La détermination d'un déversoir devant respecter une loi hauteur-débit donnée (*)

Design of a weir in accordance with a given head discharge law

PAR SAMUEL BAROCIO BARRIOS

Lors des essais en laboratoire, il s'avère souvent nécessaire de réaliser sur le modèle une correspondance donnée entre niveaux et débits. Ce résultat peut être obtenu au moyen d'un déversoir à mince paroi dont la courbe de débit est celle du cours d'eau étudié. Nous proposons ici une méthode de détermination de ce type de déversoir consistant à résoudre pas à pas l'équation :

$$Q(H) = \int_0^H V_H(h)\, L(h)\, dh$$

liant le débit d'un déversoir à mince paroi à la forme de sa crête. Nous proposons aussi une variante facilitant l'application pratique de la méthode.

In laboratory tests, one often finds it necessary to obtain a given relation between levels and flows on the model. This result can be obtained using a sharp-crested weir for which the flow curve is that of the river studied. We propose here a method for the determination of this type of weir by evolving, step by step, the equation :

$$Q(H) = \int_0^H V_H(h)\, L(h)\, dh$$

connecting the discharge of a sharp-crested weir to its crest profile. We also propose an alternative which simplifies practical application of the method.

PREMIÈRE PARTIE (**)

Lors de l'étude sur modèle réduit d'un ouvrage en rivière, le problème se pose de réaliser sur le modèle la même loi hauteur-débit que dans la nature. Ce problème se résoud habituellement en réglant le niveau correspondant à une valeur donnée du débit au moyen de vannes ou d'autres dispositifs; mais une telle méthode ne permet qu'une étude discontinue et incomplète des phénomènes. Pour remédier à cet inconvénient, on cherchera à obtenir un réglage automatique des niveaux sur le modèle en réalisant un déversoir dont la loi hauteur-débit soit la même que celle du cours d'eau étudié. Pour la mise au point d'un tel déversoir, considérons d'abord le problème inverse, c'est-à-dire : étant donné un déversoir en mince paroi de forme arbitraire, déterminer sa courbe de débit.

Nous supposerons au départ, dans cette étude, qu'il n'y a pas de contractions latérales et que les sections à l'amont du déversoir sont suffisamment larges pour que l'on puisse négliger la vitesse d'approche.

(*) Une version de cette étude en langue espagnole a été publiée par la Revue mexicaine : *la Ingeniería Hidraúlica en Mexico* (avril-mai-juin 1952).

(**) Cette première partie a été présentée au Congrès Scientifique Mexicain pour le 4e Centenaire de la U.N.A. (Universidad Nacional Autónoma de México).

Article published by SHF and available at http://www.shf-lhb.org or http://dx.doi.org/10.1051/lhb/1953046

Dans ces conditions (voir fig. 1), à travers une section $L(h).dh$ passe un débit :

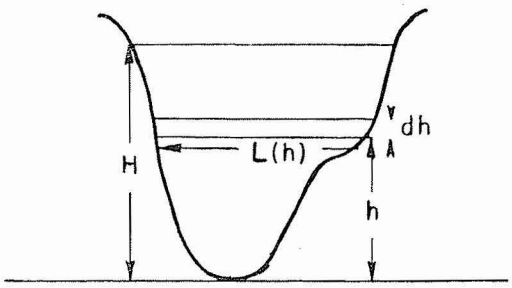


FIG. 1

$$dQ = L(h).dh\,\sqrt{2\,g\,(H-h)};$$

$L(h).dh$ étant la surface élémentaire et

$\sqrt{2g\,(H-h)}$ exprimant la vitesse à la hauteur h.

A chaque hauteur h correspond une largeur débitante $L(h)$ qui est fonction de h; et c'est précisément cette fonction qui détermine la courbe hauteur-débit du déversoir, si bien que des déversoirs différents mais présentant la même loi $L(h)$ auront, pour des hauteurs d'eau égales, des débits égaux; par exemple des déversoirs triangulaires ayant mêmes L et mêmes H (fig. 2).

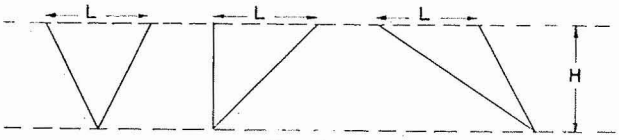


FIG. 2

Pour simplifier, portons, en coordonnées cartésiennes, les hauteurs h en abscisse et les largeurs débitantes en ordonnées; la fonction $L(h)$ est alors représentée de la manière habituelle (fig. 3).

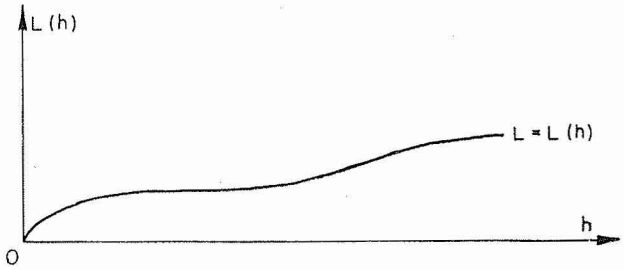


FIG. 3

Cette convention admise, procédons au calcul de la courbe hauteur-débit du déversoir. Appelons : $L(h)$ la loi définissant le profil du déversoir; $V_H(h) = \sqrt{2\,g\,(H-h)}$, la courbe des vitesses $(0 \leqslant h \leqslant H)$; et $Q(H)$ la courbe hauteur-débit.

Le déversoir fonctionnant avec un niveau H, le débit correspondant sera, si l'on intègre les dQ obtenus auparavant :

$$Q(H) = \int_0^H V_H(h)\,L(h)\,dh$$

$$= \int_0^H \sqrt{2\,g\,(H-h)}\,L(h)\,dh \qquad (1)$$

La formule (1) est alors l'expression analytique de la courbe hauteur-débits du déversoir donné.

D'après l'équation (1), le problème que nous avons à résoudre est le suivant : $Q(H)$ étant donné, trouver une fonction $L(h)$ satisfaisant en même temps l'équation (1) et la loi $Q(h)$.

$Q(H)$ est toujours une fonction continue et croissante de H, mais son expression analytique est en général inconnue et sa détermination au moyen de jaugeage est purement expérimentale. Dans quelques cas particuliers simples, il est

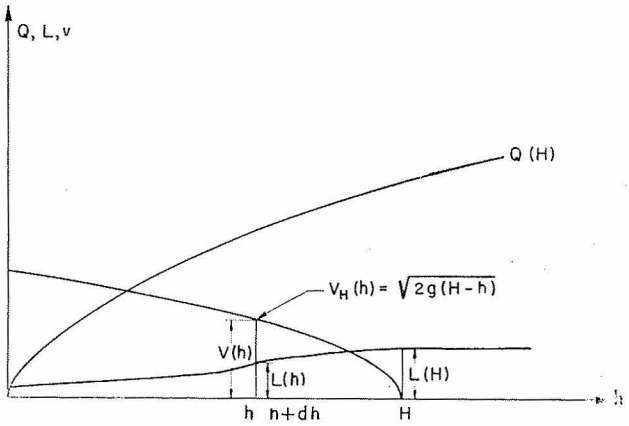


FIG. 4

possible d'obtenir analytiquement la fonction $L = L(h)$; par exemple pour le déversoir Sutro où $Q(H)$ est proportionnel à la charge; ici la forme de la crête est donnée par :

$$L(h) = \begin{cases} b & \text{si} \quad 0 \leqslant h \leqslant a \\ b\left(1 - \dfrac{2}{\pi}\,\text{arc tg}\sqrt{\dfrac{h}{a}}\right) & \text{si } a \leqslant h \leqslant H \end{cases}$$

Quand :

$$H > \frac{a}{3}$$

on a :

$$Q(H) = \int_0^H V_H(h)\,L(h)\,dh = a^{1/2}\,b\,\sqrt{2\,g}\left(h - \frac{a}{3}\right) \text{(*)}$$

(*) Voir l'article " Another Porportional - Flow Weir; Sutro Weir " par E. A. PRATT; *Engineering News*, 27 août 1914, pages 462-463.

Ce déversoir a l'avantage de permettre des lectures directes de débit, en mesurant le niveau avec une pointe de mesure.

Si Q (H) est donnée par une expression analytique, le problème comporte, dans chaque cas,

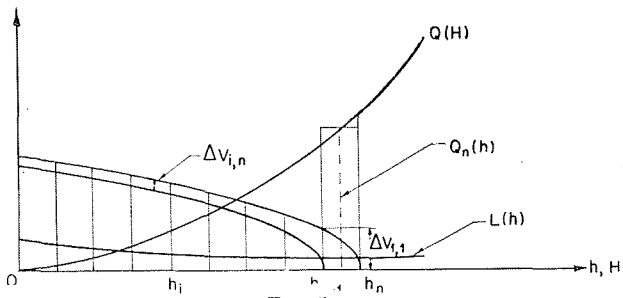


FIG. 5

une solution particulière; pour cette raison, et du fait que Q (H) est souvent une courbe expérimentale, nous aborderons d'abord le problème par la méthode des différences finies.

Divisons l'intervalle (0, H) en intervalles élémentaires.

Soient :

— $L_i(h)$ l'ordonnée moyenne de la courbe des largeurs débitantes dans le i-ième intervalle;

— $Q_i(H)$ le débit correspondant à une charge h_i;

— $\Delta V_{i,n}$ l'accroissement moyen de vitesse dans le i-ième intervalle, quand la charge augmente de h_{n-1} à h_n;

— $\Delta h_{i-1,i}$ l'augmentation de la charge de h_{i-1} à h_i.

L'intégration est grandement simplifiée si l'on choisit des intervalles égaux et si l'on calcule à l'avance les ΔV.

L'ordonnée moyenne de la parabole dans le premier intervalle est 2/3 de son ordonnée maximum, d'après une propriété connue de la parabole. Appelons cette première ordonnée moyenne $(2/3)\,\Delta V_1$.

Supposons connu le profil du déversoir jusqu'au $(n-1)^{\text{ième}}$ intervalle; si la charge passe de h_{n-1} à h_n, nous aurons :

$$Q_n = Q_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta V_{i,n} . L_i(h)\, \Delta h_{i-1,i} + \frac{2}{3} \Delta V_{1,1}\, L_n(h)\, \Delta h_{n-1,n} \qquad (2)$$

De cette équation nous pouvons déduire $L_n(h)$, soit l'ordonnée moyenne de la courbe des largeurs débitantes dans la $n^{\text{ième}}$ intervalle puisque les autres termes sont connus. Aussi :

$$L_n(h) = \frac{Q_n - Q_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta V_{i,n} . L_i(h)\, \Delta h_{i-1,i}}{\frac{2}{3} \Delta V_{1,1}\, \Delta h_{n-1,n}} \qquad (3)$$

Dans le cas d'intervalles égaux :

$$\Delta V_{i,n} = \Delta V_{i+j,\, n+j}$$

Comme lorsque l'on augmente la charge, tous les ΔV précédents interviennent dans le calcul, le processus se simplifie.

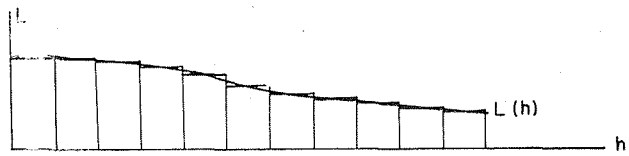


FIG. 6

Nous obtenons, de cette manière, les valeurs moyennes de la courbe définissant le profil du déversoir, profil que l'on peut tracer graphiquement comme indiqué sur la figure 6.

Finalement, pour construire un déversoir symétrique par rapport à un axe vertical, nous dessinons la courbe $L = (1/2)\, L(h)$ et nous la portons de part et d'autre de l'axe « h » (fig. 7).

Il est évident qu'on aura une plus grande précision si on utilise des intervalles plus petits.

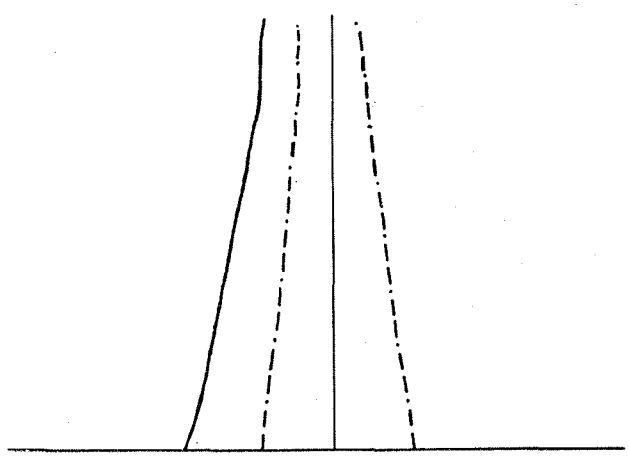


FIG. 7

Comme pour chaque élévation du niveau on réutilise les résultats obtenus précédemment, ce procédé de calcul implique une correction automatique des imprécisions numériques, L'importance de cette question est aujourd'hui reconnue. C'est pour cela que les ingénieurs du Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique (Neyrpic, Grenoble)

ont mis au point une méthode expérimentale très ingénieuse qui consiste à construire le profil du déversoir au moyen de lattes de bois que l'on pose de bas en haut jusqu'à obtenir pour chaque niveau le débit donné par la loi Q (H) que l'on désire réaliser (*).

DEUXIÈME PARTIE

VARIANTE DE LA MÉTHODE DE CALCUL

Avec des accroissements Δh relativement grands, nous pouvons mettre au point le déversoir à partir de déversoirs rectangulaires élémentaires de la manière suivante :

1° Sur la courbe des débits du cours d'eau à l'étude, prenons les valeurs correspondant à des multiples entiers de l'accroissement Δh, c'est-à-dire $Q(\Delta h)$, $Q(2\,\Delta h) \ldots Q(n\Delta h)$. Appelons ces débits respectivement Q_1, $Q_2 \ldots Q_n$.

2° Considérons un déversoir rectangulaire dont le débit est donné par $Q = cLH^{3/2}$, c étant un coefficient constant, et calculons L' :

$$Q_1 = cL\,(\Delta h)^{3/2} \qquad L = \frac{Q_1}{c\,(\Delta h)^{3/2}}$$

Appelons cette première largeur de crête L_1. Nous avons alors un déversoir rectangulaire de hauteur Δh et de longueur déversante, L_1, qui, pour une charge Δh, a un débit $Q_1\,(\Delta h)$.

Pour une hauteur $2\,\Delta h$, nous désirons obtenir un débit $Q\,(2\,\Delta h)$; comme on le voit sur la

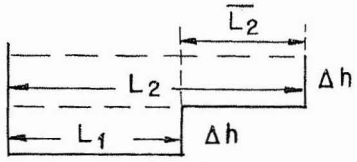


FIG. 8

figure 8, notre déversoir est alors composé de deux rectangles.

Soit Q'_2 le débit qui passe par le rectangle de base L_1 et de hauteur $2\Delta h$.

$$Q'_2 = cL_1\,(2\,\Delta h)^{3/2}$$

Soit $\overline{Q_2} = Q_2 - Q'_2$. Appelons $\overline{L_2}$ la largeur de crête nécessaire pour passer un débit $\overline{Q_2}$ sous une charge Δh :

$$\overline{L_2} = \frac{\overline{Q_2}}{c\,(\Delta h)^{3/2}} \quad \text{et} \quad L_2 = L_1 + \overline{L_2}$$

Supposons maintenant que nous ayons déjà calculé le déversoir jusqu'à une hauteur $(n-1)\Delta h$.

Alors, avec le système précédent de notations, on a :

$$Q'_n = cL_1\,(n\ \Delta h)^{3/2} + c\overline{L_2}\,[(n-1)\,\Delta h]^{3/2} + c\overline{L_3}\,[(n-2)\,\Delta h]^{3/2} + \ldots\, c\overline{L}_{n-1}\,[2\,\Delta h]^{3/2}$$

et comme $L_1 = \overline{L_1}$, puisque c'est la première crête,

$$Q'_n = \sum_{k=1}^{k=n-1} c\,\overline{L_k}\,[(n-k+1)\,\Delta h]^{3/2}$$

Maintenant :

$$\overline{Q_n} = Q_n - Q'_n \qquad \overline{L_n} = \frac{\overline{Q_n}}{c\,(\Delta h)^{3/2}} \quad \text{et} \quad L_n = L_{n-1} + \overline{L_n}$$

Le déversoir aura l'aspect indiqué sur la figure 9.

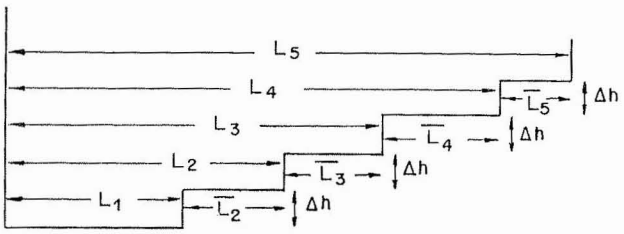


FIG. 9

On a ainsi obtenu un déversoir dont la courbe hauteur-débits coïncide avec celle du cours d'eau étudié, pour les hauteurs correspondant à des multiples entiers de Δh.

Cette variante permet de calculer les déversoirs que les ingénieurs français du Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique mettent au point expérimentalement.

Ceci étant, nous suggérons d'adopter, dans cette variante de calcul, un coefficient $C = 1{,}84$

(*) *La Houille Blanche*, Grenoble, mai-juin 1951, pages 417-419.

dans le système métrique, coefficient qui correspond à un déversoir rectangulaire.

Ce coefficient est expérimental; or, rappelons que la formule théorique est :

$$Q = (2/3)\sqrt{2g}\,L\,H^{3/2}$$

soit :

$$Q = 2{,}95\,L\,H^{3/2}$$

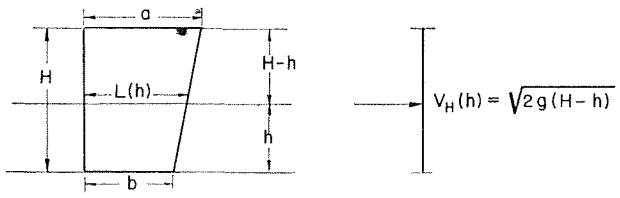
Le rapport des deux coefficients est : $\frac{2{,}95}{1{,}84} = 1{,}603$, ce qui permet de se rendre compte de l'incertitude du calcul. Notons toutefois que le coefficient 1,84 a été obtenu en réalisant des expériences sur des déversoirs rectangulaires dans des conditions très particulières avec des conditions d'emploi très strictes qui, en général, ne seront pas satisfaites dans le cas du modèle de cours d'eau.

Ceci nous montre la nécessité de réaliser une mise au point théorique expérimentale que nous allons expliquer.

Compensations graphiques

Nous allons voir maintenant la façon d'éliminer les paliers du déversoir au moyen d'une compensation appropriée.

Dans ce but, recherchons la formule générale



des déversoirs pour lesquels $L(h)$ est une fonction linéaire (fig. 10).

$$L(h) = \left(\frac{a-b}{H}\right)h + b$$

$$Q(H) = \int_0^H L(h)\,V_H(h)\,dh$$

$$= \int_0^H \left[\frac{a-b}{H}\,h + b\right]\sqrt{2g(H-h)}\,dh$$

$$= \frac{a-b}{H}\sqrt{2g}\int_0^H \sqrt{H-h}\,h\,dh$$

$$+ b\sqrt{2g}\int_0^H \sqrt{H-h}\,dh$$

En effectuant les intégrations et simplifications nécesssaires, nous obtenons :

$$Q(H) = \frac{4}{15}\,a\sqrt{2g}\,H^{3/2} + \frac{6}{15}\,b\sqrt{2g}\,H^{3/2}$$

Si l'on annule le débit et qu'on divise par $2/15\sqrt{2g}\,H^{3/2}$, on obtient :

$$2a + 3b = 0 \qquad b = -(2/3)\,a$$

$$a = -(3/2)\,b$$

Comme on le voit immédiatement d'après la figure 11, si, par les 2/5 de la hauteur (de bas

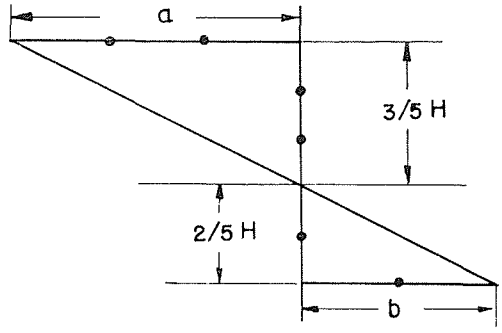


FIG. 11

en haut) d'un palier quelconque, nous faisons passer une droite arbitraire, cette modification n'affecte pas le fonctionnement du déversoir aux points de hauteur $n\,\Delta\,h$ (fig. 12).

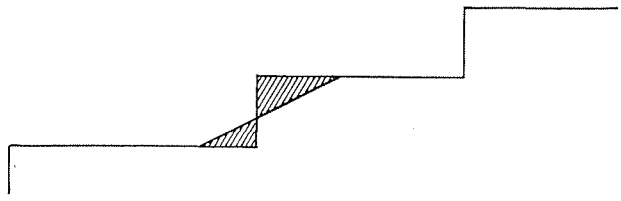


FIG. 12

Appliquons la propriété précédente en dessinant le déversoir avec ses paliers et en faisant

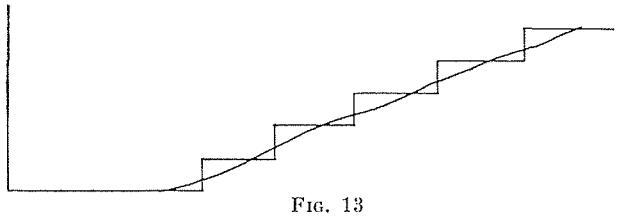


FIG. 13

passer une courbe, tracée avec un pistolet de dessin, par les points situés aux 2/5 des hauteurs (fig. 13). Il est sans importance que cette

condition ne doit pas rigoureusement satisfaite puisque nous devons encore régler le déversoir.

RÉGLAGE EXPÉRIMENTAL DU DÉVERSOIR

Pour les raisons mentionnées plus haut, il est très probable que, dans certains cas, le déversoir mis au point ne reproduira pas les niveaux avec une approximation suffisante. Si ce cas se présente, la méthode à suivre est la suivante :

1° Déterminer avec grand soin la courbe hauteur-débits du déversoir à régler, par un étalonnage expérimental sur modèle; nous avons alors une fonction que nous désignerons par :

$$Q_{Mod} = Q_{Mod}(H)$$

Pour chaque valeur de H, nous avons alors une différence :

$$Q(H) - Q_{Mod}(H) = \overline{Q}_M(H)$$

qui peut être positive, négative ou nulle.

2° Calculons un déversoir dont la courbe hauteur-débits corresponde à la différence précédente;. si l'on appelle $\overline{L}_M(H)$ la courbe d'un tel déversoir, le déversoir une fois réglé aura pour courbe :

$$L(h) + \overline{L}_M(h)$$

En général, une seule correction suffira, mais on peut arriver au degré de précision que l'on veut.