puisse influencer ni la célérité ni la forme de l'onde, nous retrouverons la même variation de niveau triangulaire dans un endroit x après le temps x/V (en négligeant toujours les termes d'inertie secondaire).

Si on calcule ce mouvement au moyen de la méthode des lignes d'influence, en prenant pour H' la valeur exacte H on arrive à un résultat exact.

Si l'on prend une profondeur $H' = \mu H$ différente de la valeur exacte, les courbes calculées ne coïncident plus avec les courbes réelles.

La figure 3 se rapporte à un calcul fait avec $\mu = 1,11$ et avec un intervalle de temps $T = 10$ minutes. En trait plein, nous avons dessiné la courbe réelle, tandis que le trait pointillé repré-

FIG. 3

sente la courbe calculée. La première manifestation de l'onde calculée arrive un peu trop tôt. La hauteur du corps de l'onde est un peu trop petite. L'onde calculée est suivie d'une série d'oscillations convergentes.

L'inverse se produit quand nous prenons H' trop petit. La figure 4 montre une onde calculée avec $\mu = 0,90$. Cette fois, la première manifestation arrive trop tard. L'onde elle-même est trop haute; elle est suivie d'une série d'oscillations divergentes.

FIG. 4

Considérons maintenant la même onde élémentaire, mais avec frottement, en supposant dans le canal un mouvement uniforme.

Les figures 5 et 6 montrent le comportement de l'onde calculée dans ce cas, pour les valeurs $\mu = 1,11$ et $\mu = 0,90$.

FIG. 5

FIG. 6

En comparant ces figures avec les figures correspondantes 3 et 4, on constate que le frottement réduit sensiblement l'écart entre le calcul et la réalité.

VII. — Influence des ondes élémentaires sur la forme des courbes-marées.

Dans le calcul de la marée fluviale, on se donne le débit d'amont et la courbe-marée à l'embouchure, et on applique les équations (3) et (4) à un réseau de lignes d'influence basé sur la célérité V_m correspondant à la profondeur H_m sous mi-marée.

Considérons, pour simplifier, le cas où le débit d'amont est nul. Prenons comme condition aval la courbe sinusoïdale représentée à la figure 7, et comme plan de comparaison la cote de mi-marée à l'embouchure.

Les conditions initiales étant arbitraires, nous prenons $h = 0$ et $q = 0$ au moment $t = 0$.

Au lieu de considérer la sinusoïde en son entier comme on le ferait normalement, on peut la décomposer en ondes élémentaires, dessinées en pointillé. Ces ondes élémentaires seront positives au-dessus de la mi-marée, et négatives en dessous.

On pourrait alors calculer de la façon suivante. On détermine d'abord le régime correspondant à la première onde élémentaire. Puis on superpose à ce régime la deuxième onde élémentaire. On continue de la même façon, toujours en superposant la $(n)^{\text{ième}}$ onde au régime

résultant de l'ensemble des $(n-1)$ ondes précédentes (voir fig. 7).

On conçoit qu'après avoir répété ce procédé un très grand nombre de fois, on aura trouvé le régime de la marée complète.

FIG. 7

Il est évident que ces calculs seraient beaucoup plus compliqués que ceux qui ont conduit aux formes des figures 3, 4, 5 et 6, à part pour la toute première onde. Néanmoins, il est très probable que la distinction fondamentale — oscillations convergentes ou divergentes — subsistera plus ou moins dans les ondes élémentaires, et également dans les courbes formées par leur superposition.

En supposant que tous les calculs soient établis sur un réseau déterminé par la cote de mi-marée, ils donneront des ondes élémentaires pour la partie positive de l'onde-marée qui se propageront dans un milieu où les profondeurs réelles sont plus grandes que la profondeur moyenne. Pour ces ondes, le coefficient μ sera donc plus petit que l'unité, et leur forme sera analogue à celle des figures 4 ou 6, donc des oscillations plus ou moins divergentes.

La situation sera inverse pour les ondes de la partie négative de la courbe-marée, où le coefficient μ sera plus grand que l'unité. Ici, on pourra s'attendre à des oscillations convergentes qui, par superposition, donneront des courbes plus ou moins régulières.

VIII. — Forme des courbes-marées pour différentes valeurs de μ .

Comme exemple de calcul, nous prenons le régime de marée étudié par MEYER et SCHULTZ (3) pour le nouveau projet du Canal de Panama. Nous reprenons les données numériques de l'article déjà mentionné de LAMOEN, tout en introduisant quelques simplifications. Les calculs, qui sont très faciles à exécuter, sont détaillés à l'annexe I.

(3) J. S. MEYER and S. A. SCHULTZ. — « Tidal Currents », *Proceedings, American Society of Civil Engineers*, April 1948 (Panama Canal Number).

FIG. 8

Nous les avons faits dans trois hypothèses différentes.

Dans la première hypothèse, la profondeur $H' = 20$ m, qui détermine le réseau des lignes d'influence, correspond sensiblement au niveau de mi-marée. L'amplitude moyenne étant d'environ 3 m et la profondeur sous mi-marée 19,50 m, le coefficient μ varie entre $20/21 = 0,95$ à marée haute et $20/18 = 1,11$ à marée basse.

La figure 8 montre la courbe-marée calculée dans la section médiane du canal. Dans la partie positive, on retrouve bien les oscillations que l'étude des ondes élémentaires avait laissé prévoir. Ces oscillations deviennent assez fortes aux environs de l'étiage, et sont ensuite graduellement

amorties par les frottements. Dans la partie négative de la courbe, on constate quelques irrégularités après l'étiage, qui disparaissent assez rapidement.

Si les conclusions du paragraphe VII sont exactes, les oscillations doivent s'atténuer quand on calcule avec une profondeur H' plus grande que la profondeur à marée haute, μ étant alors systématiquement plus grand que l'unité.

Nous avons refait les calculs en prenant $H' = 44,50$ m. Le rapport μ varie alors entre 2,12 à marée haute et 2,47 à marée basse.

Nous trouvons alors la courbe représentée à la figure 9 (trait plein). Cette courbe est identique à celle de la figure 8 (indiquée en trait

FIG. 9

mince) pour tous les besoins de la pratique. L'écart quadratique moyen est de moins 1 % de l'amplitude.

La seule différence marquante c'est que les oscillations ont pratiquement disparu.

Le fait de calculer avec des profondeurs H' , ou avec des célérités V' trop grandes, rend donc les courbes plus régulières, mais ne change rien à leur forme générale.

Si, pour des célérités trop grandes, les courbes deviennent plus régulières, elles doivent devenir plus irrégulières avec des célérités trop petites.

Nous avons donc refait le calcul en prenant $H' = 11,20$ m, ce qui donne $\mu = 0,53$ à marée haute et $0,62$ à marée basse. La courbe calculée, dessinée à la figure 9 en trait pointillé, présente des oscillations très rapidement divergentes, de façon que le calcul a dû être abandonné après quelques intervalles.

IX. — Perturbation des courbes-marée Influence de l'échelle.

Dans l'exemple du paragraphe précédent, les conditions aux limites sont des sinusoïdes, donc des courbes analytiques. On pourrait attribuer à

Fig. 10

Fig. 11

ce fait la bonne concordance des courbes calculées, une fois que la célérité moyenne adoptée correspond à une profondeur égale ou plus grande que la profondeur moyenne.

Supposons que la courbe-marée coté Pacifique soit coupée par une partie horizontale; de cette façon, la courbe ne reste plus analytique, mais présente deux discontinuités. La figure 10 montre, en même temps que la courbe-limite perturbée, l'effet de cette modification sur la courbe-marée dans la section médiane du canal, calculée avec $H' = 19,50$ m et $H' = 44,50$ m. La concordance reste toujours bonne.

Cette propriété ne subsiste pas quand la perturbation ne s'étend que sur un très petit nombre d'intervalles, et présente donc le caractère d'une discontinuité locale, telle que celle représentée à la figure 11. La comparaison des courbes calculées montre que, avec une profondeur trop grande, la discontinuité locale tend à disparaître.

Mais il suffit alors de réduire les intervalles, pour que les résultats de calcul redeviennent exacts.

Pour montrer cela, retournons au cas de l'onde élémentaire sans frottement.

La figure 12 montre la forme d'une telle onde dans la section d'abscisse $2/L$, le calcul étant fait avec $\mu = 2,00$ et la période de l'onde étant $4 T$.

Les figures 12 b, 12 c et 12 d montrent comment la forme de l'onde, calculée à la même dis-

FIG. 12

tance de l'embouchure et avec le même rapport $\mu = 2,00$, varie lorsqu'on prend des intervalles de $T/2$, $T/4$ et $T/8$. A mesure que l'intervalle T devient plus petit par rapport à la période de l'onde, la courbe calculée se rapproche davantage de la courbe exacte.

X. — Influence des termes d'inertie secondaire.

Des formules de la forme (3) et (4) peuvent être établies lorsque les termes d'inertie secondaire ne sont pas négligés dans les équations de mouvement (voir annexe II). Ces formules sont à utiliser sur un réseau dont le rapport L/T égale ou dépasse la célérité moyenne $\sqrt{g H_m}$.

Quand on tient compte des termes d'inertie secondaire, la célérité réelle vaut, d'après la théorie des caractéristiques, $V = \pm \sqrt{g H} + v$, v étant la vitesse du courant.

Dans les problèmes d'hydraulique fluviale, v est généralement petit par rapport à V . On commet donc une erreur relativement faible en ne tenant pas compte de la vitesse du courant dans le tracé du réseau.

Or, nous avons vu précédemment que l'on obtient des résultats exacts, même avec les déformations très importantes résultant du fait de

considérer des profondeurs beaucoup plus grandes que les profondeurs réelles.

Il est donc probable que la petite déformation supplémentaire ne compromettra pas l'exactitude des résultats. Nous le montrerons d'ailleurs par l'exemple de calcul du paragraphe suivant.

XI. — Calcul d'une marée en tenant compte des termes d'inertie secondaires.

Les données du calcul sont reprises de la publication déjà mentionnée de SCHÖNFELD (voir annexe III).

Il s'agit d'une marée réalisée dans un canal rectangulaire à pente de fond nulle. Le canal, de largeur 40 cm et de longueur 6 600 cm, est fermé à son extrémité amont. A l'extrémité aval, la marée a une amplitude d'environ 4 cm. La courbe-marée aval est représentée à la figure 13; elle a été légèrement régularisée (trait pointillé).

Les termes d'inertie secondaires sont assez importants. En considérant la moyenne des valeurs absolues, on trouve les rapports suivants :

$$\frac{\text{terme d'inertie principal}}{\text{terme de frottement}} = \frac{0,93}{1,00}.$$

$$\frac{\text{termes d'inertie secondaires}}{\text{terme de frottement}} = \frac{0,46}{1,00}.$$

Les calculs (voir annexe III) ont été effectués avec une profondeur H' de 13,5 cm, soit presque le double de la profondeur moyenne réelle, qui est d'environ 7 cm.

Néanmoins les courbes calculées concordent d'une façon remarquable avec les courbes réelles, comme le montrent les figures 14 et 15. La première figure se rapporte à une section située

FIG. 13

FIG. 14

à peu près au milieu du canal, tandis que la figure 15 montre une courbe-marée vers l'extrémité amont.

Il est à noter que, dans les deux cas, de petites translations verticales et horizontales donneraient une concordance presque parfaite.

La même remarque peut être faite pour le résultat des calculs de SCHÖNFELD, représenté par la figure 16, qui se rapporte à l'extrémité amont du canal.

Les translations suggérées par la position relative des courbes calculées et des courbes réelles ne dépassent pas les erreurs expérimentales possibles.

En comparant les figures 14, 15 et 16, nous pouvons conclure que la méthode des lignes d'influence, même en adoptant des célérités s'écartant sensiblement des célérités réelles, donne des résultats aussi satisfaisants que la méthode exacte de SCHÖNFELD.

FIG. 15

FIG. 16

XII. — Conclusion générale.

Le problème du mouvement non permanent dans les rivières peut être résolu en utilisant des formules très simples appliquées à un réseau dont tous les points sont bien alignés verticalement et horizontalement.

En toute rigueur, cette méthode doit donner lieu à des erreurs systématiques, parce qu'un tel réseau implique un mode de propagation des influences qui n'est jamais exactement conforme aux exigences de la théorie des caractéristiques.

Les considérations des paragraphes précédents conduisent aux conclusions suivantes :

a) Si le réseau est basé sur un rapport L/T correspondant à la profondeur moyenne, la forme générale des courbes calculées n'est pas modifiée.

Les courbes présentent parfois des irrégularités, faciles à éliminer par un tracé à main libre.

b) Si on prend une profondeur plus grande que la profondeur moyenne, ces irrégularités ont tendance à disparaître automatiquement, sans que l'allure générale des courbes ne change.

c) Si on prend des profondeurs plus petites, les irrégularités tendent à s'amplifier. Pour des profondeurs très petites, tout calcul devient impossible.

En résumant, nous pouvons donc conclure qu'aussi longtemps que le calcul donne un résultat satisfaisant, c'est-à-dire des courbes sans oscillations trop prononcées, ce résultat est exact. Ces oscillations peuvent d'ailleurs être évitées, d'abord en choisissant bien le rapport L/T , puis en prenant l'intervalle T suffisamment petit.

ANNEXE I

CALCUL DE LA MARÉE DANS UN CANAL DE PANAMA A COURANT LIBRE

A. — CALCUL AVEC : $H' = 20$ m

1. Unités : Mètres et secondes.

2. Longueur totale : 72.000 m.

3. Section rectangulaire : Profondeur sous mi-marée : $H_m = 19,50$ m; largeur : $B = 180$ m; pour simplifier les calculs, nous prendrons $B = 7,17$ m (voir 9 ci-dessous).

4. Intervalle de temps : $T = 430$ s.

5. Longueur élémentaire :

$$L = T\sqrt{gH'} = 430 \times \sqrt{9,81 \times 20} = 6.000 \text{ m}$$

6. Plan de comparaison : Niveau de mi-marée;

d'où :

$$H = H_m + h = 19,50 + h$$

7. Coefficient de CHÉZY : $C = 74 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$.

8. Formules à appliquer :

$$q_f = \frac{q_p + a(h_u - h_0)}{1 + k_p} \quad (3)'$$

$$h_f = h_p + \frac{q_u - q_0}{b} \quad (4)'$$

9. Coefficients :

$$a = \frac{g B H T}{L} = \frac{9,81 \times 7,17 \times 430}{6.000} \times H = \mathbf{5,03 H}$$

$$b = \frac{B L}{T} = \frac{7,17 \times 6.000}{430} = \mathbf{100}$$

$$c = \frac{C^2 B H^2}{2 g T} = \frac{74 \times 74 \times 7,17}{2 \times 9,81 \times 430} H^2 = \mathbf{4,65 H^2}$$

10. Conditions aux limites : Les cotes A (Atlantique) et P (Pacifique) aux instants $t = 0, 2T, 4T, \dots$
Les courbes A et P étant des sinusoïdes pures, il suffit de donner le premier quart de l'onde :

$t/T \dots \dots \dots$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
Cote P.	0	0,37	0,72	1,07	1,39	1,71	1,99	2,25	2,47	2,66	2,80	2,91	2,98	3,00
Cote A.	0,30	0,30	0,29	0,28	0,27	0,25	0,22	0,20	0,17	0,14	0,11	0,07	0,04	0,00

11. Exécution des calculs : Se fait d'après le schéma suivant qui se rapporte à la période 0 à 2 T :

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(2)'
A	0,30											0,30
1		0,13	0,20	19,70	99	13	236	1.800	1,130	220		
2	0,17										0,04	0,21
3		0,15	0,10	19,60	99	15	228	1.790	1,127	216		
4	0,02										0,16	0,18
5		0,09	0,00	19,50	99	9	215	1.770	1,121	200		
6	— 0,07										0,23	0,16
7		0,02	— 0,10	19,40	99	2	193	1.750	1,100	177		
8	— 0,09										0,24	0,15
9		0,01	— 0,10	19,40	98	1	167	1.750	1,095	153		
10	— 0,10										0,35	0,25
11		— 0,10	0	19,50	98	— 10	137	1.770	1,077	11 B		
P	0											0,37

(1) Subdivision longitudinale :

A = Atlantique (amont).

P = Pacifique (aval).

(2) Cotes au moment $t = 0$, supposées connues.

Les chiffres **en gras** se rapportent aux courbes-limite.

(3) Différences $h_u - h_0 \dots 0,13 = 0,30 - 0,17$.

$$(4) \text{ Moyennes } \frac{h_a + h_0}{2} \dots 0,20 \neq \frac{0,30 + 0,17}{2}.$$

$$(5) \text{ Profondeurs } H \dots 19,70 = 19,50 + 0,20.$$

$$(6) \text{ Coefficients } a \dots 99 = 5,03 \times 19,70.$$

$$(7) a(h_a - h_0) \dots 13 = 99 \times 0,13.$$

$$(8) \text{ Débits } q_p \text{ supposés connus.}$$

$$(9) \text{ Coefficient } c \dots 1.800 = 4,65 = \frac{236}{19,70}.$$

$$(10) \text{ Coefficient } 1 + k_p \dots 1.130 = 1 + \frac{236}{1.800}$$

$$(11) q_f = \frac{q_p + a(h_a - h_0)}{1 + k_p} \quad 220 = \frac{236 + 13}{1.130}.$$

N.B. — Ces chiffres figureront comme q_p dans la colonne (8) du tableau suivant.

$$(12) h_f - h_p = \frac{q_a - q_0}{b} \dots 0,04 = \frac{220 - 216}{100}.$$

N.B. — Les chiffres de la colonne (12), ajoutés à ceux de la colonne (2), donnent les cotes initiales (2)' du tableau suivant.

B. — CALCUL AVEC : $H' = 44,50$ m.

Les calculs se font de la même façon.

On prend : $T = 430''$ s.

$$\text{D'où : } L = 430 \times \sqrt{9,81 \times 44,50} = 9.000 \text{ m.}$$

Il y aura donc : $\frac{72.000}{9.000} = 8$ subdivisions au lieu de 12.

Les coefficients seront :

$$a = \frac{9,81 \times 7,17 \times 430}{9.000} \times H = \mathbf{3,36 H}.$$

$$b = \frac{7,17 \times 9.000}{430} = \mathbf{150}.$$

$$c = \mathbf{4,65 H^2}$$

C. — CALCUL AVEC : $H' = 11,20$ m.

Avec $T = \mathbf{430''}$ s, on aura :

$$L = 430 \times \sqrt{9,81 \times 11,20} = 4.500 \text{ m}$$

Les coefficients seront :

$$a = \mathbf{6,72 H} \quad b = \mathbf{75} \quad c = \mathbf{4,65 H^2}$$

ANNEXE II

INFLUENCE DES TERMES D'INERTIE SECONDAIRES

Quand on ne néglige pas les termes d'inertie secondaires, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{1}{g B H} \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{q |q|}{C^2 B^2 H^3} + \frac{2 q}{g B H^2} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{q^2}{g B^2 H^3} \left(1 + B \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{1}{B} \frac{\partial q}{\partial x} \quad (6)$$

En introduisant les intervalles finis L et T , comme au § IV, on trouve :

$$q_f = \frac{a(1 - \alpha)(h_a - h_0) + q_p(1 + \beta) + q_p^2 \gamma}{1 + k_p} \quad (7)$$

$$h_f = h_p + \frac{q_a - q_0}{b} \quad (8)$$

Avec :

$$a = \frac{g B H T}{L}; \quad b = \frac{B L}{T}; \quad k_p = \frac{|q_p|}{C}; \quad c = \frac{C^2 B H^2}{2 g T}$$

$$\alpha = \frac{g B^2 H^3}{q_p^2}; \quad \beta = \frac{2(h_f - h_p)}{H}; \quad \gamma = \frac{2 T j}{B^2 H^2}$$

et

$$j = \left(\frac{\partial B H}{\partial x} \right)_{h=\text{cte}}$$

soit le taux de variation de la surface mouillée pour $h = \text{Constante}$.

N.B. — Pour l'application de ces formules, voir ANNEXE III.

ANNEXE III

CALCUL D'UNE MARÉE RÉALISÉE EN MODÈLE RÉDUIT

1. *Longueur du canal* : 6.600 cm.

2. *Section rectangulaire*, avec pente de fond nulle :
La largeur B est de 40 cm.

Nous calculerons avec une largeur

B = 0,87 cm (voir 10 ci-dessous).

3. *Plan de comparaison* : le zéro correspond au fond du canal.

On aura donc : $h = H$.

4. *Période de la marée* : 407 s.

5. *Intervalle* : $T = 5,22$ s, soit $1/73$ de la période.

6. *Profondeur* : $H' = 13,5$ cm.

7. *Longueur élémentaire* :

$$L = T \sqrt{g H'} = 5,22 \sqrt{981 \times 13,5} = 600 \text{ cm.}$$

Le canal sera donc subdivisé en

$$\frac{6.600}{600} = 11 \text{ tronçons,}$$

délimités par les sections 0 à 11.

8. *Formules à appliquer*, en tenant compte que :

$$j = \left(\frac{\partial B H}{\partial x} \right)_{h=Cte} = 0;$$

$$q_f = \frac{\alpha(1-\alpha)(h_a - h_0) + q_p(1+\beta)}{1+k_p}$$

avec :

$$k_p = 1 + \frac{|q_p|}{c}$$

$$h_f = h_p + \frac{q_a - q_0}{b}$$

9. COEFFICIENT α :

$$\alpha = \frac{g B H T}{L} = \frac{981 \times 0,87 \times 5,22 h}{600} = 7,42 h$$

10. COEFFICIENT b :

$$b = \frac{B L}{T} = \frac{0,87 \times 600}{5,22} = 100$$

11. COEFFICIENT c :

$$c = \frac{C^2 B H^2}{2 g T},$$

avec : $C = 340 h^{0,1} \text{ cm}^{1/2} \text{ s}^{-1}$

Pour les différentes valeurs de h , en centimètres, on obtient :

h	= 4	4,5	5	5,5	6
$C = 340 h^{0,1}$	= 391	395	400	403	407
$c = \frac{0,87 C^2 h^2}{2 \times 9,81 \times 5,22}$	= 207	267	340	418	506
h	= 7	8	9	10	11
$C = 340 h^{0,1}$	= 413	418	423	428	432
$c = \frac{0,87 C^2 h^2}{2 \times 9,81 \times 5,22}$	= 710	950	1.230	1.560	1.920

N.B. — Par interpolation, on obtient les chiffres du tableau I, donnant c de 0,1 en 0,1 cm.

12. COEFFICIENT α :

$$\alpha = \frac{g B^2 H^3}{q_p^2} = \frac{q_p^2}{740 h^3}$$

Le tableau II donne les valeurs $100 \times (1 - \alpha)$ en fonction de h et q_p .

13. *Courbe marée aval* (section O) : est donnée par les 39 cotes aux instants 0, 2 T, 4 T, ..., en centimètres :

t/T	0	2	4	6	8	10	12	14
$h = 5,18$	5,03	4,94	4,86	4,86	4,95	5,04	5,17	
$t/T = 16$	18	20	22	24	26	28		
$h = 5,37$	5,64	5,92	6,18	6,38	6,63	6,87		
$t/T = 30$	32	34	36	38	40	42	44	
$h = 7,08$	7,35	7,65	7,90	8,20	8,45	8,68	8,87	
$t/T = 46$	48	50	52	54	56	58	60	
$h = 9,05$	9,15	9,10	8,85	8,55	8,20	7,75	7,36	
$t/T = 62$	64	66	68	70	72	74	76	
$h = 6,85$	6,45	6,15	5,90	5,70	5,60	5,48	5,34	

14. Débit d'amont : $q = 0$ à la section 11.

15. Coefficients (voir 9, 10, 11, 12) :

$$b = 100$$

$$a = 7,42 h$$

TABLEAU I

DONNANT c EN FONCTION DE h :

	4	5	6	7	8	9	10
0,00	207	340	506	710	95	123	156
0,10	219	355	526	734	98	126	159
0,20	231	371	547	758	101	129	163
0,30	243	386	567	782	104	133	166
0,40	255	402	588	806	107	136	170
0,50	267	418	608	830	109	139	173
0,60	282	435	629	854	112	143	177
0,70	297	453	650	878	115	146	180
0,80	312	471	671	902	118	149	184
0,90	326	488	691	926	120	153	188

N. B. — A partir de la cote 8,00 les chiffres du tableau sont à multiplier par 10.

TABLEAU II

DONNANT $100(1 - \alpha)$ EN FONCTION DE q ET h

$q =$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
$h_{(cm)}$	4	99	98	97	95	97	90	87	83	79
5			99	98	97	96	95	93	91	89
6			99	99	98	98	97	96	95	94
7				99	99	99	98	98	97	96
8					99	99	99	98	98	97
9						99	99	99	99	98
10							99	99	99	98

$q =$	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
$h_{(cm)}$	4	70	64	58							
5	84	82	79	76	72	69	65	62			
6	91	89	88	86	84	82	80	77	75	72	
7	94	93	92	91	90	89	87	86	84	83	81
8	96	96	95	94	93	92	91	90	89	88	87
9	97	97	96	96	95	95	94	93	93	92	91
10	98	98	97	97	97	96	96	95	95	94	93

16. Exécution des calculs, d'après le schéma suivant qui se rapporte à la période 0 à 2 T.

(12)'	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(2)'
— 0,16	0	5,18										— 0,15	5,03
	1		— 1,27	5,80	0,85	0,93	— 159	— 45	— 148	1,34	— 144		
— 0,27	2	5,45										— 0,20	6,25
	3		— 0,52	6,70	0,92	0,92	— 137	— 24	— 126	1,21	— 124		
— 0,28	4	6,97										— 0,32	6,65
	5		— 0,19	7,10	0,96	0,91	— 104	— 10	— 95	1,14	— 92		
— 0,35	6	7,16										— 0,38	6,84
	7		— 0,06	7,20	0,98	0,90	— 69	— 3	— 62	1,09	— 60		
— 0,38	8	7,22										— 0,30	6,92
	9		— 0,02	7,20	1,00	0,91	— 33	— 1	— 30	1,04	— 30		
— 0,30	10	7,24										— 0,30	6,94
	11										0		

(1) Subdivision longitudinale :

Section 0 = extrémité aval,

Section 11 = extrémité amont.

(2) Cotes au moment $t = 0$, supposées connues. Le chiffre en gras se rapporte à la courbe-marée aval.

(3) Différences : $h_a - h_0$; — 1,27 = 5,18 — 6,45.

(4) Moyennes :

$$h_m = \frac{h_a + h_0}{2} ; 5,80 \neq \frac{5,18 + 6,45}{2}$$

(5) $1 - \alpha = 1 - \frac{740 h^3}{q_p^2} ; 0,83 = 1 - \frac{159^2}{740 \times 5,80^3}$

N. B. — 1° Les valeurs de q_p sont inscrites dans la colonne (7); 2° on peut déduire $1 - \alpha$ du tableau II par interpolation.

(6)

$$1 + \beta = 1 + \frac{2(h_f - h_p)}{h_m} ; 0,93 = 1 + \frac{-0,16 - 0,27}{5,80}$$

N. B. — On se sert des valeurs $h_f - h_p$ de la colonne (12) du tableau précédent.

(7) Débits q_p supposés connus.

(8) Quantités :

$$\alpha(1 - \alpha)(h_a - h_0) = 7,42 h_m(1 - \alpha)(h_a - h_0);$$

$$- 45 = 7,45 \times 5,80 \times 0,83 \times (-1,27).$$

(9) $(1 + \beta) q_p$; — 148 = — 159 $\times$ 0,93.

$$(10) 1 + k_p = 1 + \frac{c}{|q_p|} ; 1,34 = 1 + \frac{159}{471}.$$

Le chiffre 471 se retrouve dans le tableau I (pour $h = 5,80$).

[illegible]

$t/T =$	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
0	868		887		905		915		910		885		855	
1		196		201		208		208		190		155		110
2	811		833		850		871		890		895		896	
3		174		184		187		189		185		154		112
4	742		774		804		831		870		924		947	
5		147		154		160		150		131		131		122
6	695		732		776		841		900		926		956	
7		110		110		95		91		105		101		78
8	663		734		811		854		880		932		993	
9		39		33		52		65		53		40		41
10	714		753		786		838		903		956		996	
11		0		0		0		0		0		0		0

$t/T =$	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
0	820		775		736		685		645		615		590	
1		55		— 8		— 64		— 119		— 163		— 182		— 188
2	894		874		835		814		803		774		754	
3		75		31		— 43		— 108		— 134		— 162		— 181
4	937		936		948		925		880		869		857	
5		76		19		— 20		— 63		— 123		— 150		— 151
6	1.000		1.017		1.002		988		979		943		905	
7		59		34		— 6		— 54		— 87		— 112		— 113
8	1.030		1.051		1.057		1.051		1.030		996		938	
9		38		28		0		— 33		— 53		— 54		— 57
10	1.037		1.065		1.093		1.093		1.060		1.007		953	
11		0		0		0		0		0		0		0

$t/T =$	70	71	72	73	74	75	76	77	78 = 0
0	570		560		548		534		518
1		— 194		— 193		— 175		— 158	
2	747		731		701		672		645
3		— 178		— 163		— 146		— 131	
4	827		792		758		726		698
5		— 143		— 129		— 114		— 103	
6	867		825		785		750		715
7		— 101		— 89		— 79		— 68	
8	882		837		797		757		719
9		— 56		— 49		— 39		— 30	
10	896		840		791		752		722
11		0		0		0		0	

REMARQUES

- 1° Pour obtenir les temps en secondes, il suffit de multiplier les rapports t/T par 5,22;
- 2° Les calculs ont été faits sur une largeur de 0,87 cm (voir 2); pour obtenir les débits réels, il faut multiplier par $40 : 0,87 = 46$;

- 3° Les cotes finales ($t/T = 78 = 0$) correspondent à moins de 0,03 cm près avec les cotes initiales;
- Si la différence avait été trop grande, les calculs auraient dû être continués;

- 4° Les chiffres en caractères gras correspondent aux conditions aux limites.