

# Premiers critères de comparaison des diverses turbo-machines au point de vue des usines marémotrices\*

(Étude complète d'un type donné de collines)

First criteria for comparison of various turbines  
from the point of view of tidal power-stations

PAR R. GIBRAT

INGÉNIEUR EN CHEF DES MINES,  
PROFESSEUR A L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

*Calcul des éléments déterminants d'une colline théorique suffisamment générale pour être superposée de façon très satisfaisante sur les diverses collines expérimentales; suffisamment simplifiée pour permettre le calcul de l'énergie globale produite par les machines correspondantes au cours d'un cycle de vidage optimum; ceci pour une marée et un bassin donnés. — Exemple: pour le barrage de la Rance, la meilleure des turbines envisagées donnerait, avec 13 groupes, la même énergie que la plus mauvaise avec 35 groupes.*

*Calculation of factors determining a theoretical efficiency diagram which is general enough for it to be satisfactorily superimposed on the various experimental efficiency diagrams; it is simple enough to allow calculation of the total energy produced by the corresponding machines during a maximum emptying cycle for a given tide and basin. Example: for the Rance dam, the best of the turbines considered would, with 13 units, give the same energy as the worst with 35 units.*

## I. — POSITION DU PROBLÈME

Nous l'énonçons brièvement, renvoyant à notre article du *Bulletin de la Société Française des Electriciens* (\*\*\*) pour toutes les justifications du présent paragraphe.

Un site d'usine marémotrice est caractérisé par la géométrie de son bassin et la variation de la marée en fonction du temps: soit deux fonctions:

$S(z)$ ,  $z$  cote du plan d'eau,  $S(z)$  surface correspondante.

$h(t)$ ,  $h$  cote de la mer au temps  $t$ .

La hauteur de chute est, en admettant que la surface du bassin est bien horizontale à chaque instant:

$$H = z - h \quad (1)$$

le débit turbiné par les  $n$  turbo-machines en l'absence de vannage est, par exemple, au vidage:

$$nq = -S \frac{dz}{dt} \quad (2)$$

Les propriétés de la turbo-machine sont caractérisées par une colline donnant la puissance  $N$  produite,  $N(q, H)$ . Les courbes de vidage satisfaisant aux conditions d'EULER de rendre maximum l'énergie produite satisfont à l'équation différentielle du second ordre:

$$n \frac{\partial N}{\partial H} + S \frac{d}{dt} \frac{\partial N}{\partial q} = 0 \quad (3)$$

La courbe de vidage nécessite donc la connaissance de deux paramètres.

(\*) Communication présentée à la Société Hydrotechnique de France le 19 juin 1953.

(\*\*) L'énergie des marées. Mai 1953.

En simple effet, le problème de trouver la courbe de vidage assurant le maximum de l'énergie produite depuis une cote de départ donnée  $z_0$ , est résolu par les deux conditions suivantes :

$$\text{au départ } (z_0, t_0), \frac{\partial \eta}{\partial q} = 0$$

( $\eta$  est le rendement de la turbo-machine :

$$N = \eta q H);$$

à l'arrivée  $(z_1, t_1)$ ,  $q = q_0$ ,  $H = H_0$ ;

ces deux quantités sont, dans la colline  $N$ , la hauteur de chute minimum  $H_0$  à laquelle il est possible d'assurer le synchronisme et le débit  $q_0$  correspondant (fig. 1).

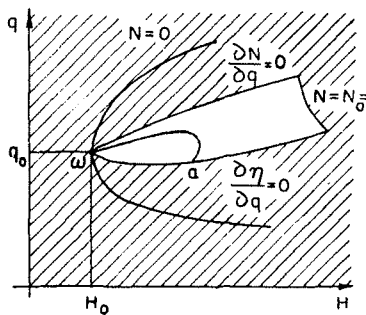


FIG. 1

La trajectoire extrémale du point  $(q, H)$  représentant une phase de vidage en simple effet est donc une courbe  $\alpha \omega$ , le point  $\alpha$  sur la courbe de rendement maximum  $\partial \eta / \partial q = 0$ , le point  $\omega$  en  $(q_0, H_0)$  où l'on a :

$$N = \frac{\partial N}{\partial q} = \frac{\partial \eta}{\partial q} = 0$$

Dans le plan  $(z, t)$  (fig. 2), la trajectoire correspondante est  $A \Omega$ .

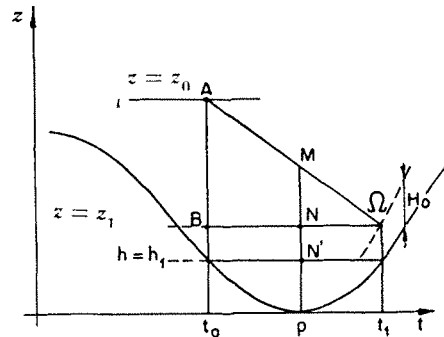


FIG. 2

L'énergie produite est  $E = \int_A^\Omega n N(q, H) dt$ ; la seule région du plan  $(q, H)$  nous intéressant est comprise entre les courbes  $\partial N / \partial q = 0$  et  $\partial \eta / \partial q = 0$ . Une troisième courbe fournira le triangle curviligne à l'intérieur duquel devra se situer la trajectoire du point figuratif  $(q, H)$ : son équation est  $N = N_0$ ,  $N_0$  étant la puissance limite permise par l'alternateur.

Nous avons traité, dans notre article de la Société Française des Electriciens, les problèmes posés par l'utilisation optimum dans les différents cycles d'une turbo-machine donnée. Nous voulons maintenant attaquer une autre série de problèmes en cherchant à chiffrer l'influence, sur l'énergie maximum produite  $E$ , des diverses propriétés de la colline  $N(q, H)$  caractérisant la turbo-machine. Jusqu'ici nous ne pouvons faire état que du théorème évident suivant lequel, si une machine a en chaque point possible  $(q, H)$  un meilleur rendement qu'une autre machine, l'énergie produite sera supérieure. Or, il devient absolument nécessaire, devant les résultats très différents obtenus en essai par les différents constructeurs européens, de chercher un fil conducteur. Nous y arriverons pour un type assez général de collines, sans avoir à faire d'hypothèses simplificatrices sur la forme de la marée choisie ou celle du bassin.

## II. — LIMITATION DU PROBLÈME

Nous nous limiterons ici aux collines telles que  $\partial N / \partial H = a q$ .

I. — En effet, d'une part cette condition conduit à une forme très générale de  $N(q, H)$ , soit :

$$N = a [q H - g(q)],$$

$g(q)$  fonction arbitraire.

Les pertes sont donc de deux sortes : proportionnelles à la puissance hydraulique  $q H$ , et fonctions du débit, donc des vitesses; d'une manière précise, en introduisant les deux paramètres essentiels  $q_0$  et  $H_0$ ,  $N = a [q (H - H_0) - f(q)]$  avec  $f(q_0) = 0$  :

$$\left( \frac{\partial \eta}{\partial q} \right)_{q_0, H_0} = 0 \text{ entraîne } 0 = \left( q \frac{\partial N}{\partial q} - N \right)_{q_0, H_0}$$

d'où :

$$\left( f - q \frac{df}{dq} \right)_{q_0} = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left( \frac{df}{dq} \right)_{q_0} = 0;$$

$q_0$  est donc une racine double de  $f(q)$  et la courbe  $\partial\eta/\partial q = 0$  est l'horizontale de cote  $q_0$ , approximation assez satisfaisante pour les collines étudiées.

On aura enfin :

$$\frac{\partial N}{\partial q} = a \left[ H - H_0 - \frac{df}{dq} \right]$$

Sur la colline relevée expérimentalement, la détermination de  $df/dq$ , puis de  $f(q)$ , sera donc immédiate. En d'autres termes, notre colline simplifiée, déduite des essais réels, sera définie (fig. 3) :

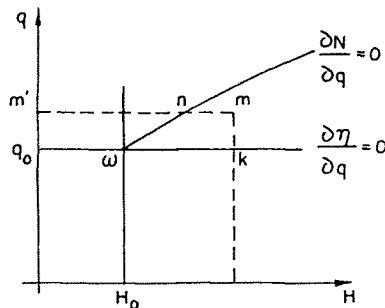


FIG. 3

1. En prenant les coordonnées  $q_0, H_0$  du sommet de la courbe  $N = 0$ ;
2. En remplaçant  $\partial\eta/\partial q = 0$  par la droite d'équation  $q = q_0$ ;
3. En gardant exactement la forme de la deuxième courbe du triangle curviligne  $\partial N/\partial q = 0$ .

Toutes les collines auront, à  $q_0, H_0$  donnés, une semblable répartition des rendements sur la courbe  $\partial\eta/\partial q = 0$ ; on aura en effet, pour  $q = q_0$ ,  $N = aq(H - H_0)$ , d'où  $\eta = a(1 - H_0/H)$  (\*).

Dans ce qui suivra, nous prendrons le paramètre  $a$  égal à l'unité, son influence sur l'énergie produite étant une proportionnalité et répon-

dant au théorème trivial de comparaison des collines, auquel nous avons fait allusion plus haut.

II. — Cette forme  $\partial N/\partial H = q$  donne, d'autre part, une intégrale première de l'extrémale, permettant ainsi le calcul jusqu'au bout; en effet :

$$n \frac{\partial N}{\partial H} + S \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial N}{\partial q} \right) = 0 \quad \text{s'écrit alors :}$$

$$\begin{aligned} nq + S \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial N}{\partial q} \right) \\ = \left[ -\frac{dz}{dt} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial N}{\partial q} \right) \right] S = 0 \end{aligned}$$

d'où l'intégrale première :

$$\frac{\partial N}{\partial q} = z - z_1 = H - H_0 - \frac{df}{dq},$$

elle peut s'écrire :

$$\boxed{h_1 - h = dq} \quad (1),$$

équation fondamentale de notre problème.

$h_1 = h(t_1) = z_1 - H_0$  est la cote de la mer à l'époque d'arrivée.

Géométriquement, cela signifie que pour un point  $m(q, H)$  de l'extrémale (fig. 3) correspondant à  $M(z, t)$  de la figure 2.

$$m n = H - \left( H_0 + \frac{df}{dq} \right) = z - z_1,$$

$$\text{d'où : } m n = M N$$

liaison remarquablement simple entre les deux graphiques  $(q, H)$  et  $(z, t)$ . En particulier au point de départ  $AB = a\omega$ , de plus  $df/dq$  y est nul puisque  $q$  est égal à  $q_0$ , par suite :

$$h(t_0) = h(t_1) :$$

aux époques de départ et d'arrivée, la mer, pour l'extrémale de simple effet, a la même cote, résultat déjà démontré dans nos études antérieures, mais qui ici intervient naturellement.

III. — Nous négligerons enfin l'influence du troisième côté du triangle curviligne, due à la limitation de puissance de l'alternateur, influence d'ailleurs faible dans les conditions actuelles pour une marée moyenne (coefficient 70 par exemple).

(\*) Notons au passage que notre schématisation rejette à l'infini le sommet de la colline des rendements. Sur ce point notre limitation du problème nous éloigne peu des cas concrets en fait.

### III. — CALCUL DE L'ÉNERGIE ET DE SA VARIATION

Le cote de départ est définie, grâce à l'équation différentielle :

$$- \frac{S dz}{dt} = n q,$$

par la relation intégrale :

$$\left[ \frac{V(z_0)}{n} = \frac{V(z_1)}{n} + \int_{t_0}^{t_1} q dt \right] \quad (II)$$

V(z) étant le volume retenu dans le bassin au-dessus d'une cote arbitraire prise pour origine :

$$V(z) = \int S(z) dz.$$

L'énergie produite au vidage, depuis une cote de départ définie z<sub>0</sub>, est :

$$E = n \int_{t_0}^{t_1} N(q, H) dt$$

Nous transformerons cette intégrale de manière à mettre en évidence les diverses variables :

$$\begin{aligned} n N dt &= n [q (H - H_0) - f(q)] dt \\ &= n q (z - z_1) dt + n [q (h_1 - h) - f(q)] dt \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} E &= + \int_{z_1}^{z_0} (z - z_1) S(z) dz \\ &\quad + n \int_{t_0}^{t_1} [q (h_1 - h) - f(q)] dt \end{aligned}$$

La première intégrale représente l'énergie produite à rendement unité entre les côtes z<sub>1</sub> et z<sub>0</sub>. La deuxième est une fonction de t à prendre suivant une extrémale et facile à simplifier par une intégration convenable par parties ;

en effet :

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \left[ q (h_1 - h) - f(q) \right] dt \\ &= \left\{ t \left[ q (h_1 - h) - f(q) \right] \right\}_{t_0}^{t_1} \dots \\ &\dots - \int_{t_0}^{t_1} t dq \left( h_1 - h - \frac{df}{dq} \right) + \int_{t_0}^{t_1} t q dh; \end{aligned}$$

or, pour t<sub>0</sub> ou t<sub>1</sub>, h = h<sub>1</sub> et f(q) = f(q<sub>0</sub>) = 0 ; d'autre part, sur l'extrémale, h<sub>1</sub> - h - df/dq = 0 ;

il ne reste donc que le dernier terme : d'où l'expression élégante :

$$\left[ \frac{E}{n} = \int_{z_1}^{z_0} \frac{(z - z_1) S(z) dz}{n} + \int_{t_0}^{t_1} t q dh \right] \quad (III)$$

Si l'équation de la courbe ∂N/∂q = 0 est mise sous la forme q - q<sub>0</sub> = φ(H - H<sub>0</sub>), l'équation d'une extrémale est :

$$q - q_0 = \varphi(h_1 - h)$$

et si :

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(x) dx,$$

on aura :

$$\int_{t_0}^{t_1} t q dh = q_0 \int_{t_0}^{t_1} (h_1 - h) dt + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(h_1 - h) dt$$

On utilisera par exemple un développement en série de φ sous la forme :

$$\begin{aligned} q - q_0 &= b_1 (H - H_0) + b_2 \frac{(H - H_0)^2}{2} + \dots \\ &\quad + b_m \frac{(H - H_0)^m}{m!} + \dots \end{aligned}$$

Finalement, introduisons :

1. Les fonctions suivantes dépendant de la courbe de marée et du paramètre h<sub>1</sub> :

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{t_0}^{t_1} dt ; \quad A_1 = \int_{t_0}^{t_1} (h_1 - h) dt ; \dots \\ \dots \dots A_m &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{(h_1 - h)^m}{m!} dt \end{aligned}$$

avec :

$$\frac{\partial A_m}{\partial h_1} = A_{m-1}$$

(nous rappelons que h(t<sub>1</sub>) = h(t<sub>0</sub>) = h<sub>1</sub>) ;

2. Les fonctions suivantes dépendant de la forme du bassin et du paramètre z<sub>1</sub> = h<sub>1</sub> + H<sub>0</sub> :

$$\begin{aligned} \alpha(z_1) &= \int_{z_1}^{z_0} \frac{(z - z_1) S(z) dz}{n} \quad \text{et} \\ \beta(z_1) &= \int_{z_1}^{z_0} \frac{S(z) dz}{n} \end{aligned}$$

avec :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z_1} = -\beta$$

Nous aurons les formules déduites de II et III :

$$\begin{cases} \frac{E}{n} = \alpha(z_1) + q_0 A_1 + \sum_1 b_m A_{m+1} \\ 0 = -\beta(z_1) + q_0 A_0 + \sum_1 b_m A_m \\ \equiv \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{E}{n} \right) \end{cases} \quad (IV)$$

avec :

$$\frac{\delta E}{n} = -\beta \delta h_0 + A_1 \delta q_0 + \sum A_{m+1} \delta b_m$$

car le coefficient du terme en  $\delta h_1$  est :

$$[-\beta + q_0 A_0 + \sum_1 b_m A_m]$$

donc nul d'après la deuxième équation (IV).

Les dérivées partielles de  $E/n$  en fonction des caractéristiques de la colline sont donc très simples :

$$\left[ \frac{1}{n} \frac{\partial E}{\partial H_0} = -\beta ; \frac{1}{n} \frac{\partial E}{\partial q_0} = A_1 ; \frac{1}{n} \frac{\partial E}{\partial b_m} = A_{m+1} \right] \quad (V)$$

On peut y ajouter la dérivée partielle par rapport à  $z_0$ , elle est immédiate d'après (III) :

$$\frac{\partial E}{\partial z_0} = (z_0 - z_1) S(z_0)$$

La fonction  $(1/n) E(q_0, b_1, \dots b_m)$  est donc représentée par une surface développable : raisonnons sur le cas de deux paramètres  $q_0$  et  $b_1$ , supposant  $b_2, \dots b_m$  nuls et  $H_0$  constant. La surface représentant  $(1/n) E(q_0, b_1)$  est coupée par le plan vertical :

$$q_0 A_0 + b_1 A_1 = \beta(z_1)$$

correspondant à une valeur donnée du paramètre  $t_1$  (donc de  $z_1 = h(t_1) + H_0$ ) suivant une ligne le long de laquelle l'orientation du plan tangent à la surface est unique puisque :

$$\frac{1}{n} \frac{\partial E}{\partial q_0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \frac{\partial E}{\partial b_1}$$

ne dépendent que de  $t_1$ , ici constant : cette ligne, en tous les points de laquelle la tangente a même direction (intersection du plan vertical et du plan tangent), est une droite, et la surface réglée, lieu de cette droite, est développable, puisqu'à chaque génératrice correspond un seul plan tangent.

On peut engendrer aisément cette surface en

faisant partir de chaque point de sa section  $\Gamma$  par le plan  $b_1 = 0$  une droite de paramètres directeurs définis.

La section  $\Gamma$  correspond aux collines où le triangle curviligne est infiniment aplati.

L'équation paramétrique de cette section  $\Gamma$  est :

$$(\Gamma) \begin{cases} \frac{E}{n} = \alpha + \beta \frac{A_1}{A_0} \\ q_0 = \frac{A_0}{\beta} \end{cases}$$

La droite au point du paramètre  $t_1$  est parallèle à :

$$\frac{E/n}{A_2} = \frac{q_0}{-(A_1/A_0)} = \frac{b_1}{1}$$

Le cône directeur de la surface s'obtient en éliminant  $t_1$  entre ces équations : il sera de la forme :

$$\frac{E}{n q_0} = F\left(\frac{b_1}{q_0}\right)$$

En prenant pour origine des cotes la marée basse, celle-ci correspondra à  $h_1 = 0$ .

Or,  $h_1$  est nul si  $q_0$  est infini ; à ce moment,  $E$  atteint son maximum (égal à la moitié de l'énergie que nous avons appelée ailleurs énergie naturelle) :

$$(E)_{\max} = \int_0^{z_0} z S(z) dz$$

Cette valeur est atteinte asymptotiquement pour  $q_0$  infiniment grand.

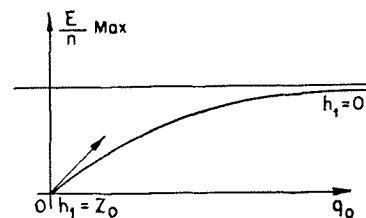


FIG. 4

$q_0$  sera nul pour  $h_1 = z_0$  si ceci est possible ; à ce moment,  $\alpha$  et  $\beta$  sont nuls et l'énergie  $E$  sera nulle aussi.

On a, d'une manière générale :

$$\frac{d(E/n)}{d h_1} = -\beta \frac{A_1 A'_0}{A_0^2} - \frac{S(z_1)}{n} \cdot \frac{A_1}{A_0} < 0$$

avec :

$$A'_0 = \frac{1}{h'_1} - \frac{1}{h'_0} > 0$$

car :

$$\frac{d(E/n)}{dh_1} = \frac{\partial(E/n)}{\partial h_1} + \frac{\partial(E/n)}{\partial q_0} \frac{dq_0}{dh_1}$$

$$\frac{\partial(E/n)}{\partial h_1} = -\beta + q_0 A_0$$

et :

$$\frac{dq_0}{dh_1} = -\frac{S(z_1)}{n} \cdot \frac{1}{A_0} - \frac{A'_0}{A_0^2} \cdot \beta < 0$$

Par conséquent,  $q_0$  et  $E$  décroissent continûment quand  $h_1$  croît; on retrouve bien :

$$\frac{\partial(E/n)}{\partial q_0} = + A_1,$$

la pente à la courbe  $\Gamma$  décroît donc continûment depuis sa valeur à l'origine jusqu'à l'asymptote.

La variation  $(E/n) [b_1]$  pour  $q_0 = 0$  aurait exactement la même asymptote, mais on aurait ici :

$$\frac{\partial(E/n)}{\partial b_1} = A_2$$

La surface pourrait être engendrée par la droite s'appuyant sur les deux courbes aux points de même paramètre  $h_1$ .

En résumé, il n'y a aucune difficulté pour un bassin et une marée donnés à construire graphiquement de façon rigoureuse les lignes de niveau  $E(q_0, b_1) = \text{constante}$  dans le système de coordonnées  $q_0, b_1$ ; elles auront la forme de la figure 5.

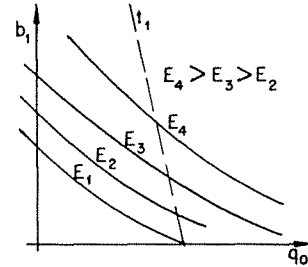


FIG. 5

Le réseau de droites  $t_1 = C^te$  pourra être tracé sur cette figure, résolvant ainsi complètement le problème.

Il n'y aurait aucune difficulté à étendre ces considérations au cas de plus de deux paramètres.

#### IV. — RETOUR AU CAS GÉNÉRAL

Reprenant le même type de calcul, nous pouvons écrire, sans diminuer la généralité de nos calculs :

$$N(q, H) = q(H - H_0) - M(q, H)$$

avec :

$$M(q_0, H_0) = \frac{\partial M}{\partial q}(q_0, H_0) = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial q} = H - H_0 - \frac{\partial M}{\partial q} \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial H} = q - \frac{\partial M}{\partial H}$$

Notre cas particulier précédent revient à  $\partial M / \partial H = 0$ . Nous allons chercher à mettre en évidence l'influence de ce terme non nul dans le cas général.

L'équation des extrémales est :

$$n \frac{\partial N}{\partial H} + S \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial N}{\partial q} \right) = n \left( q - \frac{\partial M}{\partial H} \right) + S \frac{d}{dt} \left( H - \frac{\partial M}{\partial q} \right) = 0$$

d'où :

$$\frac{\partial M}{\partial q} = h_1 - h - \int_t^{t_1} \frac{n}{S} \frac{\partial M}{\partial H} dt$$

$h_1$  étant la valeur de  $h$  correspondant à l'époque d'arrivée  $t_1$  où  $\partial M / \partial q$  est nul.

Nous poserons :

$$\frac{\partial M}{\partial q} = h_1 - h - \chi$$

avec :

$$\chi = \int_t^{t_1} \frac{n}{S} \frac{\partial M}{\partial H} dt = \int_{z_1}^z \frac{1}{q} \frac{\partial M}{\partial H} dz$$

Le même processus appliqué à l'énergie nous donnera ici :

$$E = \int_{z_1}^{z_0} (z - z_1) S(z) dz + n \int_{t_0}^{t_1} [q(h_1 - h) - M] dt$$

L'intégration par parties donne ici :

$$\int_{t_0}^{t_1} [q(h_1 - h) - M] dt = \left\{ t [q(h_1 - h) - M] \right\}_{t_0}^{t_1} \dots$$

$$\dots - \int_{t_0}^{t_1} t dq \left( h_1 - h - \frac{\partial M}{\partial q} \right) + \int_{t_0}^{t_1} t q dh$$

En  $t_1$ ,  $[q(h_1 - h) - M]^{t_1}$  est nul. Par contre, en  $t_0$  (point de départ), la relation de transversalité est :

$$N - q \frac{\partial N}{\partial q} = q \frac{\partial M}{\partial q} - M = 0$$

et l'extrémale donne :

$$h_1 - h_0 - \left( \frac{\partial M}{\partial q} \right)_0 = \chi(t_0)$$

Le résultat global est donc :

$$\frac{E}{n} = \int_{z_1}^{z_0} \frac{(z - z_1) S(z) dz}{n} - t_0 q(t_0) \chi(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} t \chi dq + \int_{t_0}^{t_1} t q dh$$

L'expression :

$$- t_0 q(t_0) \chi(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} t \chi dq$$

se simplifie encore par une intégration par parties : tenant compte de  $\chi(t_1) = 0$ , elle vaut :

$$\int_{t_0}^{t_1} q d(t\chi)$$

il reste donc :

$$\frac{E}{n} = \int_{z_1}^{z_0} \frac{(z - z_1) S(z) dz}{n} + \int_{t_0}^{t_1} t q dh + \int_{t_0}^{t_1} q d(t\chi) \tag{VI}$$

La dernière intégrale représente l'influence du terme  $\partial M / \partial H$ . Cette formule sera sans doute à la base d'extensions intéressantes de notre théorie actuelle.

### V. — RÉSULTATS PRATIQUES

Nous résumons tous les résultats obtenus permettant de comparer les collines de type choisi pour le simple effet au vidage pour une marée donnée.

Il s'agit de comparer des collines du type :

$$\frac{\partial N}{\partial H} = aq$$

ou encore :

$$N = a [q(H - H_0) - f(q)]$$

$$\text{où } f(q_0) = \frac{df}{dq}(q_0) = 0$$

Leur triangle curviligne a comme sommet le point  $\left\{ \begin{array}{l} H = H_0 \\ q = q_0 \end{array} \right.$  ;

la courbe  $\frac{\partial \eta}{\partial q} = 0$  est la droite  $q = q_0$  ;

la courbe  $\frac{\partial N}{\partial q} = 0$  est définie par  $H - H_0 = \frac{df}{dq}$ .

Une première approximation prend la courbe

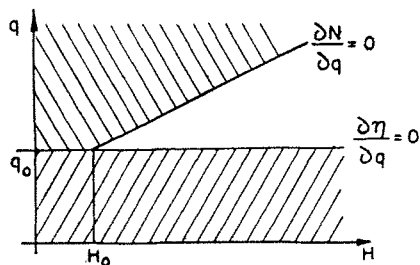


FIG. 6

$\partial N / \partial q = 0$  comme une droite : son équation sera :

$$q - q_0 = b(H - H_0).$$

les divers équipements possibles d'une usine avec  $n$  turbo-machines identiques se différencieront donc par les paramètres :

$$a, nq_0 H_0, nb$$

Nous avons à calculer :

1° A partir des données de la marée choisie  $h(t)$  (coefficient 70 par exemple) les trois fonctions de  $h_1$  (ou de  $t_1$ ) :

$$A_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt ; \quad A_1 = \int_{t_0}^{t_1} (h_1 - h) dt ;$$

$$A_2 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{(h_1 - h)^2 dt}{2}$$

2° A partir des caractéristiques du bassin pour une cote de départ donnée  $z_0$ , par exemple celle de la marée haute :

$$n \alpha(z_1) = \int_{z_1}^{z_0} (z - z_1) S(z) dz ; \quad n \beta(z_1) = \int_{z_1}^{z_0} S(z) dz$$

Nous avons :

$$z_1 = h_1 + H_0$$

l'énergie produite dans un vidage optimum est :

$$E = [n \alpha(z_1) + nq_0 A_1 + nb A_2] \cdot a \tag{VII}$$

$$0 = - n \beta(z_1) + nq_0 A_0 + nb A_1$$

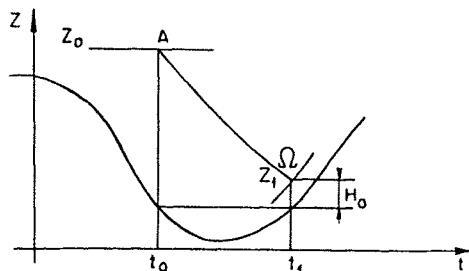


FIG. 7

$E(nq_0, nb)$  s'obtient par élimination de  $h_1$  entre les deux équations.

On construira dans le diagramme  $(nq_0, nb)$  pour une valeur donnée de  $H_0$  les droites  $(d_1), nq_0 A_0 + nb A_1 = n\beta(z_1)$  correspondant chacune à une valeur du paramètre  $t_1$ .

Sur une de ces droites  $(d_1)$ , la variation de  $E$  sera linéaire et la pente de la tangente aux courbes  $E/a = Cte$  est donnée par la relation :

$$\frac{d(nb)}{d(nq_0)} = -\frac{A_1}{A_2}$$

elle est donc constante le long de la droite  $(d_1)$ .

On construira ainsi, à l'aide de quelques droites  $(d_1)$ , le réseau des courbes :

$$e = \frac{1}{a} E(nq_0, nb) = \text{constante.}$$

(voir fig. 8 et fig. 9.)

D'autre part, on calculera les valeurs de  $E(0, nb)$  et  $E(nq_0, 0)$ .

Elles ont la forme des courbes de la figure 8, la discussion du paragraphe 3 s'appliquant sans difficulté et montrant en particulier que :

$$E(0, 0) = 0$$

### VI. — INFLUENCE DU COEFFICIENT DE MARÉE CHOISI

Les calculs précédents supposent une marée-type d'équation :

$$h = h_0 \psi(t)$$

$\psi(t)$  étant, pour une marée sinusoïdale, égal à  $\sin 2\pi t/T$  et l'origine des cotes étant ainsi la marée moyenne,  $h_0$  dans le cas général définira le coefficient.

Nous aurons intérêt alors à poser :

$$B_1 = \int_{t_0}^{t_1} [\psi(t_1) - \psi(t)] dt ;$$

$$\begin{aligned} \frac{E(\infty, nb)}{a} &= \frac{E(nq_0, \infty)}{a} \\ &= \int_0^{\infty} z S(z) dz = \frac{1}{2} \text{énergie naturelle} \end{aligned}$$

La comparaison entre deux collines de paramètres  $(a, nq_0, nb)$  différents sera ensuite immédiate grâce à ce graphique.

Les variations de  $H_0$  seront toujours faibles, comme le montrent les différents essais, il suffira donc d'en tenir compte par la relation :

$$\frac{A}{a} \frac{\partial E}{\partial H_0} = -n\beta(z_1)$$

$z_1$  étant lu sur le graphique  $(1/a) E(nq_0, nb)$ . Les courbes  $(1/a) (\partial E/\partial H_0)$  constante sont dans les courbes  $t_1 = Cte$ .

Naturellement, si on estimait  $\partial N/\partial q$  mieux représenté par une courbe du second degré du type  $(q - q_0) = (C/2)(H - H_0)^2$ , il suffirait d'introduire  $A_3$  dans les équations suivant les formules (IV) et rien ne serait changé. Certaines collines paraissent mieux représentées par cette forme, mais nos travaux sont peu avancés dans cette direction.

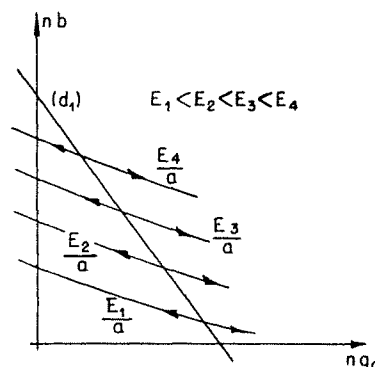


FIG. 8

$$B_2 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{[\psi(t_1) - \psi(t)]^2 dt}{2}$$

avec  $A_1 = h_0 B_1$ ,  $A_2 = h_0^2 B_2$ ; par homogénéité nous posons aussi :

$$B_0 = A_0$$

et les équations (VII) deviendront :

$$\begin{cases} \frac{E}{a n} = \alpha(z_1) + h_0 [q_0 B_1 + b h_0 B_2] \\ 0 = -\beta(z_1) + q_0 B_0 + b h_0 B_1 \end{cases} \quad \text{(VIII)}$$



Sous réserve de prendre des coordonnées homogènes  $q_0$  et  $b h_0$  en lieu et place de  $q_0$  et  $b$ , les droites ( $d_1$ ) seront identiques quelle que soit

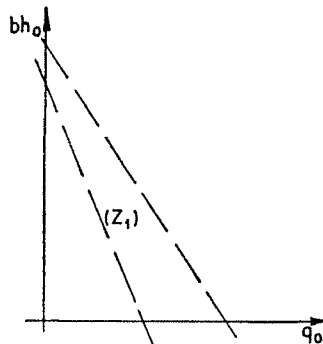


FIG. 8 bis

la marée donnée  $h_0$ . On aura donc géométriquement le même réseau de droites ( $d_1$ ), mais elles seront cotées différemment : la valeur de  $z_1$  caractérisant chaque droite changera, de même la tangente en un point de la droite à la courbe  $E/a n = \text{constante}$ , sera bien la même tout le long de la droite :

$$\frac{d(b h_0)}{d q_0} = - \frac{B_1}{B_2} = \text{fonction de } z_1$$

Sous cette réserve et celle de ne pas tenir compte de la limitation de puissance de l'alternateur, on peut considérer comme résolu le problème posé de la comparaison des collines, lorsque celles-ci sont ramenées à la forme :

$$N = a \left[ q (H - H_0) - \frac{(q - q_0)^2}{2 b} \right]$$

## VII. — COMPARAISON SOMMAIRE

Si les collines correspondent à une même valeur de  $a$  et à des valeurs voisines de  $q_0$  et de  $b$ , leur ordre de préférence sera donné par le sens de la variation :

$$A_1 \delta q_0 + A_2 \delta b \quad \text{ou} : \quad \delta q_0 + \frac{A_2}{A_1} \delta b$$

D'autre part, les collines étudiées correspondent à peu près pour les marées moyennes à l'arrivée à mi-marée, et pour une marée sinusoïdale on a alors :

$$A_1 = \frac{T h_0}{\pi} \quad , \quad A_2 = \frac{T h_0^2}{4}$$

$h_0$  désignant la demi-amplitude de la marée considérée.

L'ordre de préférence sera donc donné par le signe de la variation :

$$\delta q_0 + \frac{\pi h_0}{4} \delta b$$

Cette formule, appliquée à des variations non infiniment petites, donnera tout de même une indication précieuse, la correction pour  $a$  se faisant ensuite aisément.

Ainsi la colline d'un premier constructeur pour Cambeyrac correspond à peu près à :

$$H_0 = 1,2 ; \quad q_0 = 27 \text{ m}^3/\text{s} ; \quad b = 13 \text{ m}^2/\text{s}$$

La colline d'un deuxième constructeur donne :

$$H_0 = 1,1 ; \quad q_0 = 42 ; \quad b = 2,8$$

La marée 70 donne :

$$h_0 = 4,25 \text{ environ}$$

Le critère  $\delta q_0 + (\pi h_0/4) \delta b$  donne, en passant du premier au second :

$$15 - 34 < 0.$$

Il est donc très favorable au premier. En fait, étant donné la grande variation du rapport  $q_0/b$  passant de 2 à 15, il paraît nécessaire de construire le graphique  $E/a n = \mathcal{E}(q_0, b)$  et de tenir compte de la valeur différente de  $a$ , le second ayant meilleur rendement maximum. D'autre part, des modifications de la vitesse de rotation de la turbo-machine peuvent modifier la conclusion. L'utilisation des formules VII et VIII est donc nécessaire.

## VIII. — APPLICATION

La figure 9 représente l'application au bassin de la Rance pour une marée de coefficient 70. En abscisse  $nq_0$ , en ordonnée  $nb$ ,  $n$  étant le nombre de groupes identiques formant l'équipement,

les droites en trait plein représentent les valeurs de l'énergie maximum obtenue en simple effet par vidage, les droites en pointillé donnent les variations  $\partial e / \partial H_0$ . Ainsi pour  $nq_0 = 1.000 \text{ m}^3/\text{s}$

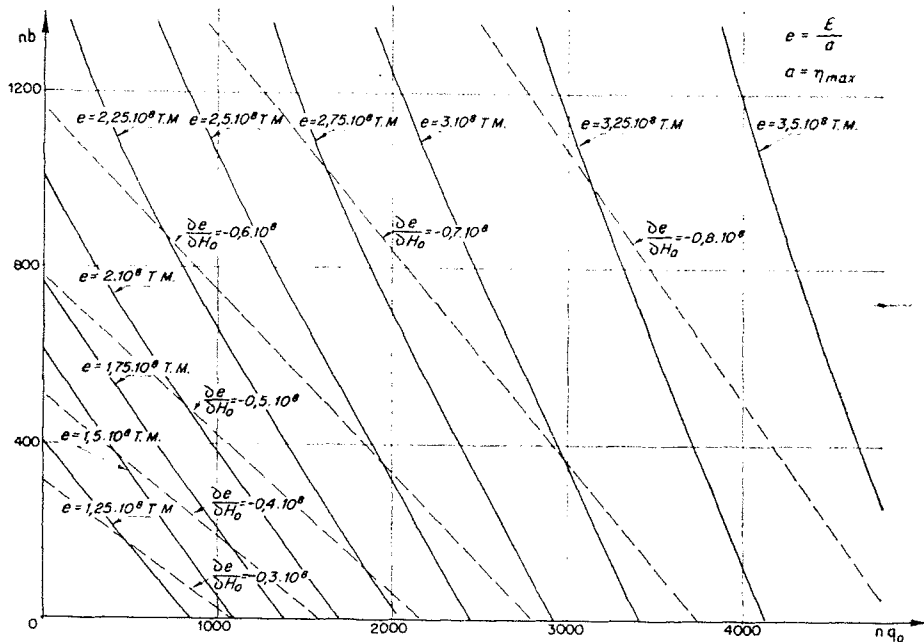


FIG. 9.

COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES FORMES DE TURBINES.

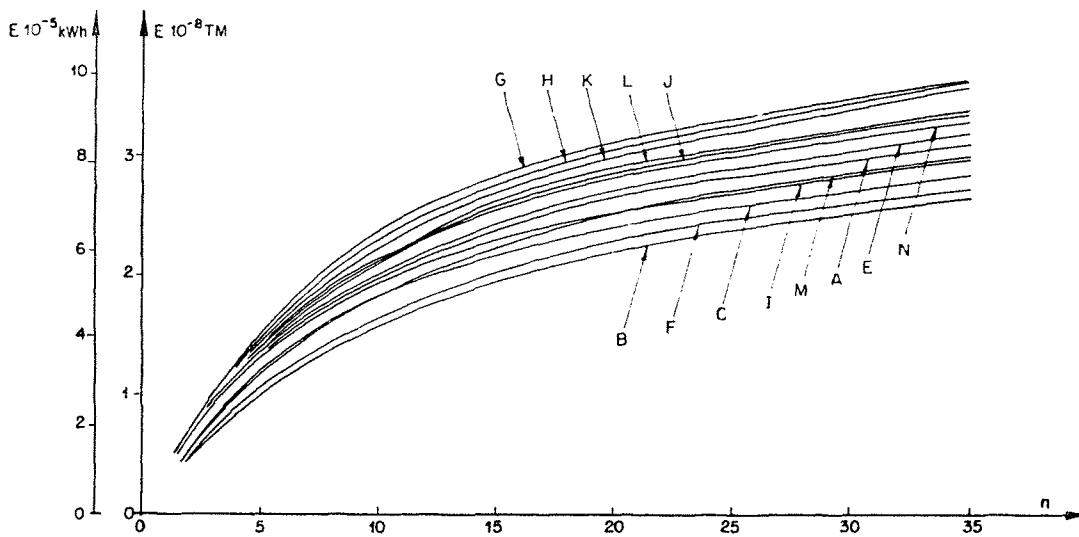


FIG. 10.

COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES FORMES DE TURBINES.

Une forme de turbine (désignée par l'une des lettres A, B, C..., etc.) ayant été essayée et ayant donné lieu à la détermination d'une colline de rendement de sommet  $\eta_{max}$ , on a calculé (en admettant certaines simplifications de formules) :

- 1° A quelle vitesse  $v$  en tours par minute doit tourner une turbine de cette forme, dont la roue a le diamètre de 7,5 m, pour que la hauteur de chute de marche à vide soit exactement de 1,2 m;
- 2° Quelle production  $E$  donneraient, pour une marée de coef. 70,  $n$  de ces turbines ( $n = 5-10-15...$ , etc.) installées sur le barrage Rance, fonctionnant en simple effet au vidage.

Le graphique ci-dessus donne, pour chaque type de turbine, la variation de  $E$  en fonction de  $n$ .

L'équation de la colline des puissances étant schématisée sous la forme

$$N(q, H) = \eta_{max} \left[ q(H - H_0) - \frac{(q - q_0)^2}{2b} \right]$$

la formule utilisée est :

$$E := \eta_{max} e(nq_0, nb)$$

et  $nb = 800$ , une augmentation de 10 cm pour  $H_0$ , hauteur minimum de synchronisme, correspond à une diminution de 3 % environ de l'énergie maximum.

La figure 10 donne pour chacune des turbines

la moins bonne donne avec 35 groupes la même énergie que la meilleure avec 13 groupes, or toutes étaient considérées a priori comme équivalentes.

Il resterait maintenant à pousser la compa-

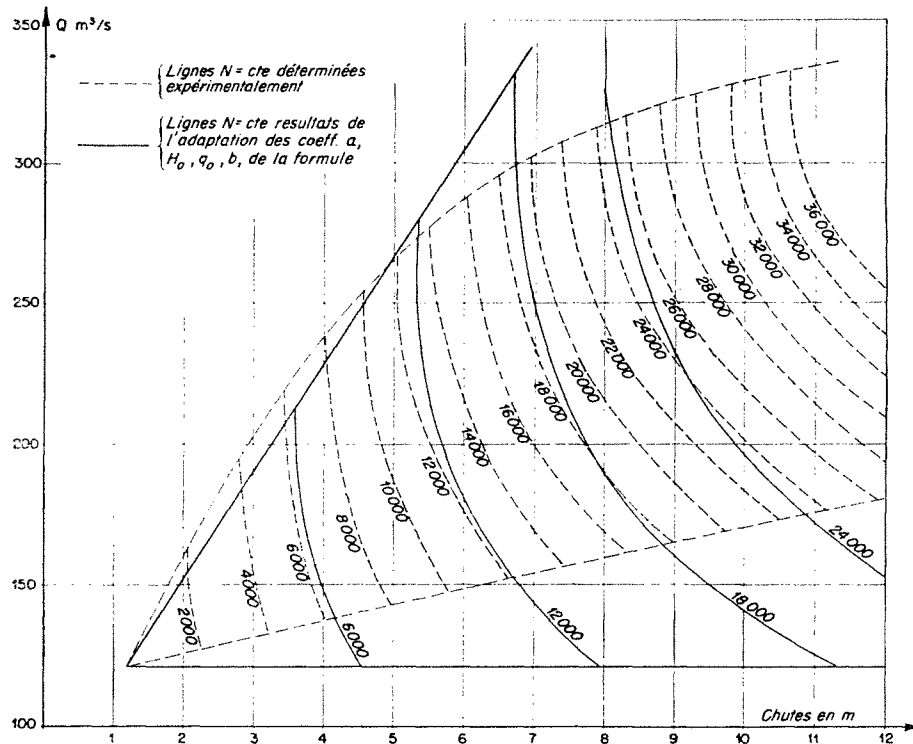


Fig. 11

EXEMPLE DE SCHÉMATISATION D'UNE COLLINE DES PUISSANCES PAR UNE FORMULE DU TYPE :

$$N = a \left[ q (H - H_0) - \frac{(q - q_0)^2}{2b} \right]$$

essayées la variation de l'énergie productible en fonction du nombre de groupes installés. On constate d'une part pour un même type de turbine l'influence rapidement décroissante d'une turbine supplémentaire et d'autre part l'importance considérable du choix de la turbine. Ainsi

raison entre les collines réelles et les collines définies ici. Ceci sera l'objet de prochaines publications, mais nous avons voulu, dès maintenant, présenter un moyen très rapide de comparaison des diverses collines fournies par les divers constructeurs.