Stabilité de deux chambres d'équilibre respectivement solidaires des canaux d'amenée et de fuite*

Stability of two surge-tanks built respectively on the head-race and tail-race tunnels

PAR

L. ESCANDE

ET

R. HURON

CORRESPONDANT DE L'INSTITUT
INGÉNIEUR I.E.T.
DIRECTEUR DE L'E.N.S.E.H.T.

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES
PROFESSEUR A L'E.N.S.E.H.T.

Stabilité de réglage d'un groupe hydroélectrique encadré, à l'amont par une cheminée d'équilibre disposée à l'aval de la galerie d'amenée, à l'aval par une cheminée d'équilibre disposée à l'extrémité amont du canal de fuite en charge. — Mise en équation du problème et énoncé des conditions de stabilité, suivant la méthode classique. — Parallèle entre ces conditions et les conditions de THOMA relatives à chacune des deux cheminées considérées isolément. — Application : dans une installation donnée, on considère successivement cinq jeux de perte de charge dans les ouvrages d'amenée et de fuite, et on étudie, dans chaque cas, la hauteur de chute limite au-dessous de laquelle l'installation est instable; comparaison de cette hauteur limite avec celles résultant de la condition de THOMA appliquée à chaque cheminée.

Governing stability of a hydro-electric unit having an upstream surge-tank at the lower end of its head-race tunnel and, on the downstream side, another surge-tank at the upper end of its full-flowing tail-race tunnel. Equating of problem, and statement of stability conditions according to classical method. A parallel is drawn between these conditions and the Thoma conditions applied to each of the two surge-tanks taken separately. Application: five sets of head losses occurring in the head-race and tail-race installations are considered for a given installation and, in each case, the limit head is studied above which the installation becomes unstable; comparison between this head limit and these resulting from the application of the Thoma condition to each surge-tank.

INTRODUCTION

La plupart des centrales modernes comportent un canal d'amenée fonctionnant en charge, et, par suite, une chambre d'équilibre placée en tête des conduites. Certaines sont établies en souterrain, et leur canal de fuite peut, dans certaines conditions, se mettre en charge : on prévoit généralement, dans ce cas, une chambre

d'équilibre à la jonction de la sortie des turbines avec le canal de fuite.

Dans la présente étude, nous examinerons les conditions de stabilité du réglage d'une turbine fonctionnant ainsi entre deux chambres d'équilibre placées, l'une à l'extrémité aval du canal d'amenée, l'autre à l'origine amont du canal de

(*) Cette étude a fait l'objet d'une communication à la Société Hydrotechnique de France, en juin 1953.

fuite (fig. 1). Nous supposons ces chambres à section constante et du type ordinaire, sans étranglement.

FIG. 1

CHAPITRE I

MISE EN ÉQUATIONS DU PROBLÈME

NOTATIONS :

H'_0 est la différence des cotes des niveaux statiques amont et aval.

P_{10} , P_{20} , les pertes de charge dans les canaux d'amenée (P_{10}) et de fuite (P_{20}) pour le débit du régime permanent considéré : Q_0 .

H_0 la différence des cotes des plans d'eau dans les chambres d'équilibre amont et aval, lorsque le régime permanent, de débit Q_0 , est établi.

Z_1 , X_1 , les cotes du plan d'eau amont, à l'instant t , au-dessus du niveau statique (Z_1) ou du niveau dynamique de régime permanent ($X_1 = Z_1 + P_{10}$) correspondant.

Z_2 , X_2 , les cotes du plan d'eau aval, à l'instant t , au-dessus du niveau statique (Z_2) ou

du niveau dynamique de régime permanent ($X_2 = Z_2 - P_{20}$) considéré.

Position du problème

Lors d'une variation de régime, telle que celle qui aboutit au régime de débit permanent Q_0 , des oscillations prennent naissance dans les deux chambres d'équilibre. Par suite, la chute sous laquelle fonctionnent les turbines, à l'instant t , n'est pas H_0 , mais :

$$H_0 + X_1 - X_2$$

Avec un réglage normal, le régulateur intervient et modifie la valeur du débit, de manière à maintenir constante la puissance hydraulique, si, comme nous le supposons, la puissance électrique demeure elle-même invariable.

En négligeant les variations de rendement de la conduite et de la turbine avec le débit, on peut définir le débit Q résultant de l'action du régulateur par la relation :

$$Q_0 H_0 = Q (H_0 + X_1 - X_2) \quad (1)$$

Le régulateur modifiant ainsi le débit en fonction des oscillations et ces variations de débit réagissant à leur tour sur les oscillations, le problème consiste à chercher dans quelles conditions le système sera stable, les oscillations de niveau et de débit s'amortissant plus ou moins rapidement.

Introduction des grandeurs relatives

On suppose un arrêt instantané et total des turbines et on suppose aussi que les pertes de charge n'interviennent pas. Les systèmes d'amenée et de fuite peuvent alors être considérés indépendamment l'un de l'autre. Des oscillations se produisent dans les chambres C_1 et C_2 . Leurs amplitudes et périodes respectives sont désignées par :

$$Z_{1*}, Z_{2*}, T_1, T_2$$

Nous poserons, Q étant le débit à l'instant t :

$$U_{10} = V_{10} = \frac{Q_0}{F_1}; \quad W_{10} = \frac{Q_0}{f_1};$$

$$U_1 = \frac{Q}{F_1}; \quad W_1 = \frac{Q}{f_1}; \quad V_1 = \frac{dZ_1}{dt}$$

$$U_{20} = V_{20} = \frac{Q_0}{F_2}; \quad W_{20} = \frac{Q_0}{f_2};$$

$$U_2 = \frac{Q}{F_2}; \quad W_2 = \frac{Q}{f_2}; \quad V_2 = \frac{dZ_2}{dt}$$

On sait que l'on a :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L_1}{g} \frac{F_1}{f_1}}; \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{L_2}{g} \frac{F_2}{f_2}}$$

$$Z_{1*} = W_{10} \sqrt{\frac{L_1}{g} \frac{f_1}{F_1}} = U_{10} \frac{T_1}{2\pi}$$

$$Z_{2*} = W_{20} \sqrt{\frac{L_2}{g} \frac{f_2}{F_2}} = U_{20} \frac{T_2}{2\pi}$$

Si P_1 , P_2 , P_{10} , P_{20} désignent les pertes de charge dans le canal d'amenée et dans le canal de fuite, pour le débit Q et pour le débit Q_0 , on peut introduire les grandeurs relatives classiques de CALAME et GADEN.

$$z_1 = \frac{Z_1}{Z_{1*}}; \quad x_1 = \frac{X_1}{Z_{1*}}; \quad p_{10} = \frac{P_{10}}{Z_{1*}};$$

$$p_1 = \frac{P_1}{Z_{1*}}; \quad h_{10} = \frac{H_0}{Z_{1*}}$$

$$z_2 = \frac{Z_2}{Z_{2*}}; \quad x_2 = \frac{X_2}{Z_{2*}}; \quad p_{20} = \frac{P_{20}}{Z_{2*}};$$

$$p_2 = \frac{P_2}{Z_{2*}}; \quad h_{20} = \frac{H_0}{Z_{2*}}$$

$$u_1 = \frac{U_1}{U_{10}}; \quad v_1 = \frac{V_1}{V_{10}}; \quad w_1 = \frac{W_1}{W_{10}}; \quad t'_1 = \frac{t}{T_1}$$

$$u_2 = \frac{U_2}{U_{20}}; \quad v_2 = \frac{V_2}{V_{20}}; \quad w_2 = \frac{W_2}{W_{20}}; \quad t'_2 = \frac{t}{T_2}$$

Equations du système

La relation (1) peut s'écrire, en tenant compte du fait qu'en pratique X_1 et X_2 sont petits devant H_0 :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{U_1}{U_{10}} = \frac{Q}{Q_0} = \frac{H_0}{H_0 + X_1 - X_2} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{X_1}{H_0} - \frac{X_2}{H_0}} \approx 1 - \frac{X_1}{H_0} + \frac{X_2}{H_0} \\ u_1 &\approx 1 - \frac{\frac{X_1}{Z_{1*}}}{\frac{H_0}{Z_{1*}}} + \frac{\frac{Z_{2*} X_2}{Z_{1*} Z_{2*}}}{\frac{H_0}{Z_{1*}}} \approx 1 - \frac{x_1}{h_{10}} + m \frac{x_2}{h_{10}} \quad (2) \\ m &= \frac{Z_{2*}}{Z_{1*}} = \sqrt{\frac{L_2 f_1 F_1}{L_1 f_2 F_2}} \quad (3) \end{aligned}$$

m est une constante dépendant uniquement des dimensions des ouvrages et non du débit de régime Q_0 considéré.

D'une manière analogue, on aura pour u_2 :

$$u_2 = \frac{U_2}{U_{20}} = \frac{Q}{Q_0} \approx 1 - \frac{1}{m} \frac{x_1}{h_{20}} + \frac{x_2}{h_{20}}$$

On a donc : $u_1 = u_2$, soit :

$$u_1 = u_2 = 1 - \frac{x_1}{h_{10}} + m \frac{x_2}{h_{10}} = 1 - \frac{1}{m} \frac{x_1}{h_{20}} + \frac{x_2}{h_{20}} \quad (4)$$

D'autre part, les équations classiques des oscillations dans les chambres d'équilibre donnent :

Pour (C_1) :

$$\begin{cases} v_1 \frac{dv_1}{dz_1} + \frac{1}{2\pi} \frac{du_1}{dt'_1} + z_1 + p_1 = 0 \\ w_1 = v_1 + u_1; \quad p_1 = p_{10} w_1^2; \quad z_1 = x_1 - p_{10} \end{cases} \quad (5)$$

Pour (C_2) :

$$\begin{cases} v_2 \frac{dv_2}{dz_2} - \frac{1}{2\pi} \frac{du_2}{dt'_2} + z_2 - p_2 = 0 \\ w_2 = u_2 - v_2; \quad p_2 = p_{20} w_2^2; \quad z_2 = x_2 + p_{20} \end{cases} \quad (5')$$

Les relations (4), (5) et (5') constituent les équations du système.

Transformations du système

On a : $dz_1 = dx_1$; $dz_2 = dx_2$, et d'après (2) :

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt'_1} &= -\frac{1}{h_{10}} \frac{dx_1}{dt'_1} + \frac{m}{h_{10}} \frac{dx_2}{dt'_2} = -\frac{1}{h_{10}} \frac{dx_1}{dt'_1} \\ &\quad + \frac{1}{k} \frac{1}{h_{10}} \frac{dx_2}{dt'_2} \end{aligned}$$

en posant $k = \frac{F_2}{F_1}$ et en remarquant que :

$$dt'_1 = \frac{dt}{T_1} = \frac{T_2}{T_1} \frac{dt}{T_2} = \frac{T_2}{T_1} dt'_2 = k m dt'_2$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{V_1}{U_{10}} = \frac{V_1}{2\pi} \frac{T_1}{Z_{1*}} = \frac{1}{2\pi} \frac{dZ_1}{dt} \cdot \frac{T_1}{Z_{1*}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{dz_1}{dt'_1} = \frac{1}{2\pi} \frac{dx_1}{dt'_1} \end{aligned}$$

$$p_1 = p_{10} (v_1 + u_1)^2 = p_{10} \left(v_1 + 1 - \frac{x_1}{h_{10}} + m \frac{x_2}{h_{10}} \right)^2$$

$$p_1 = p_{10} \left(1 + \frac{1}{2\pi} \frac{dx_1}{dt'_1} - \frac{x_1}{h_{10}} + m \frac{x_2}{h_{10}} \right)^2$$

En supposant $x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt'}$ petits, comme dans la théorie classique de THOMA, relative à une seule chambre d'équilibre placée à l'aval du canal d'amenée, on a :

$$p_1 \neq p_{10} \left(1 + \frac{1}{\pi} \frac{dx_1}{dt'_1} - \frac{2x_1}{h_{10}} + m \frac{2x_2}{h_{20}} \right)$$

Par ailleurs :

$$v_1 \frac{dv_1}{dz_1} = v_1 \frac{dv_1}{dt'_1} \cdot \frac{dt'_1}{dx_1} = v_1 \frac{dv_1}{dt'_1} \cdot \frac{1}{2\pi v_1} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2 x_1}{dt_1'^2}$$

En portant dans (5), on a finalement :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt_1'^2} - 2\pi \left(\frac{1}{h_{10}} - 2p_{10} \right) \frac{dx_1}{dt'_1} + 4\pi^2 \\ \left(1 - \frac{2p_{10}}{h_{10}} \right) x_1 = - \frac{2\pi}{h_{10}} \left(\frac{1}{k} \frac{dx_2}{dt'_2} + 4\pi m p_{10} x_2 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Par un calcul analogue, (5') se transforme en :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{dt_2'^2} - 2\pi \left(\frac{1}{h_{20}} - 2p_{20} \right) \frac{dx_2}{dt'_2} \\ + 4\pi^2 \left(1 - \frac{2p_{20}}{h_{20}} \right) x_2 = - \frac{2\pi}{h_{20}} \left(k \frac{dx_1}{dt'_1} + 4\pi \frac{p_{20}}{m} x_1 \right) \end{aligned} \quad (6')$$

avec :

$$t'_1 = k m t'_2$$

REMARQUE. — Ces équations sont, sous une forme différente, équivalentes à celles que donne M. JAEGER, dans son étude générale sur la stabilité des chambres d'équilibre, parue dans la *Schweizerische Bauzeitung* de novembre et décembre 1943.

CHAPITRE II

CONDITIONS DE STABILITÉ

Nouvelle forme des équations du problème

Pour étudier la stabilité, il y a avantage à prendre la même variable indépendante t dans les deux équations :

En remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt_i} &= \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dt}{dt_i} = T_i \frac{dx_i}{dt} \\ \frac{d^2 x_i}{dt_i^2} &= \frac{d}{dt} \left(T_i \frac{dx_i}{dt} \right) \frac{dt}{dt_i} = T_i^2 \frac{d^2 x_i}{dt^2} \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

et en tenant compte que, comme on l'a vu précédemment :

$$mk = \frac{T_2}{T_1}; \quad k = \frac{F_2}{F_1}$$

le système prend la forme :

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_1 \frac{dx_1}{dt} + b_1 x_1 = A_1 \frac{dx_2}{dt} + B_1 x_2 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + a_2 \frac{dx_2}{dt} + b_2 x_2 = A_2 \frac{dx_1}{dt} + B_2 x_1 \end{cases} \quad (7)$$

où nous avons posé :

$$\begin{cases} a_1 = - \frac{2\pi}{T_1} \left(\frac{1}{h_{10}} - 2p_{10} \right), \quad b_1 = \frac{4\pi^2}{T_1^2} \left(1 - \frac{2p_{10}}{h_{10}} \right) \\ a_2 = - \frac{2\pi}{T_2} \left(\frac{1}{h_{20}} - 2p_{20} \right), \quad b_2 = \frac{4\pi^2}{T_2^2} \left(1 - \frac{2p_{20}}{h_{20}} \right) \\ A_1 = - \frac{2\pi}{h_{10}} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{T_2}{T_1^2}, \quad B_1 = - 8\pi^2 \frac{p_{10}}{h_{10}} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{T_2}{T_1^3} \\ A_2 = - \frac{2\pi}{h_{20}} \cdot \frac{F_2}{F_1} \cdot \frac{T_1}{T_2^2}, \quad B_2 = - 8\pi^2 \frac{p_{20}}{h_{20}} \cdot \frac{F_2}{F_1} \cdot \frac{T_1}{T_2^3} \end{cases} \quad (8)$$

Conditions nécessaires et suffisantes de stabilité

Posons :

$$X_1(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} x_1(t) dt$$

$$X_2(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} x_2(t) dt$$

Les fonctions X_1 et X_2 sont les transformées de LAPLACE des fonctions inconnues $x_1(t)$ et $x_2(t)$. D'après les formules classiques du calcul opérationnel, l'image du système (7) est :

$$\begin{aligned} X_1(p^2 + a_1 p + b_1) - X_2(A_1 p + B_1) \\ = p \cdot x_1(0) + x'_1(0) - a_1 x_1(0) - A_1 x_2(0) \\ X_2(p^2 + a_2 p + b_2) - X_1(A_2 p + B_2) \\ = p \cdot x_2(0) + x'_2(0) - a_2 x_2(0) - A_2 x_1(0) \end{aligned} \quad (9)$$

On sait que l'étude de la stabilité repose alors sur l'étude des racines de l'équation :

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p^2 + a_1 p + b_1 & -(A_1 p + B_1) \\ -(A_2 p + B_2) & p^2 + a_2 p + b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

racines qui doivent avoir leurs parties réelles toutes négatives.

En développant le déterminant de (10), on obtient l'équation du quatrième degré :

$$p^4 + \alpha_1 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p + \alpha_4 = 0 \quad (11)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -2\pi \left[\frac{1}{T_1} \frac{1}{h_{10}} - 2p_{10} \right] + \frac{1}{T_2} \left(\frac{1}{h_{20}} - 2p_{20} \right) \\ \alpha_2 &= 4\pi^2 \left[\frac{1}{T_1^2} \left(1 - \frac{2p_{10}}{h_{10}} \right) + \frac{1}{T_2^2} \left(1 - \frac{2p_{20}}{h_{20}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{T_1 T_2} \left[2p_{10} p_{20} - \left(\frac{p_{10}}{h_{20}} + \frac{p_{20}}{h_{10}} \right) \right] \right] \\ \alpha_3 &= -\frac{8\pi^3}{T_1 T_2} \left[\frac{1}{T_1} \left(\frac{1}{h_{20}} - 2p_{20} + \frac{4p_{10} p_{20}}{h_{10}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{T_2} \left(\frac{1}{h_{10}} - 2p_{10} + \frac{4p_{10} p_{20}}{h_{20}} \right) \right] \\ \alpha_4 &= \frac{16\pi^4}{T_1^2 T_2^2} \left[1 - 2 \left(\frac{p_{10}}{h_{10}} + \frac{p_{20}}{h_{20}} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Les conditions *nécessaires et suffisantes*, pour que (11) ait ses racines à parties réelles négatives, c'est-à-dire pour que le système physique étudié soit stable sont alors (conditions de ROUTH) :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_3 > 0, \quad \alpha_4 > 0 \\ \Gamma = \alpha_3^2 - \alpha_1(\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_4) < 0 \end{aligned} \right\} \quad (13')$$

Le problème comportant un grand nombre de paramètres, l'étude générale des conditions (13) à partir des valeurs (12) est très compliquée, mais le passage aux valeurs numériques permet de conclure dans tous les cas.

REMARQUE. — Dans le cas où il paraîtrait intéressant de garder les caractéristiques absolues du système physique, nous donnons ci-dessous, et sans expliciter les calculs, les valeurs des coefficients α_i :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2g}{Q_0} \left[P_{10} \frac{f_1}{L_1} + P_{20} \frac{f_2}{L_2} \right] - \frac{Q_0}{H_0} \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right) \\ \alpha_2 &= 4g^2 \frac{P_{10} P_{20}}{Q_0^2} \cdot \frac{f_1}{L_1} \cdot \frac{f_2}{L_2} - \frac{2g}{H_0} \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right) \\ &\quad \left(P_{10} \frac{f_1}{L_1} + P_{20} \frac{f_2}{L_2} \right) + g \left(\frac{f_1}{L_1 F_1} + \frac{f_2}{L_2 F_2} \right) \\ \alpha_3 &= \frac{2g^2}{Q_0} \cdot \frac{f_1}{L_1} \cdot \frac{f_2}{L_2} \left[\frac{P_{10}}{F_2} + \frac{P_{20}}{F_1} \right] - \frac{g Q_0}{F_1 F_2 H_0} \\ &\quad \left[\frac{f_2}{L_2} + \frac{f_1}{L_1} \right] - \frac{4g^2 P_{10} P_{20}}{H_0 Q_0} \frac{f_1}{L_1} \cdot \frac{f_2}{L_2} \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right) \\ \alpha_4 &= \frac{g^2 f_1 f_2}{F_1 F_2 L_1 L_2} \left(1 - \frac{2P_{10}}{H_0} - \frac{2P_{20}}{H_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

PREMIÈRE REMARQUE

La condition $\alpha_4 > 0$ entraîne la *condition nécessaire* :

$$\frac{p_{10}}{h_{10}} + \frac{p_{20}}{h_{20}} < \frac{1}{2} \quad (15)$$

qui est largement réalisée en pratique.

On sait que, dans le cas d'une seule chambre d'équilibre, la condition de THOMA fixe une limite inférieure pour la section horizontale de la chambre.

Dans notre cas, on obtient une condition analogue en écrivant $\alpha_1 > 0$. A partir des formules (14), on obtient :

$$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} < \frac{2g H_0}{Q_0^2} \left[P_{10} \frac{f_1}{L_1} + P_{20} \frac{f_2}{L_2} \right] \quad (16)$$

Si l'on remarque que les sections limites de THOMA, relatives aux systèmes amont et aval, considérés indépendamment l'un de l'autre, sont données respectivement par les expressions :

$$F_{10} = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_0}{f_1} \right)^2 \frac{L_1 f_1}{H_0 P_{10}}$$

$$F_{20} = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_0}{f_2} \right)^2 \frac{L_2 f_2}{H_0 P_{20}}$$

on voit que la condition (16) peut encore s'écrire :

$$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} < \frac{1}{F_{10}} + \frac{1}{F_{20}} \quad (16')$$

Si donc les deux systèmes satisfont à la condition de THOMA qui leur est propre :

$$(F_1 > F_{10}, \quad F_2 > F_{20}),$$

la condition nécessaire (16) est vérifiée.

Mais cette double vérification de la condition de THOMA n'est pas suffisante pour assurer la stabilité.

En effet, si les deux chambres sont chacune à la limite de leur condition de THOMA propre, le système physique est instable (*). On a, en effet, alors :

$$\frac{1}{h_{10}} - 2p_{10} = 0 \quad \frac{1}{h_{20}} - 2p_{20} = 0 \quad (17)$$

Dans ces conditions, α_3 se réduit à une valeur toujours négative :

$$\alpha_3 = -\frac{8\pi^3}{T_1 T_2} \cdot 4p_{10} p_{20} \left(\frac{1}{T_1 h_{10}} + \frac{1}{T_2 h_{20}} \right)$$

(*) Cette propriété est générale car $-\alpha_1$ est la somme des racines de l'équation (11). Si cette somme est nulle, on a aussi $\mathcal{R}(\sum p_i) = 0$ et il existe forcément des racines à parties réelles positives.

Il en résulte que les deux conditions de THOMA :

$$\frac{1}{h_{10}} - 2 p_{10} \leq 0 \quad \frac{1}{h_{20}} - 2 p_{20} \leq 0$$

ne sont pas suffisantes, mais il est nécessaire que l'une au moins des chambres satisfasse à la condition de THOMA, comme le montre immédiatement la condition (16').

DEUXIÈME REMARQUE.

Dans le cas où la hauteur de chute est assez grande pour que l'influence des oscillations du plan d'eau dans les deux chambres d'équilibre devienne négligeable, le système est évidemment toujours stable.

Il est intéressant de montrer que les conditions (13) mettent en évidence ce résultat.

Supposons, en effet, que l'on ait :

$$\frac{1}{h_{10}} = 0 \quad \frac{1}{h_{20}} = 0$$

on en déduit :

$$\alpha_1 = 4\pi \left(\frac{p_{10}}{T_1} + \frac{p_{20}}{T_2} \right) > 0$$

$$\alpha_2 = 4\pi^2 \left(\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} + \frac{4 p_{10} p_{20}}{T_1 T_2} \right) > 0$$

$$\alpha_3 = \frac{16\pi^3}{T_1 T_2} \left(\frac{p_{20}}{T_1} + \frac{p_{10}}{T_2} \right) > 0$$

$$\alpha_4 = \frac{16\pi^4}{T_1^2 T_2^2} > 0$$

et, après calculs :

$$\Gamma = \alpha_3^2 - \alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_4)$$

$$= - \frac{256\pi^6}{T_1 T_2} \left\{ p_{10} p_{20} \left(\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} \right)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{4 p_{10} p_{20}}{T_1 T_2} \left[p_{10} p_{20} \left(\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} \right) + \frac{p_{10}^2 + p_{20}^2}{T_1 T_2} \right] \right\}$$

ou :

$$\Gamma = \alpha_3^2 - \alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_4) < 0$$

CHAPITRE III. — APPLICATION

Pour un projet donné, on commencera par calculer les sections F_1 et F_2 à donner aux chambres d'équilibre amont et aval, sans se préoccuper du problème de stabilité, et en tenant compte seulement de la limitation de l'amplitude des oscillations à une valeur convenable.

On obtiendra ainsi un système déterminé de valeurs de :

$$\begin{array}{cccccc} Q_0 & & & & & \\ L_1, & f_1, & P_{10}, & F_1, & Z_{1*}, & T_1 \\ L_2, & f_2, & P_{20}, & F_2, & Z_{2*}, & T_2 \end{array}$$

Il restera à vérifier que les cinq conditions de stabilité :

$$\alpha_1 > 0 \quad \alpha_2 > 0 \quad \alpha_3 > 0 \quad \alpha_4 > 0 \quad \Gamma < 0$$

sont satisfaites.

Dans le cas où il n'en serait pas ainsi, il conviendrait de recommencer le calcul en partant de valeurs supérieures des sections F_1 et F_2 .

Nous avons voulu nous rendre compte, dans divers cas particuliers, des valeurs limites H_{OL} de la chute de régime permanent H_0 , au-dessous desquelles le système devient instable, et comparer ces valeurs à celles des hauteurs limites H_{OL_1} et H_{OL_2} fournies par la condition de THOMA pour le système d'amenée d'une part (H_{OL_1}), et pour le système de fuite d'autre part (H_{OL_2}).

Nous sommes partis des éléments suivants, maintenus constants :

$$Q_0 = 20 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\begin{array}{ll} L_1 = 1.000 \text{ m} & L_2 = 700 \text{ m} \\ f_1 = 10 \text{ m}^2 & f_2 = 10 \text{ m}^2 \\ F_1 = 40,8 \text{ m}^2 & F_2 = 79,3 \text{ m}^2 \\ Z_{1*} = 10 \text{ m} & Z_{2*} = 6 \text{ m} \end{array}$$

et nous avons calculé H_{OL} , H_{OL_1} , H_{OL_2} pour cinq groupes différents de valeurs des pertes de charge P_{10} , P_{20} , soit encore, en valeurs relatives p_{10} , p_{20} :

CAS N°	P_{10} m	P_{20} m	p_{10}	p_{20}
1	1	0,36	0,10	0,06
2	0,91	0,36	0,091	0,06
3	0,833	0,36	0,0833	0,06
4	0,70	0,36	0,070	0,06
5	0,50	0,36	0,050	0,06

Les planches I, II, III, IV, V représentent les courbes de variation α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , Γ et mettent en évidence les valeurs de H_{OL} obtenues dans chaque cas, ainsi que celles de H_{OL_1} et H_{OL_2} calculées au moyen de la formule de THOMA.

Le tableau ci-après donne, pour chacun des

PLANCHE I

PLANCHE II

PLANCHE III

PLANCHE IV

PLANCHE V

cinq cas étudiés, les valeurs limites H_{OL} , H_{OL_1} , H_{OL_2} :

CAS N°	H_{OL} m	H_{OL_1} m	H_{OL_2} m
1	61,8	50	50
2	62	55	50
3	59,7	60	50
4	69,5	71,4	50
5	98	100	50

L'examen des résultats obtenus montre que si $H_{OL_1} = H_{OL_2}$, leur valeur commune est inférieure à H_{OL} . Si H_{OL_1} et H_{OL_2} sont différents, H_{OL} est, tantôt supérieur aux deux, tantôt compris entre les deux, mais toujours supérieur au plus petit des deux. Ceci est conforme aux résultats théoriques généraux mis en évidence dans la seconde partie : si la condition de THOMA est réalisée exactement ($F_1 = F_{10}$, $F_2 = F_{20}$) pour le système d'amenée, d'une part, et pour le système de fuite, d'autre part, il n'y a pas stabilité; par ailleurs, lorsqu'il y a stabilité, la condition de THOMA est largement satisfaite, par au moins l'un des deux systèmes.