NOTULE HYDRAULIQUE
HYDRAULIC BRIEFS

Critères pour l'instabilité de fonctionnement des pompes centrifuges

Instability criteria for operation of centrifugal pumps

L'expérience montre qu'en un point de fonctionnement déterminé, une pompe centrifuge peut se montrer stable ou instable suivant l'installation dans laquelle elle s'insère. Etude de l'influence des caractéristiques de l'installation sur les critères d'instabilité.

Experience shows that the stability or instability of a centrifugal pump depends on the installation in which it is fitted. Study of the influence of the installations' characteristics on criteria of instability.

NOTATIONS

Q	m^3/s	débit de la pompe.
H'	m C.E.	hauteur manométrique de la pompe.
N	tours/s	vitesse angulaire du groupe.
L	m	longueur de la conduite.
s	m^2	section de la conduite.
V	m^3	volume d'air contenu dans le réservoir.
w	m/s	vitesse de l'eau dans la conduite (Q/s).
z	m C.E.	pression absolue de l'air dans le réservoir.
z_R	m C.E.	pression absolue au-delà de la vanne.
ξz_0	m C.E.	perte de charge créée par la vanne au débit de régime.
A	m^{-1}	constante relative à la pompe.
δ	kg/m^3	poids spécifique de l'eau.

$g = 9{,}81\ m/s^2$,
indice 0 définit le régime.

INTRODUCTION

On admet généralement que le phénomène connu sous le nom de « pompage » est dû à l'allure de la courbe débits — hauteurs manométriques de la turbo-machine. On parle ainsi de caractéristiques stables, définies par $dH'/dQ \leqslant 0$ et de caractéristiques instables pour lesquelles $dH'/dQ > 0$.

Tous les constructeurs de pompes centrifuges savent cependant qu'une machine donnant lieu à des phénomènes d'instabilité de marche à son lieu d'installation peut présenter au même point de fonctionnement une marche parfaitement stable lorsqu'elle est installée au plancher d'essais de l'usine.

Il est par suite légitime de se demander dans quelle mesure l'instabilité de marche est due aux caractéristiques de l'installation.

La présente étude propose un moyen d'investigation susceptible de répondre à cette question.

POSITION DU PROBLÈME

Considérons, pour fixer les idées, l'installation (fig. 1) constituée par une pompe centrifuge P, aspirant avec une hauteur manométrique h_A et refoulant dans une conduite (longueur L, section s) munie d'un réservoir d'air (volume d'air V, pression absolue de cet air z) et d'une vanne créant une perte de charge $\xi z_0 (w/w_0)^2$ sous le débit Q; la pression à la sortie de la vanne est z_R.

Sur le diagramme débits-hauteurs (fig. 2), le point M, intersection de la caractéristique de la pompe (courbe P) et de la caractéristique de la conduite (courbe C) définit le régime de fonctionnement.

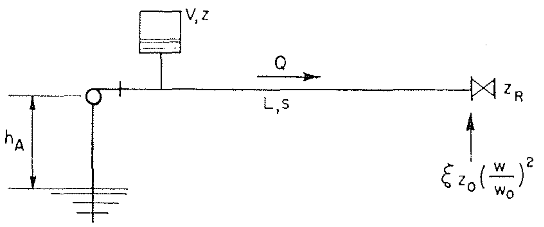

FIG. 1

Ce régime sera stable aux environs de M lorsque l'accroissement Δx, donné à l'une des variables x qui définissent M, tend vers zéro avec $t \to \infty$; dans le cas contraire, le régime sera instable.

Pour obtenir un critère de stabilité en M, il suffit par suite d'établir la relation entre les Δx, on obtiendra une équation différentielle linéaire (puisque nous analysons les états « aux environs » de M, nous sommes en droit de linéariser toutes les relations), on appliquera ensuite soit le critère de HURWITZ, soit celui de NYQUIST, qui fourniront la condition cherchée.

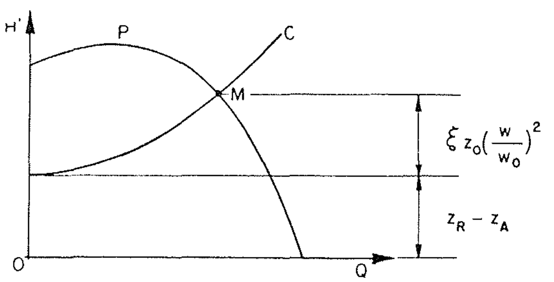

FIG. 2

Afin de simplifier l'écriture, nous ne considérerons pas les accroissements absolus Δx, mais bien les accroissements relatifs, sans dimensions, $\Delta x / x_0$, l'indice zéro définissant l'état du régime non perturbé en M, et nous désignerons les rapports $\Delta x / x_0$ par le symbole (x).

MISE EN ÉQUATION

Afin de mieux dégager l'idée directrice, nous appliquerons notre raisonnement au cas simple d'une pompe attaquée par un moteur *synchrone* (N = Cte).

1) *Equation d'état.* — Nous supposerons que l'air comprimé effectue une transformation isothermique :

$$z \, V = z_0 \, V_0$$

linéarisons :

$$z \, \Delta V + V \, \Delta z = 0$$

en divisant par $z_0 \, V_0$, nous obtenons :

$$(V) + (z) = 0 \qquad (1)$$

2) *Equation caractéristique de la pompe aux environs de* M. — Nous devons écrire cette équation pour la pompe travaillant en régime varié :

$$z - z_A = H' - \frac{A}{g} \frac{dQ}{dt}$$

A est une constante déterminée par le tracé de la pompe.

Linéarisons :

$$\Delta z = \Delta H' - \frac{A}{g} \, \Delta \left(\frac{dQ}{dt} \right)$$

puisque N = Cte; on peut écrire :

$$\Delta H' = \frac{dH'}{dQ} \cdot \Delta Q$$

ce qui donne :

$$z_0 \frac{\Delta z}{z_0} = Q_0 \left(\frac{dH'}{dQ} \right)_0 \frac{\Delta Q}{Q_0} - \frac{A}{g} Q_0 \, \Delta \left[\frac{d \, (Q/Q_0)}{dt} \right]$$

ou encore, puisque :

$$\Delta \, \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (\Delta \, x)$$

$$z_0 \, (z) - Q_0 \left(\frac{dH'}{dQ} \right)_0 (Q) - \frac{A}{g} \, Q_0 \left[\frac{d \, (Q)}{dt} \right] = 0 \quad (2)$$

3) *Equation de l'écoulement dans la conduite.* — Lorsque le volume d'air à l'intérieur du réservoir est tant soit peu important, la compressibilité de l'eau ainsi que la dilatabilité des conduites peuvent être négligées. L'équation d'équilibre dynamique appliquée à la masse d'eau se trouvant dans la conduite donne (projetée sur l'axe de la conduite) :

$$\delta \, \frac{Ls}{g} \frac{dw}{dt} = (z - z_R) \, s \, \delta - \xi \, z_0 \left(\frac{w}{w_0} \right)^2 s \, \delta$$

Divisons par $s\,\delta$ et linéarisons :

$$\frac{L}{g}\ \Delta\left(\frac{dw}{dt}\right) = \Delta z - 2\,\xi\,z_0\ \frac{w}{w_0{}^2}\ \Delta w$$

ou encore :

$$\frac{L}{g}\ w_0\ \frac{d\,(w)}{dt} = z_0\,(z) - 2\,\xi\,z_0\,(w) \qquad (3)$$

4) *Equation de continuité.* — Exprimons que le débit sortant de la pompe et du réservoir est refoulé dans la conduite :

$$Q + \frac{dV}{dt} = s\,w$$

linéarisons :

$$\Delta\,Q + \Delta\frac{dV}{dt} = s\,\Delta\,w$$

ou encore :

$$Q_0\ \frac{\Delta\,Q}{Q_0} + V_0\,\Delta\left[\frac{d\left(\frac{V}{V_0}\right)}{dt}\right] = s\,w_0\ \frac{\Delta\,w}{w_0}$$

ce qui donne :

$$Q_0\,(Q) + V_0\ \frac{d\,(V)}{dt} - s\,w_0\,(w) = 0 \qquad (4)$$

DÉFINITION DU CRITÈRE DE STABILITÉ DE FONCTIONNEMENT

En éliminant (w), (V), (z) entre ces quatre équations différentielles, on obtient :

$$\frac{d^3\,(Q)}{dt^3}\left[\frac{L\,w_0\,V_0\,A}{g\,g\,z_0}\right] + \frac{d^2\,(Q)}{dt^2}\left[-\frac{L\,w_0\,V_0}{g\,z_0}\left(\frac{dH'}{dQ}\right)_0 + 2\,\xi\,\frac{V_0\,A}{g}\right] + \frac{d\,(Q)}{dt}\left[\frac{L}{g}\ w_0 + \frac{A}{g}\ Q_0 - 2\,\xi\,V_0\left(\frac{dH'}{dQ}\right)_0\right]$$

$$-\,(Q)\left[-\,Q_0\left(\frac{dH'}{dQ}\right)_0 + 2\,\xi\,z_0\right] = 0 \qquad (5)$$

en posant :

$$(Q) = B\,e^{\mu t} \qquad (6)$$

on obtient l'équation caractéristique de (5) :

$$\mu^3\,a_0 + \mu^2\,a_1 + \mu\,a_2 + a_3 = 0 \qquad (7)$$

Soient $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3$ les trois racines de (7). Le phénomène défini par (5) sera stable lorsque les parties réelles de tous les μ seront négatives. Le critère de HURWITZ donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, il s'écrit :

$$\text{(I)} \qquad a_1 > 0$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

En développant les déterminants et en tenant compte de (II) lors du calcul de (III), on obtient :

$$\text{(I)} \qquad a_1 > 0$$

$$\text{(II)} \qquad a_1\,a_2 - a_0\,a_3 > 0$$

$$\text{(III)} \qquad a_3 > 0$$

Remplaçons les a par leurs valeurs :

Condition I

$$-\ \frac{L\,w_0\,V_0}{g\,z_0}\left(\frac{dH'}{dQ}\right)_0 + 2\,\xi\,\frac{V_0\,A}{g} > 0 \qquad (8)$$

Ecrivons m et n pour les tangentes en M aux courbes P et C, on a :

$$m = \left(\frac{dH'}{dQ}\right)_0$$

$$n = \frac{d}{dQ}\left[\xi\,z_0\left(\frac{w}{w_0}\right)^2\right]_0 = \frac{d}{dQ}\left[\xi\,z_0\left(\frac{Q}{Q_0}\right)^2\right]_0$$

$$= 2\,\xi\,z_0\left(\frac{Q}{Q_0{}^2}\right)_0 = \frac{2\,\xi\,z_0}{Q_0} \qquad (9)$$

Avec ces notations, (8) s'écrit :

$$-\ \frac{L\,w_0}{Q_0}\ m + n\,A > 0$$

ou encore, en nous souvenant que :

$$Q_0 = s\,W_0$$

$$m < n\,A\,\frac{s}{L}$$

Introduisons encore la notation :

$$\alpha = A\,\frac{s}{L} \qquad (10)$$

ce qui donne finalement :

$$\underline{m < \alpha\,n} \qquad \text{(I)}$$

Condition III

Cette condition s'écrit :

$$-Q_0 m + 2\xi z_0 > 0$$

ce qui, avec les notations (9), donne :

$$\underline{m < n} \qquad \text{(III)}$$

Condition II

Cette condition s'écrit :

$$\left[-\frac{L\, w_0\, V_0}{g\, z_0}\, m + 2\,\xi\, \frac{V_0\, A}{g}\right]\left[\frac{L}{g}\, w_0 + \frac{A}{g}\, Q_0 - 2\,\xi\, V_0\, m\right]$$

$$-\left[-Q_0\, m + 2\,\xi\, z_0\right]\left[\frac{L\, w_0\, V_0\, A}{g\, g\, z_0}\right] > 0 \qquad (11)$$

En introduisant les notations (9) (10), et en posant :

$$\beta = \frac{A\, z_0}{g\, V_0} \qquad (12)$$

quelques calculs algébriques transforment (11) en :

$$\varphi(m) \equiv m^2 - m\left[\alpha\, n + \frac{\beta}{\alpha\, n}\right] + \alpha\,\beta > 0 \quad (13)$$

Soient encore m_1 et m_2 les deux racines de $\varphi(m) = 0$:

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha\, n + \frac{\beta}{\alpha\, n}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\alpha\, n + \frac{\beta}{\alpha\, n}\right)^2 - \alpha\,\beta}$$

$$m_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha\, n + \frac{\beta}{\alpha\, n}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\alpha\, n + \frac{\beta}{\alpha\, n}\right)^2 - \alpha\,\beta}$$

et puisque :

$$\alpha\, n + \frac{\beta}{\alpha\, n} > 0,$$

on a :

$$m_1 < m_2 \qquad (14)$$

La condition II sera par suite satisfaite par toutes les valeurs de m, **sauf** par celles comprises dans l'intervalle $\underline{m_1 < m < m_2.}$ (15)

CHOIX D'UNE CONDITION DE STABILITÉ DE FONCTIONNEMENT

Comparons à présent les racines m_1 et m_2 à $n\,\alpha$.

Soit d'abord:

$$n\,\alpha > m_1$$

$$n\,\alpha > \frac{1}{2}\left(\alpha\, n + \frac{\beta}{\alpha\, n}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\alpha\, n + \frac{\beta}{\alpha\, n}\right)^2 - \alpha\,\beta}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}\left(\alpha\, n + \frac{\beta}{\alpha\, n}\right)^2 - \alpha\,\beta} > \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha\, n} - \alpha\, n\right)$$

en élevant au carré :

$$\frac{1}{4}\left(\alpha\, n + \frac{\beta}{\alpha\, n}\right)^2 - \alpha\,\beta > \frac{1}{4}\left(\frac{\beta}{\alpha\, n} - \alpha\, n\right)^2$$

$$\alpha\,\beta < \frac{1}{4}\left(\alpha\, n + \frac{\beta}{\alpha\, n}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\alpha\, n - \frac{\beta}{\alpha\, n}\right)^2$$

$$\alpha\,\beta < \frac{1}{4}(2\,\alpha\, n)\left(2\,\frac{\beta}{\alpha\, n}\right)$$

$$\alpha\,\beta < \beta$$

$$\alpha < 1$$

Des calculs en tout point semblables conduisent aux correspondances suivantes :

pour $\alpha > 1$ on a $m_1 > n\,\alpha$ et $m_2 < n\,\alpha$

pour $\alpha < 1$ on a $m_1 < n\,\alpha$ et $m_2 > n\,\alpha$

Les inégalités écrites pour le cas $\alpha > 1$ sont en contradiction avec (15) et sont par suite à écarter.

Les trois conditions déduites du critère de HURWITZ peuvent être résumées dans le tableau suivant :

Condition	$\alpha > 1$	$\alpha < 1$
I	$m < n\,\alpha$	$m < n\,\alpha$
II	—	$m < m_1 < n\,\alpha$
III	$m < n$	$m < n$

Il en résulte immédiatement que la condition I peut être abandonnée, et nous arrivons à l'expression finale du critère de stabilité cherché.

Pour obtenir un fonctionnement stable de l'installation envisagée, il faut que la caractéristique de l'installation (C) coupe la courbe caractéristique de la pompe (P) en un point où le coefficient angulaire de (P) satisfait l'une des inégalités suivantes :

Installations définies par $\alpha > 1$
il faut que : $m < n$

Installations définies par $\alpha < 1$
il faut que : $m < m_1$

Si nous avions négligé le fait que la pompe fonctionne en régime varié, nous aurions obtenu ($A = 0$) et $m_1 = 0$ et la condition de stabilité se serait réduite dans tous les cas à $m < 0$.

Il est possible d'appliquer un raisonnement semblable aux groupes pompe-centrifuge-moteur asynchrone, de même qu'il est possible d'étudier le comportement d'une pompe branchée sur une longue conduite rigide en tenant compte de la compressibilité de l'eau. Mais dans de tels cas le critère de HURWITZ est peu commode et il s'avère plus facile de choisir le critère grapho-analytique de NYQUIST. L'étude devra être faite pour chaque cas particulier.

EXEMPLE. — Comparons, au point de vue de la stabilité de fonctionnement, le comportement d'une pompe, installée (voir tableau) :

	Au plancher d'essais du constructeur	A son lieu de destination
Données :		
$Q_0 =$	$45 \text{ m}^3/\text{h} = 45/3.600 \text{ m}^3/\text{s}$	
$z_0 =$	450 m	
$A =$	300 m^{-1}	
$s =$	$0{,}8.10^{-2} \text{ m}^2$	
$L =$	8 m	80 m
$V_0 =$	$0{,}03.10^{-3} \text{ m}^3$	$0{,}3.10^{-3} \text{ m}^3$
	(nous admettons qu'il y a de l'air dissous dans l'eau).	
$\xi z_0 =$	450 m.	45 m
	(Au plancher d'essais on ne dispose que d'une vanne pour créer la hauteur nécessaire.)	
Calculs :	On trouve, en appliquant nos formules :	
$n =$	72.000	7.200
$\alpha =$	0,3	0,03
$\beta =$	458.10^6	$4.58.10^6$
$m_1 =$	3.500	0,00

CONCLUSION

Si la caractéristique de la pompe était telle que pour une augmentation du débit de 10 m³/h la hauteur manométrique augmente de 5 m aux environs du point de fonctionnement, on aurait $m = 5 \times 3.600/10$, soit $m = 1.800 < m_1$ (plancher) $> m_1$ (installation). Cette pompe ne donnerait par suite pas satisfaction à son lieu de destination, sans que l'on puisse s'apercevoir au plancher d'essais de son défaut.

Paul SLIOSBERG,
Ingénieur A.I.L.G.,
ancien assistant
à l'Université de Bruxelles,
Ingénieur
aux Ateliers de Constructions
d'Ensival (Belgique).