



COMMENTAIRES ET DISCUSSIONS

COMMENTS AND DISCUSSIONS

Écoulement permanent dans les canaux convergents et divergents^(*)

Steady flow in contracted
and expanded rectangular channels^(*)

Dans l'un des récents numéros de *la Houille Blanche* a paru un article fort intéressant de MM. ENGELUND et MUNCH-PETERSEN concernant les ondes du genre « de MACH » dans les canaux.

Les ondes dans les canaux et, d'une façon générale, les ondes de surface libre, ont un inté-

rêt considérable en hydraulique; c'est pourquoi nous croyons devoir vous faire part de quelques-unes des remarques que nous suggère (**) l'article en question. Ces remarques peuvent se classer de la façon suivante :

1. Méthode élémentaire de calcul des angles des ondes de MACH de faible amplitude;
2. Remarques diverses à propos des ondes de MACH;
3. Etude de l'ensemble des perturbations de faible amplitude dans un canal (ondes de MACH et houle).

(*) *La Houille Blanche*, n° 4, 1953; p. 464 (English text); p. 475 (French text).

(**) Nous avons eu l'occasion de discuter longuement de ces problèmes avec M. BIESEL, ingénieur au Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique, qui nous a fait part de plusieurs remarques particulièrement intéressantes.

I. — CALCUL DES ANGLES ET DES ONDES DE MACH PAR UNE MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE

Considérons un bassin très grand de profondeur uniforme, dans lequel coule de l'eau, à la vitesse u_m , parallèlement à l'axe Ox . En plus, une houle régulière se propage dans ce bassin. Les lignes des crêtes de houle forment un angle θ avec l'axe Ox . Si la célérité de cette houle par rapport à l'eau (*) est $u_m \sin \theta$, les crêtes de la houle semblent immobiles : en effet, elles se déplacent en glissant sur elles-mêmes : figure 1.

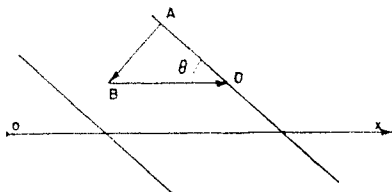


FIG. 1

AB est la vitesse relative de A; BD la vitesse d'entraînement; AD est donc la vitesse absolue.

Superposons à cette houle une autre de même célérité (donc de même longueur d'onde), mais dont les lignes de crête sont symétriques des premières par rapport à Ox : on obtient une houle gauffrée immobile (fig. 2).

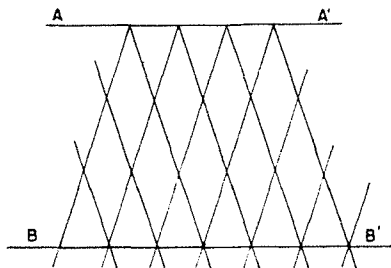


FIG. 2

Les lignes AA' et BB' sont des lignes de symétrie de la figure. Sur ces droites, les orbites des houles sont égales et en phase : la vitesse de l'eau y est parallèle à Ox . On peut donc placer « des tôles » verticales dans le bassin passant par AA' et BB' sans perturber l'écoulement (principe de métallisation bien connu en électricité). On constitue ainsi un canal dans lequel il existe des ondes de MACH. La largeur D de ce canal est liée à la longueur d'onde L et à l'angle θ : fi-

gure 3. On a $BC = L$: longueur d'onde ; $DE = b/n$; n entier, b , largeur du canal.

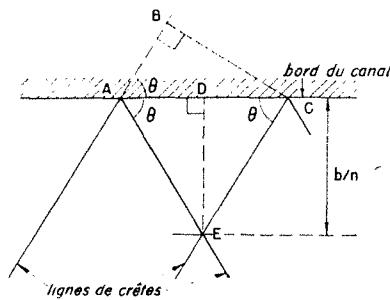


FIG. 3

D'où :

$$AD = ED \operatorname{ctg} \theta = \frac{b}{n} \operatorname{ctg} \theta$$

et :

$$AD = \frac{AC}{2} = \frac{BC}{2} \frac{1}{\sin \theta}$$

En égalant les deux valeurs de AD , on obtient :

$$L = 2 \frac{b}{n} \cos \theta$$

Cette relation donne avec :

$$c = u_m \sin \theta$$

et :

$$c = \sqrt{\frac{g L}{2 \pi}} \operatorname{th} \frac{2 \pi y_m}{L}$$

(formule bien connue de la célérité de la houle).

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{g y_m}}{u_m} \sqrt{\frac{\operatorname{th} \left(\frac{n \pi y_m}{b} \frac{1}{\cos \theta} \right)}{\frac{n \pi y_m}{b} \frac{1}{\cos \theta}}}$$

Si on fait $n = 2$, on obtient la formule (7) page 467 de l'article cité. n quelconque donne la formule annoncée par les auteurs en haut de la page 468. Les notations sont les mêmes dans les deux études.

On peut facilement démontrer que, pour chaque valeur de $n > 0$, il existe un et un seul angle de MACH.

(*) Rappelons que la houle, comme toutes les ondes, se propage à célérité donnée par rapport au milieu dans lequel elles prennent naissance et non par rapport à un système d'axes fixes.

On pose à cet effet :

$$\sin \theta = Y ; \frac{2 \pi y_m}{b} \frac{1}{\cos \theta} = X.$$

Les valeurs de X et Y sont données par l'intersection de :

$$Y_1^2 = \frac{1}{F} \frac{\text{th } n X}{n X}$$

et :

$$Y_2^2 = 1 - \frac{p^2}{X^2}$$

Ces deux courbes sont symétriques par rapport à l'axe OY. Pour $X > 0$, la première décroît toujours, la seconde croît toujours. De plus, $Y_1 > Y_2$ pour $X=0$, et $Y_1 < Y_2$ pour $X=\infty$.

Il n'y a donc qu'une racine Y. Or, Y_1 est toujours positif et Y_2 toujours inférieur à 1, donc il existe un angle θ et un seul (compris entre 0 et $\pi/2$) qui satisfait l'équation proposée. On peut remarquer que $n=0$ peut donner une onde possible. Dans ce cas, $\theta = \pi/2$. Mais cette onde n'existe que si $F \leq 1$; comme on voit aisément :

$$u_m = \sqrt{\frac{g L}{2 \pi} \text{th } \frac{2 \pi y_m}{L}} \leq \sqrt{g y_m}$$

Si $u_m \leq \sqrt{g y_m}$ (c'est-à-dire $F \leq 1$), il existe une longueur d'onde L (et une seule) satisfaisant l'équation.

Nous démontrerons au paragraphe III que les ondes ainsi trouvées sont les seules qui puissent exister.

II. — REMARQUES DIVERSES A PROPOS DES ONDES DE MACH

1. LE RESSAUT.

Dans la théorie classique, le ressaut est une onde de MACH spéciale correspondant à $F=1$. Elle est liée à l'onde obtenue pour $n=0$. En réalité, on sait que le ressaut ne peut pas être obtenu avec les équations linéarisées: par contre, on peut calculer de cette façon les ondulations qui peuvent accompagner le ressaut (voir l'article de M. R. LEMOINE dans *la Houille Blanche*, n° 2-1948, p. 183).

2. — CANAL DE CARACTÉRISTIQUES VARIABLES.

D'après ce qui précède, il semblerait, à première vue, que la direction des ondes de MACH ne dépende, en première approximation, que de la hauteur de l'eau et de la vitesse en chaque point. C'est d'ailleurs ce qu'on admet dans la théorie classique. Or, en étudiant les houles dans les canaux à fond incliné, on s'aperçoit que

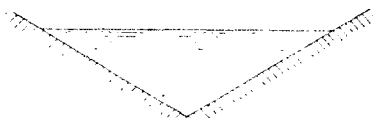


FIG. 4

Coupe d'un canal à ondes de Mach rectilignes

le problème est bien plus compliqué. En effet (voir par exemple dans le livre de H. LAMB : *Hydrodynamics*, édition de 1945, p. 448 et suivantes): les ondes de MACH déduites de la houle sont parfaitement rectilignes, même dans un canal à

berges inclinées (fig. 4), alors que si leur angle dépendait de la hauteur locale, elles devraient être courbes. Néanmoins dans certains cas la théorie classique donne bien des résultats conformes à l'expérience. Une étude approfondie serait nécessaire pour trancher ce litige.

3. — RAIDEUR DES ONDES DE MACH.

Considérons un écoulement tel que celui représenté sur la figure 5.

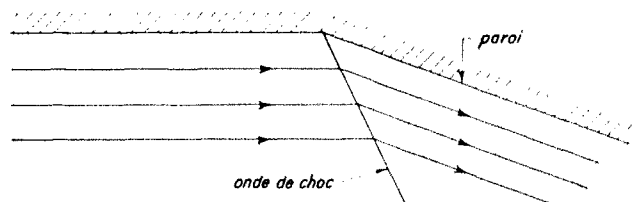


FIG. 5

Dans un écoulement gazeux on sait qu'il n'existe qu'un seul angle d'onde de choc, et que cette onde est effectivement très raide. Par contre, d'après ce qu'on vient de voir, il existe en hy-

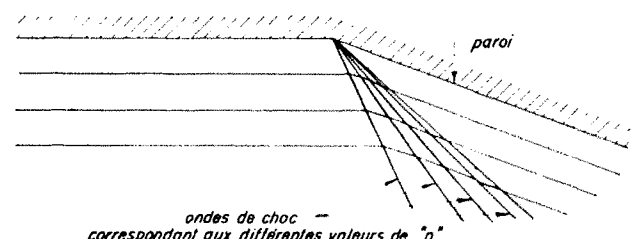


FIG. 6

draulique un grand nombre d'ondes de choc ayant des angles différents. On doit donc s'attendre à un écoulement du genre de celui représenté sur la figure 6. Il est très probable que l'onde de choc est moins raide et en quelque sorte étalée. C'est d'ailleurs ce qu'on observe. La théorie exacte serait très compliquée.

4. — SIGNIFICATION ET GRANDEUR RELATIVE DES DIFFÉRENTES ONDES.

Comme on le verra plus en détail au paragraphe III, les différentes ondes proviennent des perturbations imposées aux deux extrémités du canal. Dans les sections extrêmes, la somme des ondes doit être égale à ces perturbations. Or, pour chaque onde de MACH, la variation de u, v ou Φ (composantes de vitesses et potentiel) suivant Oy dépend de l'ordre de l'onde; elle est du genre $\cos(2\pi ny/b)$. Si la variation de la perturbation est relativement lente suivant Oy , les harmoniques d'ordre élevé ont des amplitudes très petites et seules les ondes d'ordre très bas sont importantes. C'est bien ce que semblent indiquer les essais relatifs aux figures 3^B et 8^A de l'article cité plus haut. Dans la théorie classique, il existe aussi des ondes d'ordre différent.

[on a :

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \cos \frac{k\pi y}{b} \cos \left(\frac{k\pi}{b} \frac{x}{\sqrt{1-F}} + \varphi_k \right)$$

à comparer au résultat du paragraphe 3], mais

leur angle de MACH est le même; leur distinction a donc moins d'importance.

5. — RÉGIME TORRENTIEL ET RÉGIME FLUVIAL.

On verra au paragraphe III que la célérité des ondes obliques dans un canal est plus grande que celle des ondes à crêtes perpendiculaires à l'axe; les premières peuvent donc remonter dans un écoulement même torrentiel. L'écoulement torrentiel n'est donc pas un écoulement dans lequel aucune onde ne peut remonter le courant, mais seulement dans lequel aucune onde à crête perpendiculaire à l'axe du canal ne peut remonter le courant. En fait, cette remarque n'a qu'une portée pratique très limitée.

6. — VAGUES DE PENTE.

On sait que la théorie des ondes de faible amplitude en canal de faible profondeur rend compte de l'instabilité des écoulements pour lesquels $U > kc$ (k dépend de la variation du frottement en fonction de la hauteur). Il apparaît, dans ce cas, des ondes qu'on appelle des « vagues de pente ». Ces ondes ne sont d'ailleurs possibles qu'en canal rectiligne, et bien calibré. Dans le cas contraire, elles sont rapidement détruites par des ondes « de travers » dans le canal. Ces ondes ayant une célérité plus grande que les ondes ordinaires ne satisfont pas à $U > kc$.

III. — ÉTUDE DE L'ENSEMBLE DES PERTURBATIONS DE FAIBLE AMPLITUDE POUVANT EXISTER DANS UN CANAL PRISMATIQUE

1. — CAS DES ONDES DE MACH QUAND LA VITESSE EST PARTOUT CONSTANTE DANS LE CANAL.

Considérons le canal trapézoïdal de la figure 7. Si le fluide est parfait et l'écoulement irrotation-

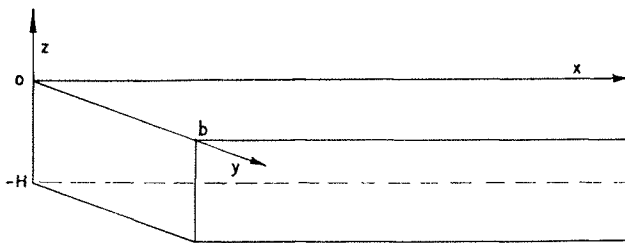


FIG. 7

$$\vec{V} = \text{grad } \Phi$$

$$\Delta_3 \Phi = 0 \left(\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ sur les parois et au fond. En plus, il existe une condition à la surface libre qu'on déduit facilement de la relation de Poisson :

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

nel, les perturbations de faible amplitude satisfont aux équations suivantes (voir par exemple LAMB, loc. cit., p. 363 et suivantes) :

Celle-ci est valable quand l'eau est au repos et les perturbations en mouvement. Si on fait un changement d'axes $x' = x - Vt$, on obtient facile-

ment la condition pour les perturbations fixes dans un écoulement de vitesse V :

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = V^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

On peut facilement résoudre le problème par la méthode des produits de fonctions orthogonales.

On pose :

$$\Phi(x; y; z) = A(y) \cdot B(x; z)$$

D'où :

$$\frac{A''}{A} = - \frac{\Delta_y B}{B} = \lambda \left(\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

On sait (voir par exemple le traité classique de HILBERT : *Probleme der Mathematischen Physik*, tome I, page 310 et suivantes), qu'il suffit dans le cas présent de considérer λ réel.

On obtient alors :

$$\lambda > 0 \quad A = e^{\sqrt{\lambda} y} \quad \text{ou} \quad e^{-\sqrt{\lambda} y}$$

$$\lambda < 0 \quad A = \cos \sqrt{-\lambda} y \quad \text{ou} \quad \sin \sqrt{-\lambda} y$$

$$\lambda = 0 \quad A = y, \quad \text{ou} \quad 1.$$

La condition $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ sur les parois exige $\lambda \leq 0$.

Posons :

$$\lambda = -\mu^2$$

d'où :

$$A = \cos \mu y \quad \text{et} \quad \mu b = k \pi \quad (k : \text{entier})$$

Donc :

$$A = \cos \frac{k \pi y}{b}$$

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos \frac{k \pi y}{b} B(x; z)$$

avec :

$$\Delta_x B = \frac{k^2 \pi^2}{b^2} B$$

On pose de même :

$$B = D(x) \cdot E(z)$$

d'où :

$$\frac{E''}{E} = - \left(\frac{D''}{D} - \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \right) = \nu$$

$$\nu > 0 \quad E = e^{\sqrt{\nu} z} \quad \text{ou} \quad e^{-\sqrt{\nu} z}$$

$$\nu > 0 \quad E = \cos \sqrt{-\nu} z \quad \text{ou} \quad \sin \sqrt{-\nu} z$$

$$\nu < 0 \quad E = z \quad \text{ou} \quad 1$$

La condition de fond $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ exige :

$$\nu < 0 \quad E = \text{ch} \sqrt{\nu} (z + H)$$

$$\nu = 0 \quad E = \cos \sqrt{\nu} (z + H)$$

$$\nu = 0 \quad E = 1$$

La condition de surface libre devient :

$$g \frac{\partial E}{\partial z} D + V^2 E D'' = 0$$

ou :

$$g \frac{\partial E}{\partial z} = V^2 E \left(\nu - \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \right)$$

Etudions d'abord le cas $\nu > 0$. On en déduit :

$$\frac{\sqrt{\nu} \text{th} \sqrt{\nu} H}{\nu - \frac{k^2 \pi^2}{b^2}} = \frac{V^2}{g}$$

V^2/g étant positif, il faut que $\nu > k^2 \pi^2 / b^2$. Quand ν croît de $k^2 \pi^2 / b^2$ à ∞ , $\frac{\sqrt{\nu} \text{th} \sqrt{\nu} H}{\nu - \frac{k^2 \pi^2}{b^2}}$ décroît réguliè-

rement de ∞ à 0 (sauf pour $k = 0$), comme on le voit en calculant la dérivée. Pour chaque valeur de $k (\neq 0)$, il n'y a donc qu'une racine de ν , nous l'appellerons α^2 . Pour $k = 0$, il se produit la singularité trouvée précédemment, α existe ou n'existe pas selon que $F \leq 1$ (cf. § I).

D'où, pour :

$$\frac{\alpha \text{th} \alpha H}{\alpha^2 - \frac{k^2 \pi^2}{b^2}} = \frac{V^2}{g}$$

$$E = \text{ch} \alpha (z + H)$$

$$D = \cos \left(\sqrt{\alpha^2 - \frac{k^2 \pi^2}{b^2}} x + \varphi \right)$$

Ces expressions fournissent une première partie du potentiel Φ :

$$\Phi_1 = \sum_{k=0; 1}^{\infty} C_k \cos \frac{k \pi y}{b} \text{ch} \alpha (z + H)$$

$$\cos \left(\sqrt{\alpha^2 - \frac{k^2 \pi^2}{b^2}} x + \varphi_k \right)$$

$\nu \leq 0$ fournit une autre partie du potentiel.

On pose :

$$\nu = -\beta^2,$$

d'où :

$$\frac{\beta \text{tg} \beta H}{\beta^2 + \frac{k^2 \pi^2}{b^2}} = - \frac{V^2}{g}$$

Cette équation a bien une infinité simple et dénombrable de racines pour chaque valeur de k , comme on s'y attendait : en effet, si β est grand, il y a une racine voisine de chaque nombre :

$$\beta = (2n + 1) \pi/2 \quad (n \text{ entier}).$$

D'où la deuxième partie de Φ :

$$\Phi_2 = \sum_{k=0}^{\infty} C'_k \cos \frac{k \pi y}{b} \sum_{\beta_k} F(\beta_k) \cos \beta(z + H) \operatorname{ch} \left(\sqrt{\beta^2 + \frac{k^2 \pi^2}{b^2}} x + \varphi \right)$$

Evidemment :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

On démontre facilement qu'en général Φ_2 représente une perturbation, s'éteignant comme $e^{-\beta x}$ à partir de chaque extrémité (si le canal a une longueur l ; Φ_2 se décompose en deux parties, l'une multipliée par $e^{-\beta x}$ et l'autre par $e^{-\beta(l-x)}$, le terme $e^{+\beta x}$ est donc bien un terme décroissant vers l'intérieur du canal).

On voit que les diverses ondes de Φ_1 servent à « ajuster » les perturbations transversales, comme il a été dit, alors que les perturbations de Φ_2 servent à « ajuster » les perturbations verticales (celles-ci ont donc un effet qui « s'éteint » très vite dans le canal).

Calculons la plus petite valeur de β , qui donne la perturbation la moins amortie. On trouve ($k = 0$; $\beta = 0$ s'intègre dans Φ_1 et non Φ_2) :

$$\beta \geq \frac{\pi}{b}$$

2. — CAS DES ONDES DE MACH QUAND LA RÉPARTITION DES VITESSES N'EST PAS UNIFORME.

Nous conserverons les mêmes notations que ci-dessus. Les équations de départ sont dans ce cas :

$$\vec{V}_\lambda \operatorname{rot} \vec{V} + \operatorname{grad} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z \right) = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

Admettons qu'il existe dans le canal un écoulement \vec{V} voisin d'un autre écoulement \vec{U} connu et

et en négligeant toujours les perturbations secondaires, on obtient :

$$\Delta_2 A = \lambda A$$

$$w = \sum_{\lambda} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda^2 + a} (z + H) \cdot A_{\lambda}$$

$$f = \sum_{\lambda} \left[\operatorname{ch} \sqrt{\lambda^2 + a} (z + H) - \frac{U'}{U \sqrt{\lambda^2 + a}} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda^2 + a} (z + H) \right] \frac{A_{\lambda}}{\sqrt{\lambda^2 + a}}$$

$$v = \sum_{\lambda} \left[\operatorname{ch} \sqrt{\lambda^2 + a} (z + H) - \frac{U'}{U \sqrt{\lambda^2 + a}} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda^2 + a} (z + H) \right] \frac{\partial A_{\lambda}}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + a}}$$

donné par $\vec{U} = [U(z); 0; 0]$. Posons $\vec{V} = \vec{U} + \vec{v}$ et considérons $\vec{v} = (u; v; w)$ comme une quantité très petite par rapport à \vec{U} . Les équations linéarisées sont alors :

$$U \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$U \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$U \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

En posant $p/\rho = f'$ et en éliminant $\partial u/\partial x$, on obtient :

$$Uv = f'_y + \varphi(y; z)$$

$$Uw = f'_z + \psi(y; z)$$

$$-U \frac{\partial v}{\partial y} - U \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial U}{\partial z} = f''_{x2}$$

φ et ψ étant des fonctions arbitraires d'intégration. Ces fonctions ne contenant pas x peuvent être négligées si on fait abstraction des perturbations s'éteignant suivant Ox .

En éliminant v et f , on trouve :

$$\Delta_3 w = \frac{U''}{U} w \quad \text{avec : } U'' = \frac{d^2 U}{dz^2}$$

On peut écrire :

$$U = U_0 + U_1 z + U_2 z^2 + \dots$$

Si on veut tenir compte de plus de trois termes, les calculs deviennent délicats; nous nous limiterons ici aux calculs faciles.

On en déduit :

$$\Delta_3 w = a w \quad \left(a = \frac{U_2}{U} \right)$$

En posant :

$$w = A(x; y) B(z)$$

On pose :

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial y} = B(x) \cdot C(y)$$

D'où :

$$C = \sin \frac{k \pi y}{b}$$

$$B = \sin \left(x \sqrt{\lambda^2 - \frac{k^2 \pi^2}{b^2}} + \varphi \right)$$

La condition de surface libre est :

$$g w = U^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -U^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

On en déduit les valeurs propres de λ :

$$\frac{\sqrt{\lambda^2 + a} \operatorname{th} \sqrt{\lambda^2 + a} H}{\lambda^2 + a - \frac{k^2 \pi^2}{b^2}} = \frac{U^2}{g}$$

Les angles de MACH sont toujours donnés par :

$$\cos \theta = \frac{k \pi}{b \lambda}$$

Appelons θ_1 l'angle de MACH calculé avec $a = 0$ et θ_2 , l'angle de MACH compte tenu de la répartition non uniforme des vitesses. On en déduit :

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta_1 - \frac{b^2 a}{k^2 \pi^2}}$$

En pratique, a est négatif, soit $a = -c$, donc :

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta_1 + \frac{b^2 c}{k^2 \pi^2}},$$

c'est-à-dire $\theta_2 > \theta_1$.

Les ondes ne peuvent donc jamais être plus inclinées qu'une certaine valeur :

$$\theta_2 > \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b \sqrt{c}}{k \pi}$$

La courbure moyenne des répartitions des vitesses est telle que c est de l'ordre de :

$$\frac{1}{3} \frac{1}{H^2} \text{ à } \frac{1}{30} \frac{1}{H^2}$$

selon la rugosité des canaux (en écoulement turbulent).

3. — CAS DE LA HOULE.

Un calcul analogue à celui du paragraphe 1 donne :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

$$\Phi_1 = \sum_{k=0}^{k=k_1} C_k \cos \frac{k \pi y}{b} \operatorname{ch} \gamma (z + H) \cos \left(x \sqrt{\gamma^2 - \frac{k^2 \pi^2}{b^2}} + \varphi_k \right)$$

$$\Phi_2 = \sum_{k=k_1+1}^{\infty} C'_k \cos \frac{k \pi y}{b} \operatorname{ch} \gamma (z + H) \operatorname{ch} \left(x \sqrt{\frac{k^2 \pi^2}{b^2} - \gamma^2} + \varphi'_k \right)$$

$$\Phi_3 = \sum_{k=0}^{\infty} C''_k \cos \frac{k \pi y}{b} \sum_{\delta} F_{\delta} \cos \delta (z + H) \operatorname{ch} \left[x \sqrt{\frac{k^2 \pi^2}{b^2} + \delta^2} + \varphi''_k \right]$$

ou :

$$\gamma \operatorname{th} \gamma H = \frac{\omega^2}{g} \quad \left(\omega : \text{pulsation} = \frac{2 \pi}{T} \right)$$

$$\delta \operatorname{tg} \delta H = -\frac{\omega^2}{g}$$

$$k_1 \text{ est défini par : } \quad \gamma^2 - \frac{k_1^2 \pi^2}{b^2} \geq 0 \quad \text{et} \quad \gamma^2 - \frac{(k_1 + 1)^2 \pi^2}{b^2} \leq 0$$

IV. — CONCLUSIONS PRATIQUES DE L'ÉTUDE THÉORIQUE

1. — FORMATION DES PERTURBATIONS DU GENRE « ONDE DE MACH ».

Il est clair que l'on peut injecter de l'eau dans un canal de façon à ne pas produire d'onde de

MACH : il suffit de bien choisir la distribution des vitesses à l'entrée (fig. 8).

En général, l'eau n'entre pas de cette façon dans le canal (exemple fig. 9).

Dans la section d'entrée, la surface libre est courbe et la vitesse varie d'un point à un autre. Le calcul montre que si certaines différences se

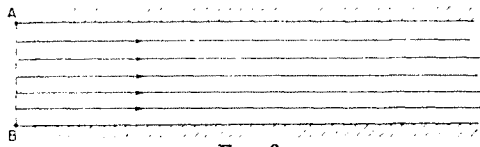


FIG. 8

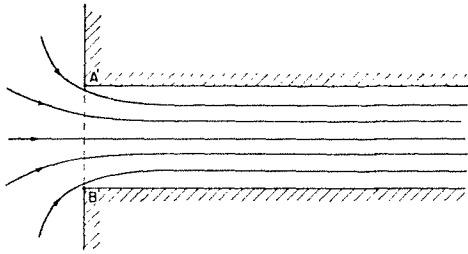


FIG. 9

compensent, d'autres demeurent. En particulier les différences dans le sens vertical disparaissent rapidement. L'écoulement, et par conséquent la surface libre, tend vers une forme limite. Cette disparition n'est pratiquement fonction que de la largeur de l'écoulement. En pratique ce genre de perturbations ne peut pas se calculer. En effet, le calcul admet une répartition des vitesses presque uniforme, ce qui n'est justement pas réalisé dans la zone où ces perturbations ne sont pas encore éteintes.

Les différences dans le sens horizontal donnent lieu à des perturbations qui ne s'éteignent pas (en liquide parfait), ces perturbations sont les vraies « ondes de MACH ».

En fluide parfait, ces ondes dépendent en principe des deux extrémités du canal. Il faut effectivement ajuster deux constantes : amplitude et phase pour chaque onde. En pratique, quand le canal est assez long et assez rugueux, les ondes s'éteignent le long de son axe, et il se forme deux familles indépendantes de perturbations à chaque extrémité du canal, chacune ne dépendant évidemment que des conditions dans son voisinage.

Leur extinction est beaucoup moins rapide que celle des ondes considérées plus haut qui s'éteignent même en fluide parfait.

2. — INFLUENCE DE LA RÉPARTITION DES VITESSES DANS UNE SECTION.

Dans la théorie classique (shallow water theory) on ne peut pas facilement tenir compte de cette influence. Le calcul plus complet montre qu'elle intervient relativement beaucoup.

Une variation linéaire des vitesses est sans influence, par contre les dérivées supérieures, c'est-à-dire les détails de plus en plus poussés de la répartition, interviennent :

Exemple : Pour $F = 4$; $b = 3 y_m$; on a :

pour l'onde principale :

$$\theta_1 \approx 8^\circ$$

Si la rugosité est moyenne, on a, par exemple :

$$c = \frac{1}{9 H^2}$$

D'où :

$$\theta_2 \approx 21^\circ$$

3. — HOULE.

On voit apparaître ici un phénomène très curieux du point de vue mathématique (mais physiquement évident (cf. § 1) : seules un certain nombre de perturbations du genre :

$$\cos(k \pi y/b) \operatorname{ch} \gamma(z + H) f(x)$$

se conservent le long du canal, les autres s'amortissent. Les premières comprennent la houle ordinaire $k = 0$ et une houle « croisée » : la houle de JEFFREYS. Le nombre k_1 est le plus grand nombre qui vérifie l'inégalité :

$$\frac{k \pi}{b} < \frac{2 \pi}{L} \quad (= \gamma)$$

L étant la longueur d'onde de la houle à crête perpendiculaire aux parois du canal ayant la pulsation ω .

Si :

$$b < \frac{L}{2}$$

aucune houle de JEFFREYS n'est possible (seul $k = 0$, valeur donnant la houle ordinaire, satisfait alors à :

$$\frac{k \pi}{b} < \frac{2 \pi}{L})$$

Ceci est une remarque très importante. En effet, on admet souvent en physique qu'un système est « à une dimension spatiale » si les longueurs transversales sont « petites » devant la longueur d'onde. Dans ce cas, « petites » signifie donc plus petite que $L/2$ (ou plutôt $L/3$ pour que les perturbations dues aux extrémités s'éteignent assez vite). Si on excite un système long, par exemple un canal à houle contenant des obs-

tacles (fig. 10), on obtient en B soit une houle régulière, si :

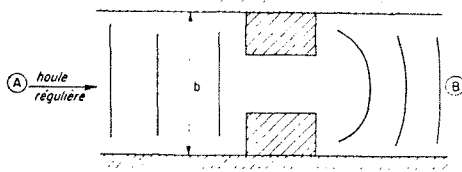


FIG. 10

$$b < \frac{L}{2} \text{ (figure 2),}$$

soit une houle régulière plus 1 ; 2 ; ... k_1 houles de JEFFREYS (figure 11) si :

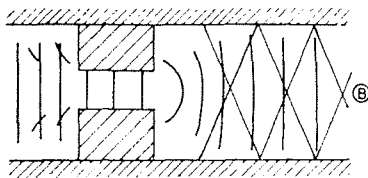


FIG. 11

$$(k_1 + 1) \frac{L}{2} > b > k_1 \frac{L}{2}$$

soit une figure de diffraction (au sens de l'optique physique) si k_1 est très grand (figure 12);

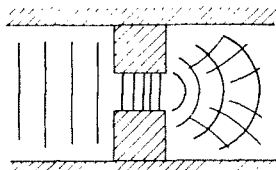


FIG. 12

Avant de publier ces longs commentaires de M. MEYER, nous en avons fait part aux auteurs de l'article original : MM. ENGELUND et MUNCH-PETERSEN. Ces derniers nous ont alors adressé en quelques lignes des remarques que nous nous faisons un plaisir de reproduire ci-après.

It has been a pleasure for us to read the many interesting comments given by Mr. MEYER in a letter of November 3, and we should like to add the following remarks.

In Aerodynamics it seems common to make a distinction between "Mach-waves" and "shock-waves". The Mach-waves may in principle be accounted for by the linearized equations, because the loss of head is negligible, while the computation of the shock-waves is generally far more complicated as they are characterized by a considerable increase of entropy.

soit de « l'optique géométrique » si k_1 est immense (fig. 13).

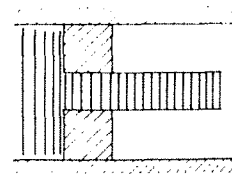


FIG. 13

La condition $b < L/2$ est la raison pour laquelle les guideaux des batteurs à houle doivent avoir un écartement plus petit que $L/2$.

Si $b = (kL/2)$, il y a une résonance transversale. Elle est particulièrement spectaculaire en canal convergent si la largeur du canal passe par la valeur $kL/2$ (en général $k = 1$). Remarquons enfin que les houles de JEFFREYS ont une célérité plus grande que les houles ordinaires.

Il y a donc très probablement des ondes du genre « à front raide » allant plus vite que $\sqrt{g}H$ dans un canal. Expérimentalement on vérifie d'ailleurs que dans un canal à houle l'eau bouge un peu, bien avant que l'onde à célérité $\sqrt{g}H$ émise par la mise en marche du batteur ait atteint le point correspondant (en fait, cela pourrait être dû à d'autres phénomènes que ceux étudiés ici).

On pourrait encore faire bien d'autres remarques à ce sujet, en particulier évaluer les parasites dus à un batteur dont les sections horizontales ne sont pas parfaitement des droites perpendiculaires à l'axe du canal; ou étudier les batteurs « serpents ».

R. MEYER,

Ingenieur au Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique (Neyric-Grenoble) (*).

C'est avec plaisir que nous avons pris connaissance de tous les intéressants commentaires contenus dans la lettre de M. MEYER du 3 novembre dernier, et nous aimerions y ajouter les quelques remarques suivantes.

En aérodynamique, on fait couramment la distinction entre les « ondes de Mach » et les « ondes de choc ». Les « ondes de Mach » peuvent, en principe, être traitées par des équations linéarisées, car la perte de charge est négligeable; par contre, les calculs concernant les « ondes de choc » sont généralement beaucoup plus compli-

(*) Manuscrit reçu en novembre 1953 (N.D.L.R.).

In Hydraulics the conditions are quite similar. It would certainly be correct to make a distinction between waves of small amplitude and real "shock-waves" which are nothing but oblique hydraulic jumps. However, such a distinction does not seem to be conventional. The transition between the two wave-forms is quite gradual.

Considering the fact that the theory of steady flow in an infinitely long channel with infinitesimal perturbations (the theory developed in our paper) is in good agreement with the experiments, we must conclude that in these experiments the waves are not real "shock-waves", since they can be accounted for without considering the loss of head.

This is remarkable because the wave fronts are relatively sharp, and the amplitudes relatively great (compare fig. 8), so that it would be natural in the first instance to talk about "shock fronts".

Perhaps the insufficiency of the traditional shock-wave considerations are most strikingly demonstrated by our fig. 9. It is usually supposed that the waves are crossing the channel being reflected from the walls.

In fig. 9 and 10 it will be seen that a wave may disappear at the wall, a new wave front being formed a little downstream at the opposite wall.

qués, car elles sont caractérisées par une considérable augmentation de l'« entropie ».

En hydraulique, il en va tout à fait de même. Il serait certainement correct de distinguer les ondes de petite amplitude et les véritables « ondes de choc » qui ne sont autres que des ressauts obliques. Cependant, une telle distinction ne paraît pas couramment admise. La transition entre ces deux types d'ondes est très graduelle.

Compte tenu de ce que la théorie de l'écoulement permanent dans un canal infiniment long, siège de perturbations très petites (c'est la théorie que nous développons dans notre article) est en bon accord avec les résultats expérimentaux, nous devons conclure que, dans ces essais, les ondes ne sont pas de véritables « ondes de choc », puisqu'elles peuvent être traitées sans tenir compte de la perte de charge.

Ceci est remarquable, car les fronts d'ondes sont relativement raides, et les amplitudes relativement grandes (notre figure 8), si bien qu'il serait normal, dans le premier exemple, de parler de « fronts de choc ».

Peut-être l'insuffisance des développements classiques sur les « ondes de choc » apparaît-il plus clairement dans notre figure 9. On suppose, généralement, que les ondes traversent le canal après réflexion sur les parois.

Sur les figures 9 et 10, on verra qu'une onde peut s'éteindre contre la paroi, un nouveau front d'ondes prenant naissance sur la paroi opposée, un peu à l'aval.

Frank ENGELUND.

