Formules empiriques pour l'étalonnage des moulinets

Empirical rating formulae for current meters

PAR S. IRMAY (*)

Technique d'étalonnage des moulinets; élaboration du graphique v(n). — *Diverses formules empiriques proposées pour l'interprétation de ce graphique; leurs inconvénients.* — *Proposition d'une nouvelle formule de la forme* v = An + {B/n + 1)}; *calcul de* A *et* B *par la méthode des moindres carrés; calcul simplifié lorsque, au-dessus d'une certaine vitesse,* v/n *est pratiquement constant.* — *Précision obtenue.*

Technique for calibrating current-meters; plotting of the graph v(n). — *Various empirical formulae for the interpretation of this graph; their inconvenience. A new formula proposed, of the form* v = An + {B/(n + 1)}; *calculation of* A *and* B *by the method of least squares; simplified calculation when, above a certain speed,* v/n *is practically constant.* — *Precision obtained.*

I. — INTRODUCTION

L'étalonnage des moulinets et l'élaboration d'une formule empirique pour chaque appareil sont des opérations fort laborieuses. Le procédé classique consiste à tirer le moulinet, à vitesse constante, le long d'un canal de tarage pendant un temps T, correspondant à un nombre donné N de tours de l'axe de l'hélice ou des pales, et à mesurer la longueur parcourue L. La vitesse moyenne $v = L/T$ et le nombre moyen de tours par seconde $n = N/T$ dépendent de T, alors que leur rapport $a = v/n = L/N$ est indépendant du temps. Le rapport a a les dimensions d'une longueur. On peut donc le déterminer de façon très précise en mesurant seulement L.

Si, sur un graphique, on porte, pour chaque valeur de v et de a, la valeur correspondante de

Rating current meters and deriving empirical formulae for each meter is very laborious. The usual procedure consists in dragging it at constant speed along a towing tank for a time T, which corresponds to a given number N of revolutions of the axis of screw or vanes. The corresponding towing path L is measured. The mean velocity $v = L/T$ and the mean number of revolutions per second $n = N/T$ depend on T, whereas their ratio $a = v/n = L/N$ is independent of T. The ratio a has the dimension of length. Hence a may be determined very accurately by measuring L only.

Plotting v and a versus n (fig. 1), the points

* Associate Professor, Head, Division of Hydraulic Engineering, Israel, Institute of Technology, Haifa; Chairman Hydrology Section, Israel Union for Geodesy and Geophysics.

n (fig. 1), les points se répartissent en deux zones. Pour les plus grandes vitesses (zone II), on a à peu près exactement :

$$v = A' n ; \quad a = A' \qquad (1)$$

v est représentée par une droite passant par l'origine, et a a une valeur constante A'. Pour des vitesses plus faibles (zone I), le frottement fait remonter les deux courbes. C'est ainsi que pour $n = 0$, $v = v_0$ et non 0.

On a alors :

$$a \rightarrow \infty$$

II. — FORMULES EMPIRIQUES

On a proposé de nombreuses formules empiriques pour la zone I, formules comportant deux ou trois paramètres, telles que :

$$\left.\begin{aligned} v &= An + B \\ v &= An + C/n \\ v &= An + B + C/n \\ v &= An + \sqrt{B^2 n^2 + C} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

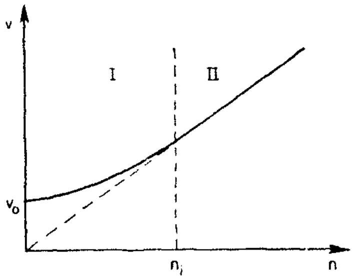

FIG. 1

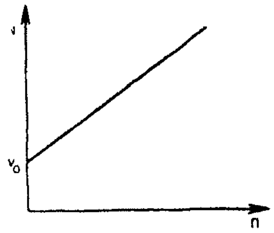

FIG. 2 *a*

La première de ces formules est la plus simple : elle correspond à une droite avec $B = v_0$ (fig. 2 *a*). Elle ne se raccorde pas rapidement à (1), à moins que B soit très petit.

La seconde formule correspond à une hyperbole (fig. 2 *b*) ayant pour asymptotes l'axe des v d'une part, et la droite $v = An$, d'autre part. Cette formule n'est pas bonne, car pour $n = 0$, $v \rightarrow \infty$, et pour $n_m = \sqrt{C/A}$, v passe par un minimum $v_m = 2\sqrt{AC}$. La troisième formule n'est qu'une variante de la deuxième et conduit aux mêmes restrictions.

La quatrième formule correspond à une hyperbole ayant pour asymptote la droite $v = (A + B)n$. Pour $n = 0$, $v_0 = \sqrt{C}$, et $dv/dn = A$. Cette formule est employée par les hydrologues européens et russes, et bien que les paramètres A, B, C soient difficiles à calculer, elle est préférable.

lie within two zones. At higher velocities (zone II) very approximately :

$$v = A' n ; \quad a = A' \qquad (1)$$

v is a straight line through the origin, while a has a constant value A'. At lower velocities (zone I) friction curves both lines upwards. Thus for $n = 0$, $v = v_0$, and not zero. Here : $a \rightarrow \infty$.

II.—EMPIRICAL FORMULAE

Several empirical formulae have been proposed for zone I, depending on 1 or 3 parameters, such as :

$$\left.\begin{aligned} v &= An + B \\ v &= An + C/n \\ v &= An + B + C/n \\ v &= An + \sqrt{B^2 n^2 + C} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

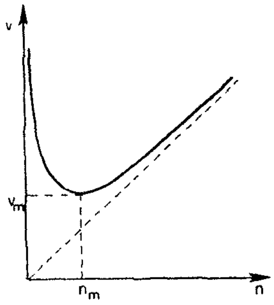

FIG. 2 *b*

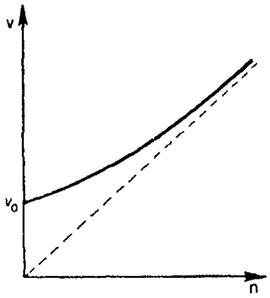

FIG. 2 *c*

The first formula is the simplest, as it represents a straight line with $B = v_0$ (fig. 2 *a*). It does not tend rapidly towards (1), unless B is very small.

The second formula is a hyperbola (fig. 2 *b*) with the v-axis as one asymptote and the straight line $v = An$ as another asymptote. This formula is not good, as for $n = 0$, $v \rightarrow \infty$ and it has for $n_m = \sqrt{C/A}$ a minimum value $v_m = 2\sqrt{AC}$.

The third formula is merely a modification of the second and subject to the same limitations.

The fourth formula represents a hyperbola with the asymptote $v = (A + B)n$.

For $n = 0$, $v_0 = \sqrt{C}$, $dv/dn = A$.

It is used by European and Russian hydrologists, and though the parameters A, B, C are difficult to compute, it is preferable.

III. — NOUVELLE FORMULE EMPIRIQUE

Au Laboratoire d'Hydraulique de l'Institut de Technologie d'Israël, l'auteur s'est livré, au cours des dix dernières années, à de nombreux essais portant sur des moulinets WATTS à coupelle, sur de petits moulinets OTT et sur des moulinets à hélice réalisés en Israël; ces essais l'amènent à proposer une nouvelle formule empirique simple qui concorde de très près avec les valeurs mesurées de v et de n, et qui s'avère généralement valable à la fois dans les zones I et II.

$$v = An + B/(n+1)$$
$$a = v/n = A + b\,B; \qquad b = 1/[n(n+1)] \tag{3}$$

B est en général beaucoup plus petit que A. On a une hyperbole (fig. 2 c) dont l'une des asymptotes est la droite $v = An$ ($n \to \infty$), l'autre asymptote et le minimum de v se trouvant dans la région de $n < 0$. Quand le temps est mesuré en secondes, $B = v_0$ (B est en m/s²). Les paramètres A et B sont déterminés par la méthode des moindres carrés. Le calcul se conduit de la façon suivante : on dresse un tableau dont les colonnes donnent successivement : le numéro d'ordre de l'essai, T, L, N, $a = L/N$, $n = N/T$, $b = 1/[n(n+1)]$, b^2, $a\,b$, $v = L/T$, et la valeur de v calculée ensuite d'après la formule (3).

Puis on fait la somme des chiffres des colonnes a, b, b^2, ab.

La méthode des moindres carrés consiste à rechercher le minimum de la fonction.

$$F(A, B) = \Sigma (A + b\,B - a)^2$$

ce minimum est atteint lorsqu'on a simultanément :

$$\frac{\partial F}{\partial A} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial B} = 0$$

ou :

$$k\,A + B.\Sigma b = \Sigma a$$
$$A.\Sigma b + B.\Sigma b^2 = \Sigma ab$$

où k est le nombre des points d'essais considérés comme valables. La solution est :

$$A = D_A/D\,; \qquad B = D_B/D \tag{4}$$

avec :

$$D = k.\Sigma b^2 - (\Sigma b)^2\,; \quad D_A = \Sigma a.\Sigma b^2 - \Sigma b.\,\Sigma ab\,;$$
$$D_B = k.\Sigma ab - \Sigma a.\Sigma b \tag{5}$$

Les équations (3) permettent alors de calculer les valeurs de v, qui sont comparées avec les valeurs expérimentales $v = L/T$.

III.—A NEW EMPIRICAL FORMULA

Numerous tests on WATTS cup-meters, small OTTS and Israël produced screw-meters, carried out by the author at the Hydraulics Laboratory of the Institute of Technology, Haïfa, during the last ten years, suggest a new simple empirical formula which fits closely the measured v, n values, and is usually valid both in zones I and II.

$$v = An + B/(n+1)$$
$$a = v/n = A + b\,B; \qquad b = 1/[n(n+1)] \tag{3}$$

B is usually much smaller than A. This is a hyberbola (fig. 2 c) asymptotic to the straight line $v = An$ for $n \to \infty$, with the other asymptote and minimum value outside the zone of positive n. When the time is measured in seconds, $B = v_0$ (the unit of B is m/s²). The parameters A, B are determined by the method of least squares. The computation proceeds as follows: a table is prepared, the columns of which give the ordinal number of the test, T, L, N, $a = L/N$, $n = N/T$, $b = 1/[n(n+1)]$, b^2, $a\,b$, $v = L/T$, v_{comp} to be computed later on by (3).

The sums of the columns a, b, b^2, ab are computed.

The method of least squares requires the minimum of the function :

$$F(A, B) = \Sigma (A + b\,B - a)^2$$

which is reached, when simultaneously :

$$\frac{\partial F}{\partial A} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial B} = 0$$

or :

$$k\,A + B.\Sigma b = \Sigma a$$
$$A.\Sigma b + B.\Sigma b^2 = \Sigma ab$$

where k is the number of valid test points. The solution is :

$$A = D_A/D\,; \qquad B = D_B/D \tag{4}$$

where :

$$D = k.\Sigma b^2 - (\Sigma b)^2\,; \quad D_A = \Sigma a.\Sigma b^2 - \Sigma b.\,\Sigma ab\,;$$
$$D_B = k.\Sigma ab - \Sigma a.\Sigma b \tag{5}$$

Then (3) gives the computed values of v, which are then compared with the experimental $v = L/T$.

IV. — CALCUL SIMPLIFIÉ

On peut très souvent simplifier les calculs, lorsque l'examen du tableau des résultats montre que a est pratiquement constant pour les plus grandes vitesses, par exemple pour $n > n_i$, soit dans la zone II de la figure 1, où la formule (1) est valable. Dans ce cas :

$$A' = \left(\sum_i^k a \right) / (k - i) \quad \text{pour } n > n_i \qquad (6)$$
$$(\text{ou } n \geqslant n' \# n_i)$$

Si, par exemple, $n_i = 0{,}621$, nous arrondirons ce chiffre à $n' = 0{,}600$, afin de simplifier les calculs. Dans la zone I, nous prendrons de nouveau les formules (3). En un point quelconque n nous avons :

$$a = A + b\,B\,; \qquad b = 1/[n\,(n+1)]$$

Au point donné $n = n'$, nous avons :

$$a' = A + b'\,B\,; \qquad b' = 1/[n'\,(n'+1)]$$

ou, par soustraction :

$$B\,(b - b') = a - a'$$

Suivant la méthode des moindres carrés, le minimum de la fonction :

$$f(B) = \Sigma\,[B\,(b - b') - (a - a')]^2$$

est atteint lorsque $df/dB = 0$, ou :

$$\begin{cases} B = \Sigma\,(a - a')\,(b - b') / \Sigma\,(b - b')^2 \\ A = a' - b'\,B \end{cases}$$

Le tableau est en conséquence simplifié pour $n \leqslant n'$:

n° d'ordre de l'essai, T, L, N, $a = L/N$, $a - a'$, $n = N/T$, $b = 1/[n\,(n+1)]$, $b - b'$, $(b - b')^2$, $(a - a')\,(b - b')$, $v = L/T$, v calculé d'après (3).

Le tableau précédent peut d'ailleurs être employé, car :

$$\Sigma\,(b - b')^2 = \Sigma b^2 - 2\,b'\,\Sigma b + (k - i)\,b'^2$$

$$\Sigma\,(a - a')\,(b - b') = \Sigma ab + (k - i)\,a'\,b' - b'\,\Sigma a - a'\,\Sigma b$$

V. — PRÉCISION

L est généralement mesuré à ± 1 cm près : donc, $\Delta L = 0{,}01$ m. En utilisant un chronomètre

IV.—SIMPLIFIED COMPUTATION

Very often this computation may be simplified, when the inspection of the table shows that a is practically constant for the higher velocities, e.g. for $n > n_i$, zone II of fig. 1, for which (1) is valid.

Here :

$$A' = \left(\sum_i^k a \right) / (k - i) \quad \text{for } n > n_i \qquad (6)$$
$$(\text{or } n \geqslant n' \# n_i)$$

If e.g. $n_i = 0.621$, we shall round it off to $n' = 0.600$, in order to simplify the computations. In zone I we shall again assume (3). At any point n we have :

$$a = A + b\,B\,; \qquad b = 1/[n\,(n+1)]$$

At the given point $n = n'$ we have :

$$a' = A + b'\,B\,; \qquad b' = 1/[n'\,(n'+1)]$$

By substraction :

$$B\,(b - b') = a - a'$$

By the method of least squares the minimum of the function :

$$f(B) = \Sigma\,[B\,(b - b') - (a - a')]^2$$

is reached when $df/dB = 0$, or :

$$\begin{cases} B = \Sigma\,(a - a')\,(b - b') / \Sigma\,(b - b')^2 \\ A = a' - b'\,B \end{cases}$$

The table is accordingly simplified for $n \leqslant n'$: Ordinal number of the test, T, L, N, $a = L/N$, $a - a'$, $n = N/T$, $b = 1/[n\,(n+1)]$, $b - b'$, $(b - b')^2$, $(a - a')\,(b - b')$, $v = L/T$, v_{comp} by (3).

The previous table may also be used, as :

$$\Sigma\,(b - b')^2 = \Sigma b^2 - 2\,b'\,\Sigma b + (k - i)\,b'^2$$

$$\Sigma\,(a - a')\,(b - b') = \Sigma ab + (k - i)\,a'\,b' - b'\,\Sigma a - a'\,\Sigma b$$

V.—PRECISION

Usually L is measured within ± 1 cm, so $\Delta L = 0.01$ m. When a stop watch is used

$\Delta T = 0{,}1$ s. Par conséquent, l'erreur absolue sur a est très petite : $\Delta a = \Delta L/N = 0{,}01/N$. Le nombre de tours N est voisin de 100, et très rarement inférieur à 50. a variant généralement entre 0,1 et 1 (système métrique), a est connu à moins de 0,1 % près.

Les erreurs relatives sur v et n sont beaucoup plus élevées.

$$\Delta v/v = \Delta L/L + \Delta T/T = 0{,}01/L + 0{,}1/T$$

En général, $T > 10$ s, $L > 20$ m; par conséquent, pratiquement : $\Delta v/v = 0{,}1\ T$, soit à peu près 0,1 à 1 %.

$$\Delta n/n = \Delta T/T = 0{,}1/T$$

également à peu près 0,1 à 1 %.

La précision de la formule (3) dépend principalement de A, car B est très petit. Or, par suite de (4), (5), A est très sensible aux plus grandes valeurs de b^2, ou aux petites valeurs de n. Il est recommandable de ne pas tenir compte, dans les sommes, des valeurs de n vraiment très petites, afin d'éviter une exagération de cette influence.

$\Delta T = 0.1$ s. Hence the absolute error on a is very small $\Delta a = \Delta L/N = 0.01/N$.

The number of revolutions $N \sim 100$, very seldom less than 50. As a varies usually between 0.1 and 1 (metric units), a is known within 0.1 %.

The relative errors on v and n are considerably higher :

$$\Delta v/v = \Delta L/L + \Delta T/T = 0.01/L + 0.1/T$$

Usually $T > 10$ s, $L > 20$ m; hence practically $\Delta v/v = 0.1\ T$, or of the order of 0.1 to 1 %.

$$\Delta n/n = \Delta T/T = 0.1/T$$

also of the order of 0.1 to 1 %.

The precision of the formula (3) depends essentially on A, as B is very small. Or, because of (4), (5), A is much affected by the higher values of b^2, or small values of n. It is advisable to reject from the sums the very smallest values of n, so as to avoid this unwarranted exaggerated effect.

ERRATUM

La Houille Blanche, n° 3/1954, p. 379 :

1° Fig. 2. — Les ordonnées sont évidemment : 0,400 — 0,500... et non 400, 500...

2° Légende de la figure 4. Il faut lire :

Essais de Donges

Variation du coefficient λ en fonction du nombre de Reynolds. (Les résultats d'essais américains sont extraits de la figure 1, page 594 de *la Houille Blanche*, août-septembre 1952, elle-même extraite de la figure 19, page 1067, volume 113, A.S.C.E., 1948. Pour l'équation de Biesel, cf. *la Houille Blanche*, n° A, 1954, page 255.)