Mécanique des terrains perméables

The mechanics of permeable soils

PAR J. FERRANDON

MAÎTRE DE CONFÉRENCES À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Le texte ci-dessous résume la matière d'une série de conférences faites aux Elèves Ingénieurs de l'Institut Polytechnique de Grenoble au cours de la session scolaire 1953-1954. Leur objet est l'examen de certaines propriétés des terrains perméables particulièrement utiles pour les applications.

La première partie expose les lois de l'écoulement laminaire en généralisant, par l'introduction du tenseur de perméabilité, la loi de Darcy aux milieux isotropes.

La seconde partie traite de l'équilibre limite des sols cohérents sans frottement interne et des sols pulvérulents par la méthode analytique de Cauchy, par laquelle les lignes de glissement apparaissent comme courbes caractéristiques d'un système d'équation aux dérivées partielles.

La troisième partie envisage les phénomènes de propagation de discontinuités dans un sol perméable, compte tenu de l'existence de deux phases solide et liquide en présence.

Enfin une note de M. F. Serre sur l'évolution en fonction du temps du tassement des couches argileuses aborde le problème du tassement des fondations d'une manière tout à fait générale.

The following text is a resumé of a series of lectures delivered to engineering students at the Grenoble Polytechnic Institute during the 1953-1954 session. The object of the lectures was to examine those properties of permeable soils which are of special importance in practical problems.

The first part treats the laws of laminar flow, generalising Darcy's law for isotropic soils by introducing the permeability tensor.

The second part deals with the limiting equilibrium of cohesive soils without internal friction, and of powdery soils. The analytical method of Cauchy is used and gives the failure lines as characteristic curves of a system of partial differential equations.

The third part considers the phenomena of propagation of discontinuities in a permeable soil taking into account the existence of both solid and liquid stages.

Finally a note by M. F. Serre on the time element in the settlement of clay strata introduces the problem of foundation settlement in a very general manner.

PREMIÈRE PARTIE

ÉCOULEMENT DE L'EAU DANS LES TERRAINS PERMÉABLES

La Mécanique des sols comporte l'étude des phénomènes de filtration dont les massifs naturels sont généralement le siège et pour laquelle est essentielle la connaissance des lois régissant l'écoulement de l'eau au travers des milieux perméables.

La première partie de cet ouvrage consiste en un exposé analytique de ces lois sous forme suffisamment générale pour englober la multiplicité des cas usuels et suffisamment précise pour en permettre la résolution. Y est constamment envisagé un massif naturel poreux formé de grains solides ménageant entre eux des intervalles très petits dont l'ensemble constitue un réseau de canaux ou tubes de filtration de très faibles sections imprégnés d'eau. Toute différence de charge entre deux régions du liquide

provoque un lent mouvement de filtration. Dans chacun des tubes, le mouvement de l'eau se comporte comme celui d'un liquide visqueux à l'intérieur d'un tube fin avec vitesse nulle au contact des parois.

Les propriétés de ce cas élémentaire et fondamental sont donc exposées en premier lieu pour être étendues successivement à ceux de la filtration unidimensionnelle puis de la plus générale, c'est-à-dire sans direction privilégiée d'écoulement. Dans ces diverses éventualités sont effectuées la détermination du champ des vitesses de l'eau et celle des actions hydrodynamiques exercées sur les grains du massif filtrant.

Ces conférences relatives à la Mécanique des sols perméables comportent trois parties :

I. — La filtration d'un liquide visqueux à l'intérieur d'un sol poreux à structure invariable est d'abord examinée. Sont mises en évidence la loi de filtration et déterminées les actions du liquide filtrant sur la phase solide.

II. — Le champ de ces actions s'ajoute à celui de la pesanteur et modifie les conditions d'équilibre des massifs où interviennent tels écoulements de l'espèce. Sont examinées diverses circonstances de rupture par glissement de ceux-ci.

III. — Si le sol est susceptible de déformation propre — argiles — les actions en cause modifiant l'état des forces intérieures de la phase solide en provoquant l'évolution. Sont étudiées deux éventualités extrêmes de celle-ci : la propagation par ondes d'excitations initialement localisées sur la surface limitant le massif et l'évolution lente ou consolidation.

Le texte ci-dessous comporte les calculs qu'il n'a pas été possible de développer à l'amphithéâtre.

I

ÉCOULEMENT GRADUELLEMENT VARIÉ DANS UN TUBE FIN

1.

L'étude de l'écoulement graduellement varié dans un tube fin, déduit des équations générales de l'hydrodynamique des fluides visqueux incompressibles, constitue l'exposé préliminaire indispensable à celle de la filtration au travers des massifs. Les résultats qui y sont obtenus s'étendent assez directement aux situations naturelles plus complexes et les approximations consenties qui y sont mises en évidence précisent le sens et limitent la portée de leur application.

2. ÉQUATIONS DU MOUVEMENT.

Est donc envisagé un tube cylindrique à génératrices parallèles à ox , inclinées sur l'horizon de l'angle i , dont la section droite du plan yo (oz horizontale) a pour aire ω et pour périmètre χ (section et périmètre mouillés) (fig. 1).

FIG. 1.

Le liquide, de poids spécifique $\varpi = \rho g$, de coefficient cinématique de viscosité $\nu = \mu/\rho$, qui le remplit, s'y écoule sous l'action de la pesanteur d'accélération g , avec en tout point (x, y, z) et à l'instant t , la vitesse $V(x, y, z, t)$ de coordonnées u, v, w . Des simplifications classiques qui conduisent à supposer nulles dans tout le liquide les coordonnées v et w de sa vitesse ainsi que les dérivées partielles $\partial u/\partial x$ et $\partial^2 u/\partial x^2$, permettent, en désignant par $p(x, y, z, t)$, la pression réversible au point (x, y, z) et à l'instant t de mettre les équations de l'hydrodynamique propres aux écoulements de l'espèce sous la forme (*) :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g \sin i - u + \nu \partial_z u, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = g \cos i, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

S'y adjoint la condition aux limites :

$$u = 0, \text{ sur la surface latérale du tube.} \quad (2)$$

Les deux dernières équations (*) décèlent une *distribution hydrostatique des pressions dans toute section droite du tube*.

La première est susceptible de suggestives transformations.

L'introduction dans celle-ci de la *pente motrice* :

$$I = \left[\sin i + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\varpi} \right) \right] \quad (3)$$

donne :

$$\frac{\nu}{g} \partial_z u + I = \frac{\dot{u}}{g} \quad (4)$$

soit, par intégration à la section mouillée d'aire ω :

$$\frac{\nu}{g} \iint_{\omega} \partial_z u \, d\sigma + I \omega = \frac{1}{g} \iint_{\omega} \dot{u} \, d\sigma,$$

puis, par la transformation de RIEMANN, en notant n l'unitaire normal extérieurement au contour χ :

$$\frac{\nu}{g} \int_{\chi} \frac{dn}{dn} \, ds + I = \frac{1}{g} \iint_{\omega} \dot{u} \, d\sigma \quad (5)$$

(*) On a posé :

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \partial_z = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

enfin, par élimination de I entre (4) et cette dernière :

$$v \delta_2 u = \frac{v}{\omega} \int_x \frac{du}{dn} ds = \dot{u} - \frac{1}{\omega} \iint_{\omega} \dot{u} d\sigma \quad (6)$$

A cette équation s'ajoute la condition aux limites (2), et le groupe ainsi formé définissant complètement le mouvement axial envisagé par la prise en considération de la *vitesse moyenne* :

$$U = \frac{1}{\omega} \iint_{\omega} u d\sigma \quad (7)$$

peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_2 \frac{u}{U} - \frac{1}{\omega} \int_x \frac{d}{dn} \left(\frac{u}{U} \right) ds &= \frac{1}{v} \left(\frac{\dot{u}}{U} - \frac{1}{\omega} \iint_{\omega} \frac{\dot{u}}{U} d\sigma \right) \\ \frac{1}{\omega} \iint_{\omega} \frac{u}{U} d\sigma &= 1 \\ \frac{u}{U} &= 0 \text{ sur la surface latérale du tube.} \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Pour tout mouvement graduellement varié, c'est-à-dire demeurant en bref assez proche d'un mouvement uniforme, le système *intégral-différentiel* (8), apparemment fort complexe, est justiciable d'une fructueuse méthode d'approximation qui va être exposée.

3. DÉFINITION D'UN MOUVEMENT UNIFORME DE RÉFÉRENCE.

Si l'écoulement est *uniforme*, $\dot{u} = 0$. Posant $u/U = \xi$, le système (8) se simplifie et devient :

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_2 \xi - \frac{1}{\omega} \int_x \frac{d\xi}{dn} ds &= 0 \\ \frac{1}{\omega} \iint_{\omega} \xi d\sigma &= 1 \\ \xi &= 0 \text{ sur la surface latérale du tube.} \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Il montre que la fonction ξ ne dépend que de la section ω .

Pour un tube circulaire de rayon r , par exemple, une intégration classique donne :

$$\xi = 2 \left(1 - \frac{y^2 + z^2}{r^2} \right)$$

Cette constatation suggère, afin de poursuivre l'étude du mouvement graduellement varié, de la rapporter à un *mouvement uniforme de référence* de même débit, c'est-à-dire de même vitesse U , et de fixer son état par l'écart de vitesse, ou par toute quantité proportionnelle à celle-ci, qu'il

présente avec ce dernier. D'une façon précise, à cet effet, est choisi le nombre :

$$\varepsilon = \frac{u}{U} - \xi, \quad (10)$$

u est la vitesse réelle du mouvement graduellement varié, U sa vitesse moyenne dans la section ω , ξ la valeur du quotient u/U de la vitesse du mouvement uniforme de vitesse moyenne U . Par hypothèse, ε demeure petit devant u/U .

4. LOI DU MOUVEMENT GRADUELLEMENT VARIÉ.

Comme conséquence directe des définitions posées et des résultats obtenus ci-dessus, l'écart ε satisfait au système d'équations :

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_2 \varepsilon - \frac{1}{\omega} \int_x \frac{d\varepsilon}{dn} ds &= \frac{1}{v} U \left(\frac{\dot{u}}{U} - \frac{1}{\omega} \iint_{\omega} \frac{\dot{u}}{U} d\sigma \right) \\ \iint_{\omega} \varepsilon d\sigma &= 0 \\ \varepsilon &= 0, \text{ sur la surface latérale du tube} \end{aligned} \right. \quad (11)$$

analogue à (8), mais le degré d'infinitude de ε permet d'en simplifier le développement,

Multipliant les premières équations (9) et (11) respectivement par $-\varepsilon d\sigma$ et $\varepsilon d\sigma$, ajoutant, puis intégrant dans ω , après avoir désigné par λ la quantité.

$$\lambda = - \int_x \frac{d\varepsilon}{dn} ds, \quad (12)$$

dépendant comme λ de la seule section (ω), il vient :

$$\int_x \frac{du}{dn} ds + \lambda U + \frac{1}{v} \iint_{\omega} (\varepsilon - 1) \dot{u} d\sigma = 0. \quad (13)$$

L'élimination de l'intégrale curviligne entre les équations (5) et (13) donne :

$$I = \frac{\lambda v}{g \omega} U + \frac{1}{g \omega} \iint_{\omega} \varepsilon \dot{u} d\sigma \quad (14)$$

Ici intervient l'approximation annoncée tenant à la petitesse de ε . Par (10), en effet, le second terme de (14) égal à :

$$- \frac{1}{g \omega} \iint_{\omega} \left(\frac{u}{U} - \varepsilon \right) \dot{u} d\sigma,$$

est équivalent à :

$$- \frac{1}{g \omega} \iint_{\omega} \frac{u \dot{u}}{U} d\sigma,$$

et l'évaluation de cette sommation qui s'effectue en posant :

$$\alpha = \frac{1}{\omega} \iint_{\omega} \left(\frac{u}{U} \right)^2 d\sigma \quad (15)$$

donne :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \right),$$

de telle sorte que :

$$I = \frac{\lambda \nu}{g \omega} \cdot U + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \right) \quad (16)$$

Enfin, par la définition (3) de I et en faisant état de l'égalité de $\sin i$ à $\partial Y / \partial x$ (OY verticale ascendante), il vient l'équation du mouvement graduellement varié :

$$\frac{\lambda \nu}{g \omega} U + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\omega} + Y \right) = 0 \quad (17)$$

qui affirme la *proportionnalité de la vitesse moyenne d'écoulement U au gradient de charge hydraulique* :

$$\Phi = \frac{\alpha U^2}{2g} + \frac{p}{\omega} + Y.$$

Dorénavant, seuls seront pris en considération les écoulements à très *faibles vitesses*, pour lesquels $\alpha U^2 / 2g$ est négligeable devant $(p/\omega) + Y$. Dans ces conditions, la charge réduite à ses termes de pression et de position est équivalente à :

$$\Phi = \frac{p}{\omega} + Y. \quad (18)$$

qui sera retenue pour représenter la vitesse moyenne d'écoulement par :

$$U = - \frac{g \omega}{\lambda \nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (19)$$

Les conséquences de (19) qui seront décrites ont donné lieu à des vérifications expérimentales généralement satisfaisantes qui justifient les approximations ci-dessus, effectuées sous la double hypothèse d'un mouvement *quasi uniforme et très lent*.

5. ACTION SUR LE TUBE.

Le tube considéré en (2) est limité par sa surface latérale cylindrique (L) et par deux sections planes non nécessairement droites (σ) et (σ'). Soit

$\bar{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ la normale extérieure en tout point régulier de ce contour (fig. 2).

FIG. 2

Une particule de volume $d\mathcal{V}$ du liquide filtrant à la vitesse $\bar{V}$ est sollicitée par la force de pesanteur $\bar{F} d\mathcal{V}$, dont le potentiel est désigné par Y ($\bar{F} = -\text{grad } Y$). Les efforts à la surface du liquide contenu dans le tube, opposés à ceux exercés par celui-ci, tant sur la paroi (L) du tube que sur les sections liquides (σ) et (σ'), sont désignés par $\bar{T} d\sigma$ pour tout élément d'aire $d\sigma$, de telle sorte que l'action globale a appliquée à (L) est :

$$a = - \iint_L \bar{T} d\sigma \quad (20)$$

Le *Théorème des quantités de mouvement* en permet la détermination. Pour le liquide contenu dans le tube, il s'écrit en effet :

$$\iiint_V \rho \left(\bar{F} - \frac{d\bar{V}}{dt} \right) d\mathcal{V} + \iint_{\sigma} \bar{T} d\sigma + \iint_{\sigma'} \bar{T} d\sigma + \iint_L \bar{T} d\sigma = 0$$

d'où :

$$a = \iiint_V \rho \bar{F} d\mathcal{V} + \iint_{\sigma} \bar{T} d\sigma + \iint_{\sigma'} \bar{T} d\sigma,$$

en négligeant les forces d'inertie devant les forces données, comme, et pour la même raison, l'énergie cinétique du filet liquide a été négligée en [4] dans l'expression de son énergie totale.

Or, le vecteur $\bar{T}$, produit par $\bar{n}$ du tenseur-tension $\bar{\bar{T}}$ de coordonnées (*) :

$$N_1 = N_2 = N_3 = -p$$

$$T_1 = 0, \quad T_2 = \rho \frac{\partial u}{\partial z}, \quad T_3 = \rho \frac{\partial u}{\partial y},$$

(*) Notation de LAMÉ.

On a posé : $\mu = \nu \rho$.

Compte tenu de ce que $v = w = 0$ [2].

a pour composantes :

$$T_x = -\alpha p + \beta \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma \mu \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$T_y = \alpha \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \beta p,$$

$$T_z = \alpha \mu \frac{\partial u}{\partial z} - \gamma p,$$

et il vient pour celles de $\bar{a}$:

$$a_x = - \iiint_V \rho \frac{\partial \gamma}{\partial x} dV - \iint_{\sigma+\sigma'} \alpha p d\sigma + \mu \iint_{\sigma+\sigma'} \left(\beta \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma \frac{\partial u}{\partial z} \right) d\sigma,$$

$$a_y = - \iiint_V \rho \frac{\partial \gamma}{\partial y} dV - \iint_{\sigma+\sigma'} \beta p d\sigma + \mu \iint_{\sigma+\sigma'} \alpha \frac{\partial u}{\partial y} d\sigma,$$

$$a_z = - \iiint_V \rho \frac{\partial \gamma}{\partial z} dV - \iint_{\sigma+\sigma'} \gamma p d\sigma + \mu \iint_{\sigma+\sigma'} \alpha \frac{\partial u}{\partial z} d\sigma,$$

Mais il est aisé de s'assurer, par transformation en intégrales curvilignes, que les derniers termes de chacune des expressions précédentes sont nuls comme est nul u sur les périmètres de σ et σ' , si bien que l'action cherchée est équipollente au vecteur (**):

$$\bar{a} = \iiint_V \rho \text{grad } \gamma dV - \bar{n} \iint_{\sigma} p d\sigma - \bar{n}' \iint_{\sigma'} p d\sigma. \quad (21)$$

Le fait que cette grandeur soit *indépendante de la viscosité du liquide* est tout à fait remarquable. Il est à l'origine d'utiles simplifications dans l'évaluation des efforts exercés sur un massif perméable par le liquide qui s'y écoule.

II

FILTRATION UNIDIMENSIONNELLE

1. CONSTITUTION DES MASSIFS FILTRANTS.

Les sols perméables (sables, argiles, vases) sont constitués essentiellement par la juxtaposition de grains solides, enrobés d'eau qui y adhère plus ou moins, et de ce fait ne participe pas au mouvement général de filtration, ménageant en-

tre eux des intervalles actifs gorgés d'eau qui s'y écoulent. Sera envisagée une fragmentation de tels ensembles en particulier macroscopiques, de volume considéré comme infinitésimal pour les besoins de l'analyse, mais comportant un très grand nombre de grains et par suite un très grand nombre d'intervalles actifs. La surface limitant une telle particule est, par définition de celle-ci, tout entière tracée dans les seuls intervalles actifs, échappant ainsi aux grains et aux pellicules d'eau qui y demeurent attachés.

Les intervalles actifs s'assemblent en tubes de filtration et il est ici supposé que ceux-ci sont sensiblement parallèles à l'axe.

2. LOI DE LA FILTRATION.

COEFFICIENT DE PERMÉABILITÉ.

Pour chacun de ces tubes, il est loisible de concevoir des caractéristiques géométriques moyennes et notamment une section droite d'aire ω , de périmètre χ , à travers laquelle filtre le débit (1.1.19) :

$$q = - \frac{g \omega^2}{\lambda \nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (1)$$

Soit alors une section d'aire Ω , normale au tube sur laquelle, par conséquent, le gradient hydraulique $\partial \Phi / \partial x$ demeure constant et dont la *section mouillée*, c'est-à-dire l'aire totale des sections droites des intervalles actifs coupés par (Ω) est $\tau \Omega$. Le débit Q à travers (Ω) est :

$$Q = - \frac{g}{\nu} \sum_{\Omega} \frac{\omega^2}{\chi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2)$$

La vitesse *moyenne nette*, rapportée aux seuls tubes de filtration, est :

$$U = \frac{Q}{\tau \Omega} \quad (3)$$

La vitesse *moyenne brute*, relative à la section filtrante d'aire Ω , est :

$$V = \frac{Q}{\Omega} \quad (4)$$

Ces deux grandeurs ne doivent faire l'objet d'aucune confusion. D'expériences systématiques sur des filtres de sable, DARCY a pu déduire la proportionnalité de la vitesse moyenne brute de filtration U au gradient hydraulique $\partial \Phi / \partial x$. Cette loi :

$$V = -K \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (5)$$

est bien compatible avec les équations de l'hydrodynamique comme il résulte des développe-

(**) $\bar{n}$ et $\bar{n}'$, unitaires normaux extérieurement à (σ) et (σ') .

ments précédents qui mettent en outre en lumière la dépendance du *coefficient de perméabilité* K ayant les dimensions ($L T^{-1}$) d'une vitesse des caractéristiques physiques du filtre et du liquide filtrant. En effet :

$$K = \frac{g}{\Omega \nu} \sum_{\omega} \frac{\omega^2}{\lambda} = \frac{g \eta}{\nu} \times \text{valeur moyenne de } \frac{\omega}{\lambda} \text{ dans } \Omega.$$

K est ainsi fonction des dimensions transversales et de la forme des tubes (ω/λ), de la distribution de ces tubes (η), de la viscosité de l'eau (ν).

Pour simplifier l'écriture de certains développements ultérieurs, nous posons :

$$k = \frac{g}{\nu} \text{ valeur moyenne de : } \frac{\omega}{\lambda}$$

si bien que :

$$K = \eta k$$

Cette analyse, qui explicite les divers facteurs dont dépend la perméabilité d'un filtre, n'est guère susceptible, étant donné l'irrégularité de forme des tubes et la diversité de leur répartition dans un sol donné, d'extension quantitative, et c'est à l'expérimentation, sur échantillon prélevés ou mieux *in situ*, que sont demandées en fait et pour chaque cas particulier les valeurs numériques du coefficient de perméabilité dont voici, ci-dessous, pour diverses natures de terrains, quelques ordres de grandeur.

VALEURS MOYENNES APPROXIMATIVES
DU COEFFICIENT DE PERMÉABILITÉ
POUR DIVERS TERRAINS

Désignation du sol	K (m/s)
Sable	5 10 ⁻⁵
Sable fin	10 ⁻⁵
Sable argileux	5 10 ⁻⁹
Limon argileux	10 ⁻⁹
Argile grasse	5 10 ⁻¹⁰

3. ACTION DE COURANT.

Soit une fraction finie d'un massif, occupant, grains et liquide compris, le volume $\mathcal{V}$ limité par la surface $\mathcal{S}$ et comportant un très grand nombre de grains dont les intervalles actifs de volume total $\mathcal{V}'$ sont gorgés d'eau en mouvement ou susceptibles de se mouvoir sous une diffé-

rence de charge convenable. Le module des vides (*) de ce milieu étant m par définition :

$$\mathcal{V}' = m \mathcal{V}$$

La résultante $\bar{A}$ de l'action de l'eau sur l'ensemble des grains de $\mathcal{V}$ se déduit de (1.1.21) par une double intégration étendue :

— Au volume $\mathcal{V}'$ occupé effectivement par l'eau libre;

— A la surface $\mathcal{S}$, car sur celle-ci l'aire des grains ou de la pellicule d'eau fixée à chacun d'eux est nulle ou quasi nulle.

Il vient :

$$\bar{A} = - \iiint_{\mathcal{V}'} \varrho \operatorname{grad} Y d \mathcal{V} - \iint_{\mathcal{S}} \bar{n} p d \sigma$$

Or, par la transformation de GREEN :

$$\iint_{\mathcal{S}} \bar{n} p d \sigma = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{grad} p d \mathcal{V},$$

et pour le volume infinitésimal $d \mathcal{V}$ comportant le volume d'eau $d \mathcal{V}' = m d \mathcal{V}$, l'action élémentaire sur les grains est :

$$d \bar{A} = - (\varrho m \operatorname{grad} Y + \operatorname{grad} p) d \mathcal{V} \quad (8)$$

Dans le champ gravitique (OY verticale ascendante), $Y = g Y$, et comme la charge Φ est équivalente à $(p/\varpi) + Y$, introduisant dans (8) cette dernière quantité, celle-ci prend la forme :

$$d \bar{A} = \left[- \varpi \operatorname{grad} \Phi + \varpi (1 - m) \operatorname{grad} Y \right] d \mathcal{V} \quad (9)$$

Le second terme de cette somme représente l'action archimédienne sur le volume $(1 - m) d \mathcal{V}$ des grains solides contenus dans $d \mathcal{V}$, à laquelle se réduit l'action de l'eau en l'absence d'écoulement, puisque la charge Φ est alors constante dans tout le massif.

L'action de courant correspond ainsi au premier terme de (9), soit $-\varpi \operatorname{grad} \Phi d \mathcal{V}$. Son caractère de force de volume mérite d'être noté.

III

FILTRATION TRIDIMENSIONNELLE

1.

Comme au chapitre précédent, il est supposé que les intervalles du massif s'assemblent natu-

(*) Le module des vides ne doit pas être confondu avec l'indice des vides ϵ fréquemment utilisé par les praticiens, défini comme rapport du volume des vides au volume des pleins et lié au précédent par $\epsilon = (m/1 - m)$.

rellement en *tubes de filtration* dans lesquels l'eau s'écoule effectivement. Mais ici, ces derniers sont *a priori* de directions quelconques dans l'espace. Cette organisation contient un schéma de calcul propice à de fructueuses investigations analytiques qui vont être exposées.

2. LOI DE LA FILTRATION. TENSEUR DE PERMÉABILITÉ.

Soient $M(x, y, z)$ un point du massif filtrant rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz (Oy verticale ascendante) et en ce point, tracé dans le massif, l'élément de surface σ de normale $n(\alpha, \beta, \gamma)$ et l'angle solide infiniment délié $d\Sigma$, de sommet M , d'axe $\bar{n}$ (fig. 3). Soit $\eta(\bar{n}) d\Sigma$ la surface mouillée d'unité d'aire de σ correspondant aux tubes de filtration dont les directions intérieures à $d\Sigma$ sont ainsi sensiblement parallèles à $\bar{n}$. La surface mouillée par ces tubes, dont l'unité d'aire de l'élément de surface σ_1 de normale $\bar{n}_1$ tracée dans le massif est :

$$\eta'(\bar{n}) \bar{n} \cdot \bar{n}_1 d\Sigma$$

Le *gradient hydraulique* en M suivant la direction $\bar{n}_1$ étant j , compte tenu du quasi-parallélisme des tubes et par application des résultats antérieurs [1.2.2] relatifs à cette circonstance, le débit filtrant au travers de l'unité d'aire de σ , le long des tubes de directions intérieures à $d\Sigma$, est :

$$dq = k \eta'(\bar{n}) \bar{n} \cdot \bar{n}_1 j d\Sigma$$

Le débit total, au travers de l'unité d'aire de σ , le long des tubes de toutes directions possibles,

FIG. 3

résulte de l'intégration de dq au demi-espace (angle solide 2π) situé par rapport à σ_1 du côté de la normale positive $\bar{n}_1$. Soit (1.1.18) :

$$\Phi = \frac{P}{\omega} + y,$$

la *charge hydraulique* en M , on sait que :

$$j = - \frac{d\Phi}{dn} = - \left(\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

Il vient ainsi :

$$q = - \int_0^{2\pi} k \eta' \frac{d\Phi}{dn} \bar{n} \cdot \bar{n}_1 d\Sigma$$

Sous le signe d'intégration k et η sont fonction de l'orientation du tube qu'ils concernent, c'est-à-dire de $\bar{n}(\alpha, \beta, \gamma)$, et le résultat de la sommation demeure en définitive fonction de $\bar{n}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. Ce qui conduit à poser :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \int_0^{2\pi} k \eta' \alpha^2 d\Sigma, \quad B = \int_0^{2\pi} k \eta' \beta^2 d\Sigma, \\ C = \int_0^{2\pi} k \eta' \gamma^2 d\Sigma, \quad D = \int_0^{2\pi} k \eta' \gamma \beta d\Sigma, \\ E = \int_0^{2\pi} k \eta' \alpha \gamma d\Sigma, \quad F = \int_0^{2\pi} k \eta' \beta \alpha d\Sigma \end{array} \right. \quad (1)$$

et à introduire le *tenseur symétrique du second ordre* K , de matrice :

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{bmatrix} \quad (2)$$

ou *tenseur de perméabilité*, par lequel le débit unitaire q s'exprime sous la forme condensée :

$$q = - \bar{K} \cdot \text{grad } \Phi \cdot \bar{n}_1 \quad (3)$$

Notamment, les débits par unité d'aires normales aux axes Ox, Oy, Oz , sont respectivement, au point $M(x, y, z)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} q_x = A \frac{\partial \Phi}{\partial x} + F \frac{\partial \Phi}{\partial y} + E \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \text{et deux analogues par permutation circulaire.} \end{array} \right. \quad (4)$$

De (3), par application de la transformation de GREEN, résulte l'expression du *débit sortant* du volume infiniment petit dV entourant le point M :

$$dQ = - \text{div} (\bar{K} \cdot \text{grad } \Phi) dV \quad (5)$$

L'équation (5) traduit la *Loi de filtration* sous sa forme la plus générale et donne lieu à diverses particularisations.

a) S'agissant d'un massif — par exemple constitué par du sable bien tassé, dont les grains sont fixés et par suite l'indice des vides m constant en chaque point — siège d'un écoulement à surface libre, elle donne :

$$\text{div} (\bar{K} \cdot \text{grad } \Phi) = 0$$

en tout point de la nappe, et à cette équation

indéfinie doivent être adjointes deux conditions aux limites exprimant la nullité du débit q normalement au fond imperméable de normale $\vec{n}$ sur lequel repose le sable, et l'égalité de la pression p à la pression atmosphérique p_0 en tout point de la surface libre (L) de la nappe, surface d'ailleurs inconnue, et variable avec le temps dans toute autre éventualité que celle d'un mouvement stationnaire.

b) Mais sollicité par les charges superficielles et l'action de courant, le massif peut changer de forme — c'est le cas d'une argile qui se consolide — et le module des vides m est fonction du temps. Le volume fluide $m d\mathcal{V}$, contenu à l'instant t dans le volume $d\mathcal{V}$ gorgé d'eau, augmente de $(\partial m/\partial t) dt \cdot d\mathcal{V}$, pendant la période dt succédant à l'instant t , et cette quantité étant précisément égale au débit rentrant $-dQ$ dans $d\mathcal{V}$ pendant ce temps, il vient par (5) l'équation indéfinie de l'écoulement :

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \text{div}(\vec{K} \cdot \vec{\text{grad}} \Phi) = 0$$

c) Plus généralement, que les pores de $d\mathcal{V}$ soient ou non gorgés d'eau, désignant par $\mathcal{N} d\mathcal{V}$ le volume de celle-ci à l'instant t , on a :

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = \text{div}(\vec{K} \cdot \vec{\text{grad}} \Phi) = 0$$

d) Les mouvements permanents de filtration pour lesquels vitesses et pressions demeurent indépendantes du temps méritent enfin une attention spéciale. En tout point $M(x, y, z)$, la charge Φ est fonction, à l'exclusion du temps t des seules coordonnées x, y, z . La vitesse brute de filtration est toujours $V = -\vec{K} \cdot \vec{\text{grad}} \Phi$ et l'équation de continuité traduisant l'invariance du flux sortant de l'élément de volume s'écrit :

$$\text{div}(\vec{K} \cdot \vec{\text{grad}} \Phi) = 0.$$

3. HOMOGÉNÉITÉ ET ISOTROPIE.

Les coordonnées du tenseur de perméabilité et ses directions principales dépendent en toute généralité des coordonnées x, y, z , du point M où est considéré l'écoulement. Une circonstance remarquable est celle d'un milieu *homogène* pour lequel ces grandeurs sont en tout point les mêmes, ce qui entraîne d'évidentes simplifications tenant à l'existence d'axes principaux de directions fixes, par rapport auxquels $\vec{K}$, constant dans tout le massif, prend la forme réduite diagonale :

$$\vec{K} = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} \quad (6)$$

Il vient alors :

$$q = - \left(A \frac{\partial \Phi}{\partial x} x_1 + B \frac{\partial \Phi}{\partial y} \beta_1 + C \frac{\partial \Phi}{\partial z} \gamma_1 \right), \quad (7)$$

$$dQ = - \left(A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) d\mathcal{V}. \quad (8)$$

Un autre cas particulier important concerne les milieux *isotropes*, tels que K et γ y soient, en un point M donné, les mêmes pour toutes directions, c'est-à-dire indépendants de $u(x, y, z)$. Le tenseur $\vec{K}$ prend alors une forme simple, puisque ses coordonnées :

$$A = k \gamma \int_0^{2\pi} x^2 d\Sigma, \quad B, \quad C$$

sont égales, tandis que :

$$D = k \gamma \int_0^{2\pi} \gamma \beta d\Sigma, \quad E, \quad F$$

sont nulles, en application de deux propriétés connues et quasi évidentes des fonctions orthogonales. Le calcul de la valeur commune des trois premières s'effectue dans le système de coordonnées sphériques ($r = 1, \varphi, \theta$) de pôle M , et cette quantité ou *coefficient de perméabilité* du milieu isotrope a pour valeur :

$$K = k \gamma' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \pi k \gamma'.$$

mais sa détermination à partir de la formule ci-dessus présente les mêmes difficultés que celles de k et γ' (cf. [1 2 2]) et est finalement demandée à l'expérience.

Les débits définis au précédent article ont ainsi, dans le cas de l'isotropie du milieu, respectivement pour expressions :

$$q = -K \vec{\text{grad}} \Phi \cdot \vec{n}_1 \quad (9)$$

$$dQ = -\text{div}(\vec{K} \cdot \vec{\text{grad}} \Phi) d\mathcal{V} \quad (10)$$

Enfin, la double circonstance d'une *isotropie homogène*, si fréquemment évoquée par les ingénieurs comme approximation suffisante pour leurs besoins, implique la constance du coefficient de perméabilité scalaire K dans tout le mas-

sif, d'où résulte l'expression du débit sortant du volume $d\mathcal{V}$:

$$dQ = -K \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) d\mathcal{V}, \quad (11)$$

et la condition sur le contour imperméable (S) de normale $\bar{n}(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

4. ACTION DE COURANT.

L'action exercée par le courant sur les grains du massif perméable entre lesquels il filtre se détermine comme en [1.2.3] où sont mis en évidence comme sollicitant le volume élémentaire $d\mathcal{V}$,

— l'action archimédienne :

$$\bar{\omega} (1 - m) \overline{\text{grad } y} d\mathcal{V}$$

— l'action de courant :

$$- \bar{\omega} \overline{\text{grad } \Phi} d\mathcal{V}$$

soit pour l'action totale :

$$\overline{dA} = [-\bar{\omega} \overline{\text{grad } \Phi} + \bar{\omega} (1 - m) \overline{\text{grad } y}] d\mathcal{V}$$

indépendante du tenseur de perméabilité.

5. RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS.

Les développements ci-dessus supposent ainsi les massifs naturels formés de grains, réductibles, en ce qui concerne l'écoulement de filtration, au schéma suivant. Disposant d'un très petit volume matériel continu $d\mathcal{V}$ et d'un très grand nombre de fines aiguilles, à l'aide de chacune de celles-ci on transperce le premier d'une manière quelconque un très grand nombre de fois. Le résultat de l'opération est une des particules macroscopiques dont la juxtaposition constitue le volume filtrant $\mathcal{V}$ soumis au calcul. Ainsi à la structure naturelle granulaire, a été substitué, pour les besoins de l'analyse, un continu matériel percé de tubes. Cet artifice n'est pas sans soulever quelques objections théoriques, mais l'expérience en justifie dans une certaine mesure la légitimité. Ceci étant, l'établissement des équations générales régissant le champ des vitesses et celui des actions hydrodynamiques internes d'un tel massif a nécessité l'introduction successive :

a) D'un coefficient de filtration $k(\bar{n})$ et de l'aire

mouillée unitaire $\eta'(\bar{n})$ relatifs en tout point M à chaque direction de l'espace;

b) Du tenseur $\bar{K}$, dont les coordonnées, par suite d'un changement de notations qui s'explique de lui-même, sont contenues dans l'expression :

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \iint_{\sigma} k \eta' \alpha_i \alpha_j d\sigma,$$

l'intégrale étant étendue à la sphère de centre M et de rayon unitaire.

Cette grandeur fondamentale, que nous avons proposé autrefois d'appeler *tenseur de perméabilité*, donne lieu à interprétation intéressante. Elle n'est autre en effet que le tenseur d'inertie relatif à son centre d'une simple couche sphérique de rayon unité et de densité $(1/2) k \eta'$. L'*ellipsoïde d'inertie* de cette distribution est indépendant du point considéré du massif si ce dernier est homogène, c'est une sphère s'il est isotrope. Dans la plupart des cas usuels d'une constitution ayant mis en œuvre la seule gravité, il est de révolution autour de son axe vertical. Φ désignant en chaque point le potentiel de l'écoulement ou charge au sens de BERNOULLI, les propriétés du champ des vitesses et du champ des actions hydrodynamiques sont résumées formellement par la valeur du débit filtrant au travers de l'unité de volume, soit :

$$- \text{div} (\bar{K} \cdot \overline{\text{grad } \Phi}),$$

et par celle de l'action exercée par le courant sur la même portion du massif, soit :

$$- \bar{\omega} \overline{\text{grad } \Phi}.$$

indépendante de la constitution de celui-ci et de la viscosité du liquide en mouvement.

Il convient, en outre, de noter que tout ceci suppose essentiellement :

- Le régime de filtration, lent, uniforme ou quasi uniforme, ce qui revient à admettre une *limite supérieure* du gradient hydraulique et une limite supérieure de ses variations temporelles, au-delà desquelles cette double circonstance n'est pas réalisée;
- Que la proportion de l'eau morte, entourant les grains, à l'eau circulante, qui semble bien devoir dépendre du gradient hydraulique, demeure faible [1.2.3], ce qui *limiterait inférieurement* cette dernière quantité.

Sous ces réserves, c'est-à-dire dans la plupart des éventualités usuelles, les résultats établis sont propres à représenter convenablement le phénomène en cause.

IV. — APPLICATIONS

La détermination de l'écoulement de l'eau dans le sol a donné lieu à d'importants travaux dont les résultats sont exposés dans de nombreux ouvrages, notamment dans ceux cités en référence auxquels le lecteur se reportera éventuellement. Il nous a néanmoins semblé utile de classer et de décrire ici les méthodes qui y sont couramment mises en œuvre et par lesquelles à une analyse souvent inaccessible sont substitués de fructueux procédés d'approximation. A cette fin, nous envisagerons très généralement, et sauf exception spécifiée, des mouvements *plans*, en distinguant les écoulements non permanents des écoulements stationnaires, les écoulements en charge des écoulements à surface libre.

a) Mouvements permanents

1. RÉSEAUX EQUIPOTENTIELLES-LIGNES DE COURANT.

Sous l'hypothèse de la permanence de l'écoulement, vitesse et pression sont indépendantes du temps, et la charge hydraulique Φ en tout point est fonction des seules coordonnées de celui-ci.

Dans l'hypothèse la plus générale de l'anisotropie, la vitesse brute de filtration (1.2.3) est :

$$\vec{V} = -\vec{K} \cdot \text{grad } \Phi$$

et l'équation de continuité traduisant l'invariance temporelle du flux sortant de l'élément de volume s'écrit (1.2.10) :

$$\text{div} (\vec{K} \cdot \text{grad } \Phi) = 0$$

L'étude des mouvements en cause sera limitée au cas d'un phénomène plan rapporté aux axes $Ox.Oy$ (Oy , verticale ascendante) et d'un massif *homogène* de directions principales parallèles aux axes de coordonnées. Cette circonstance, d'un réel intérêt pratique, concerne en particulier les infiltrations dans le corps des digues en terre, les infrastructures de barrage, autour des parafoinilles de ces ouvrages, et généralement à travers tout massif, indéfini le long d'une direction horizontale Oz , dont le mode de constitution par sédimentation (massifs naturels) ou compactage (massifs artificiels) a mis en jeu la seule gravité.

Soient u et v les coordonnées de $\vec{V}$, A et B celles du tenseur de perméabilité $\vec{K}$, mis sous forme diagonale, qui ne sont autres que les *coefficients de perméabilité* horizontal et vertical du massif. Le mouvement de filtration est régi par les équations :

$$u = -A \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = -B \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (1)$$

$$A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

Les lignes :

$$\Phi(x, y) = h \quad [h \text{ paramètre } \Phi = (p/\omega) + y]$$

sont les *équipotentielles* du champ de filtration. Les *lignes de courant* $\Psi(x, y) = k$ (k paramètre) sont définies par :

$$u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$$

d'où, entre Φ et Ψ , les équations :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = B \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -A \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

compatibles avec l'équation de continuité (2). Equipotentielles et lignes de courant forment un réseau dont voici les principales propriétés. Soit l'une des *mailles* de celui-ci, constitué par l'intersection des deux équipotentielles ($h, h + \delta h$)

FIG. 4

et des deux lignes de courant ($k, k + \delta k$) (fig. 4).

Le *flux* ou débit circulant entre les deux lignes de courant consécutives $\Psi = k, \Psi = k + \delta k$ a pour valeur :

$$dq = \vec{V} \cdot \vec{n}_\Phi \delta s_\Phi = -u \delta y_\Phi + v \delta x_\Phi \\ = -\Psi_y \delta y_\Phi + \Psi_x \delta x_\Phi = \delta k \quad (3)$$

Il est égal à la différence de cote de ces lignes.

Les cosinus directeurs $\cos \alpha, \sin \alpha$ de l'équipotentielle $\Phi = h$, en M , $\cos \beta$ et $\sin \beta$ de la ligne de courant $\Psi = k$ au même point, proportionnelles respectivement à $-\Phi_x$ et Φ_y pour les premiers, à u et v pour les seconds, satisfont à :

$$\frac{\cos \alpha}{A} \cos \beta + \frac{\sin \alpha}{B} \sin \beta = 0 \quad (4)$$

Ainsi, *équipotentielle et ligne de courant du point M sont conjuguées relativement à l'ellipse de centre M et d'équation :*

Le drain de faible rayon est assimilable à un puits hydrodynamique d'affixe $-ih$, de débit Q , et la méthode des images conduit à assigner au potentiel complexe l'expression $f(z)$ de la variable $z = x + iy$:

$$f(z) = \frac{V_0}{K} z - \frac{Q}{2\pi} \log(z + ih)(z - ih)$$

S'en déduisent les équipotentiellles et les lignes de courant d'équations respectives :

$$\Phi = \frac{V_0}{K} x - \frac{Q}{2\pi} \log r_1, r_2,$$

$$\Psi = \frac{V_0}{K} y - \frac{Q}{2\pi} (\theta_1 + \theta_2).$$

ainsi que l'expression de la vitesse complexe w :

$$w = u - iv = V_0 - \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{1}{z + ih} + \frac{1}{z - ih} \right)$$

Dans le cas particulier d'une nappe au repos à l'infini ($V_0 = 0$), le réseau équipotentiellles-lignes de courant comporte une famille d'ovales de CASSINI évanescents en $-ih$, et une famille d'hyperboles d'asymptote ox (fig. 7).

FIG. 7

b) Filtration sous un rideau de palplanches.

Le rideau vertical AB est foncé jusqu'à la cote $-h$ dans un sol perméable indéfini de perméabilité K . De part et d'autre, l'eau en équilibre présente une dénivelée H (fig. 8).

FIG. 8

L'écoulement de filtration qui s'établit dans le massif admet comme ligne de courant imposée le segment OA (à l'amont), AO (à l'aval) et comme équipotentiellles les demi-droites ox' et ox'' entre lesquelles la différence de potentiel est ωH . On satisfait à ces conditions par le potentiel complexe :

$$f(z) = \frac{\omega H}{\pi} \arccos \frac{z}{ih},$$

par lequel :

$$x = h \sin \frac{\pi \Phi}{\omega H} \operatorname{sh} \frac{\pi \Psi}{\omega H},$$

$$y = h \cos \frac{\pi \Phi}{\omega H} \operatorname{ch} \frac{\pi \Psi}{\omega H},$$

Les lignes de courant sont les demi-ellipses d'équation :

$$\frac{x^2}{h^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi \Psi}{\omega H}} + \frac{y^2}{h^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi \Psi}{\omega H}} = 1.$$

Les équipotentiellles sont les quarts d'hyperboles homofocales des précédentes (foyer A) d'équation :

$$\frac{x^2}{h^2 \sin^2 \frac{\pi \Phi}{\omega H}} - \frac{y^2}{h^2 \cos^2 \frac{\pi \Phi}{\omega H}} = 1.$$

3. ÉCOULEMENTS A SURFACE LIBRE.

C'est le cas des nappes phréatiques. Très généralement la filtration s'effectue au-dessus du toit (C) d'un massif imperméable, tout en étant limitée vers le haut par une ligne d'eau (S), fixe en régime stationnaire, mais *a priori* inconnue (fig. 9). Il s'agit encore de déterminer le poten-

FIG. 9

tiel harmonique $\Phi(x, y)$. Mais l'existence de la ligne d'eau, ligne de courant le long de laquelle la pression égale la pression atmosphérique p_0 , introduit les nouvelles conditions aux limites :

$$\frac{d\Phi}{dn} = 0, \quad \Phi = \frac{p_0}{\omega} + y,$$

le long de cette courbe (S), dont l'ordonnée $y(x)$ est une *inconnue* du problème. L'analyse s'avère impuissante pour aborder celui-ci et il faut se résoudre à l'emploi de méthodes approchées qui semblent procéder de trois circonstances distinctes.

1° L'écoulement résulte de l'introduction, dans la nappe au repos ou de mouvement connu, de quelques singularités affectant suffisamment peu la ligne d'eau primitive pour que celle-ci puisse être conservée. La méthode du potentiel complexe peut encore être appliquée;

2° L'intuition ou quelques tâtonnements dirigés par celle-ci permet le tracé de la ligne d'eau qui se trouve graduée en charge et sert de base de départ pour le tracé du réseau quadratique dont les équipotentiels doivent aboutir normalement aux lignes de courant imposées. C'est l'extension aux phénomènes de filtration de la méthode de PRASIL familière aux hydrauliciens;

3° Les niveaux d'alimentation et de restitution étant peu différents, la ligne d'eau $y = y(x)$ présente de faibles pentes, et les équipotentiels qui la quittent normalement se confondent avec des segments rectilignes verticaux. La conservation du débit filtrant à travers ces derniers fixe l'équation différentielle de la ligne (S).

a) Détermination in situ de la perméabilité d'un sol

Dans le sol perméable de profondeur indéfinie, la nappe d'eau de surface libre xoz horizontale est au repos. Une crépine sphérique de rayon ρ est foncée dans celle-ci à la profondeur h , relativement grande par rapport à ρ (fig. 10) et per-

met d'injecter dans le terrain un débit d'eau dont est mesurée la valeur Q en régime permanent. Si la surface libre xoy n'est pas sensiblement modifiée par l'écoulement ainsi déterminé, le potentiel dont dérive la vitesse de ce dernier

FIG. 10

est (méthode des images, fonction harmonique-type de l'espace) :

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi K} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)$$

Il s'annule à l'infini et est équivalent à $Q/(4\pi K h)$ au voisinage de la crépine. La différence des lectures faites sur deux tubes piézométriques établis l'un au voisinage de la crépine, l'autre très loin de celle-ci, fournira cette hauteur d'où résulte la valeur du coefficient de perméabilité K . La méthode décrite implique une évidente contradiction, puisque le plan xoy y est simultanément considéré comme une équipotentielle (charge constante) et comme une surface de courant (méthode des images). Ceci n'a pas lieu de nous surprendre : en fait, la surface

FILTRATION A TRAVERS UNE DIGUE.

libre se gonfle manifestement à la verticale de la source pour se raccorder asymptotiquement avec le plan horizontal xoy avec lequel nous l'avons délibérément confondue.

b) Filtration à travers une digue.

La planche ci-contre figure la coupe en travers d'un barrage de retenue établi sur terrain imperméable (+ 390). La filtration y intervient entre le niveau amont (+ 424,50) et le filtre aval (401). La ligne d'eau quittant normalement le talus amont en A pour aboutir en B normalement au filtre a été tracée arbitrairement et graduée en charge. Les conditions aux limites auxquelles il a fallu satisfaire sont évidentes : le parement amont OA et le contour du filtre sont deux équipotentiels, l'horizontale (390) est ligne de courant. On observera la réflexion des lignes de courant sur la face inférieure du filtre. Le coefficient de perméabilité de la digue étant $K = 6.10^{-7}$ m/h, le débit recueilli par le drain ressort à $Q = 10^{-5}$ m³/h.

c) Mouvement laminaire plan des eaux souterraines.

La filtration s'effectue dans le plan vertical XOY (OY, verticale descendante) au-dessus d'un massif imperméable dont le toit rectiligne fait l'angle i avec l'horizontale (fig. 11). L'approxima-

FIG. 11

tion, justifiée par la faible inclinaison de la ligne d'eau (S), consiste à supposer toutes les lignes de courant parallèles à cet axe et à identifier, par conséquent, les équipotentiels à des segments rectilignes de direction oy.

Soit $M(xy)$ un point de la ligne d'eau, m sa projection sur ox . En M règne la pression atmosphérique p_0 et la charge est :

$$\Phi = \frac{p_0}{\omega} + Y,$$

avec :

$$Y = x \sin i + y \cos i,$$

elle conserve cette valeur le long de la droite

mM , c'est-à-dire pour x donné. On en déduit la vitesse moyenne brute de filtration :

$$V = -K \left(\sin i + \cos i \frac{dy}{dx} \right),$$

et le débit unitaire suivant la direction de l'axe Oz.

$$Q = -Ky \left(\sin i + \cos i \frac{dy}{dx} \right).$$

La conservation de celui-ci entraîne l'équation différentielle de la ligne d'eau :

$$\cos i \frac{dy}{dx} + \frac{Q}{Ky} + \sin i = 0$$

dont l'intégration est immédiate.

Soit l'exemple d'une filtration permanente au-dessus d'un massif imperméable horizontal entre deux bassins à niveau constants H et h , distants de L (fig. 12).

FIG. 12

Le débit filtrant est :

$$Q = \frac{K}{2L} (H^2 - h^2),$$

et la ligne d'eau a pour équation :

$$y^2 + \frac{H^2 - h^2}{L} x - H^2 = 0.$$

Ces résultats sont licites dans la mesure où L/H est grand. L'équation de (S) est de toute manière dépourvue de sens au voisinage des sections d'extrémités $x = 0$, $x = L$.

b) Mouvements non permanents

Il s'agit d'étudier la filtration déterminée par des conditions d'alimentation ou de restitution variables dans un massif perméable à structure invariable. Un exemple mettra en lumière la complexité des problèmes de l'espèce.

4. MOUVEMENT LAMINAIRE NON STATIONNAIRE DES EAUX SOUTERRAINES.

Reprenons le cas traité ci-dessus [3.c] en ne supposant plus la permanence du mouvement. Le débit, unitaire suivant oz , filtrant parallèlement à ox entre cette ligne de courant et la ligne d'eau variable $y = y(x, t)$ est à l'instant t :

$$Q = -Ky \left(\sin i + \cos i \frac{\partial y}{\partial x} \right),$$

D'autre part, désignant comme ci-dessus le module des vides du massif par m , il vient pour l'équation de continuité :

$$m \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

L'élimination de Q entre les deux précédentes donne l'équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{K}{m} \left[\sin i \frac{\partial y}{\partial x} + \cos i \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \cos i \cdot y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]$$

dont l'intégrale n'est connue que pour quelques cas particuliers qui vont être rapidement évoqués :

a) Si la pente de la ligne d'eau $\partial y / \partial x$ demeure faible devant $\sin i$, l'équation en question se réduit à :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{K}{m} \sin i \frac{\partial y}{\partial x},$$

et admet l'intégrale générale :

$$y = f \left(x + \frac{Kt}{m} \sin i \right)$$

exprimée à l'aide de la fonction f satisfaisant aux conditions d'alimentation, c'est-à-dire pre-

nant pour $x = 0$ la forme donnée $F(t)$. Elle fait apparaître une *célérité* $[(K/m) \sin i]$ pour la propagation de la perturbation qui s'effectue par ondes planes.

b) Généralement, la pente du fond étant faible ($\sin i \neq i$; $\cos i \neq 1$), cette approximation n'a plus de sens, y demeure voisin du niveau amont initial H , et la pente de la ligne d'eau demeurant petite, $(\partial y / \partial x)^2$ est négligeable dans l'équation aux dérivées partielles qui s'écrit :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{K}{m} \left(i \frac{\partial y}{\partial x} + H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$$

Elle admet la *solution particulière* de BOUSSINESQ :

$$y = -Me^{-(k/m) (4\pi/8^2) Ht} \cos \frac{2\pi}{S} \left(\frac{Kit}{m} + N - x \right)$$

qui correspond à la propagation d'un mouvement sinusoïdal amorti avec la *célérité* Ki/m .

c) Enfin, l'écoulement sur fond horizontal ($i = 0$) est régi par l'équation :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{KH}{m} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

dont une solution particulière est :

$$y = M \cos \left(-\frac{2\pi t}{T} + \sqrt{\frac{\pi m}{2 KHT}} x \right) e^{-\sqrt{[(\pi m)/(12 KHT)]} x}$$

Cette dernière montre qu'une oscillation sinusoïdale de période T intervenant dans le bassin amont ($x = 0$) se propage sous forme d'oscillation amortie avec la *célérité* $\sqrt{2\pi KH/(mT)}$. Le théorème de FOURIER étend ce résultat à toute perturbation périodique. Bien entendu, les réserves formulées au sujet du mouvement permanent sont valables pour la circonstance qui vient d'être envisagée.

(A suivre.)