

# Étude théorique des grilles de prises d'eau du type "En-Dessous"

## Theoretical study of bottom type water intake grids

PAR

J. KUNTZMANN

ET

M. BOUVARD

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE GRENOBLE

INGÉNIEUR A ÉLECTRICITÉ DE FRANCE  
(R.E.H. ALPES 11)

*Débit dérivé et débit déversé par une grille de prise d'eau sur le fond du torrent. — Equation différentielle obtenue au prix d'hypothèses simplificatrices. — Intégration de cette équation. — Abaques pour le calcul d'une grille. — Confrontation avec les résultats expérimentaux (Orth, Meynardi, Chardonnet: Houille Blanche 3, 1954, p. 343) et avec ceux de la méthode par approximations successives (Bouvard: Houille Blanche 2, 1953, p. 290).*

*Discharge received and discharge discarded by the grid of a water intake at the bottom of a torrent. Differential equation obtained by making simplified hypotheses. Integration of this equation. Curves for the calculation of a screen. Comparisons with experimental results (Orth, Meynardi, Chardonnet: Houille Blanche 3, 1954, p. 343) and with results from the method of successive approximations (Bouvard: Houille Blanche, 2, 1953, p. 290).*

Nous avons indiqué, dans la *Houille Blanche* de mai 1953, un procédé permettant de calculer, par approximations successives, les débits de grille équipant les prises en dessous utilisées pour capter certains torrents de montagne.

Nous avons abouti à l'équation différentielle :

$$\left(\frac{dq}{dx}\right)^6 = 2 g m^2 \cos \alpha (H + x \sin \alpha) \left(\frac{dq}{dx}\right)^4 + 4 g^2 q^2 m^6 \cos^3 \alpha = 0$$

Les calculs sont basés sur les hypothèses suivantes sur lesquelles nous reviendrons à la fin de cet exposé :

- Il n'y a pas de perte de charge;
- La répartition des pressions sur la grille est hydrostatique. La vitesse normale de passage à travers les grilles correspond uniquement à cette pression;
- Le coefficient de contraction est constant et indépendant de l'obliquité de la vitesse sur la grille.

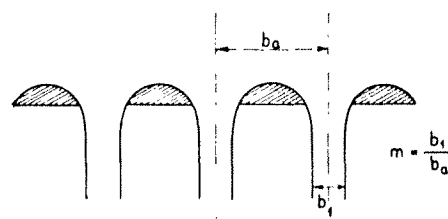


FIG. 1

Les paramètres sont les suivants :

POUR LA GRILLE :

- $\alpha$  caractérisant l'inclinaison de la grille sur l'horizontale;
- $m$  caractérisant la largeur contractée de la lame rapportée au « pas » total des barreaux de grille.

POUR L'ÉCOULEMENT :

- $q_0$ , débit par mètre linéaire de grille, à l'entrée;

— H, énergie totale à l'entrée de la grille, qui dépend en fait de la vitesse avec laquelle la grille est abordée, à débit donné.

Ces valeurs étant connues, l'équation différentielle donnerait  $q$ , débit au point courant au-dessus de la grille, en fonction de  $x$ , longueur comptée suivant la pente. En particulier, la longueur de grille nécessaire pour passer au débit  $q_0$  correspondra à la valeur de  $x$  pour laquelle  $q = 0$ .

Afin d'obtenir des résultats plus généraux permettant la représentation des résultats en abaqes, nous allons utiliser des variables sans dimension.

RÉDUCTION DES VARIABLES

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q_0^2}{g}} \quad h_0 = j h_c \quad (j \leq 1)$$

$h_0$  représentant la hauteur d'eau à l'origine.

Il est facile de voir que :

$$\frac{H}{h_c} = j + \frac{1}{2j^2}$$

$j$  caractérise donc, comme H, l'énergie, et, par suite, la vitesse à l'entrée de la grille.

Rapportons les variables à  $h_c$  et à  $q_0$  en posant :

$$\frac{x}{h_c} = \xi \quad \frac{q}{q_0} = \gamma \quad (\gamma \leq 1)$$

et, bien que cette variable soit éliminée de l'équation :

$$h = k h_c \quad (k \leq j)$$

L'équation devient maintenant :

$$\left(\frac{d\gamma}{d\xi}\right)^6 - 2\left(j + \frac{1}{2j^2} + \xi \sin \alpha\right)\left(\frac{d\gamma}{d\xi}\right)^4 + m^2 \cos \alpha + 4\gamma^2 m^6 \cos^3 \alpha = 0$$

La solution de cette équation permettrait donc de calculer, en fonction de  $\xi$ , pour  $j$  donné,  $\gamma$ , c'est-à-dire le rapport du débit courant au débit initial, ainsi que la hauteur courante de la lame d'eau sur la grille rapportée à la hauteur critique.

M. KUNTZMANN a réussi à ramener cette équation à un système linéaire à coefficients constants du deuxième ordre. On trouvera, par ailleurs, sa méthode et les résultats des calculs effectués par M. THURIOT, du Laboratoire de Calcul de l'Université de Grenoble.

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION

On l'intégrera pour  $j = 1$ , les autres solutions se déduisant de celle-ci comme on le verra plus loin. Avec :

$$a = \frac{3}{2} m^2 \cos \alpha \quad b = m^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$c = 4 m^6 \cos^3 \alpha$$

l'équation devient :

$$\left(\frac{d\gamma}{d\xi}\right)^6 - 2(a + b\xi)\left(\frac{d\gamma}{d\xi}\right)^4 + c\gamma^2 = 0$$

$$\gamma(0) = 1 \quad \text{Condition initiale} \left(\frac{d\gamma}{d\xi}\right)_0 = -m\sqrt{2\cos\alpha}$$

Nous poserons :

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = p \quad \gamma = p^2 y$$

La relation devient :

$$p^2 - 2(a + b\xi) + cy^2 = 0$$

Différentions cette relation ainsi que  $\gamma = p^2 y$  :

$$p dp - b d\xi + cy dy = 0 \tag{1}$$

$$d\gamma = p d\xi = p^2 dy + 2py dp$$

d'où :

$$d\xi = p dy + 2y dp \tag{2}$$

En éliminant  $d\xi$  entre (1) et (2) :

$$(pb - cy) dy = (p - 2by) dp$$

$t$  désignant une nouvelle variable, on peut écrire :

$$\frac{dy}{dt} = 2by - p$$

$$\frac{dp}{dt} = cy - bp$$

C'est ce système que nous intégrerons.

— Sens de variation de  $t$  et valeurs initiales.

On a :  $dp = (cy - bp) dt$ ; or  $cy - bp > 0$ , donc  $t$  est croissant puisque  $p$  l'est.

Valeurs initiales :

$$p_0 = -m\sqrt{2\cos\alpha}$$

$$y_0 = \frac{1}{2m^2\cos\alpha}$$

Les solutions de ce système sont :

$$p = e^{b \cdot t} (p_0 \operatorname{ch} \Delta t - \beta \operatorname{sh} \Delta t)$$

$$y = e^{b \cdot t} (y_0 \operatorname{ch} \Delta t - \Delta \operatorname{sh} \Delta t)$$

On en déduit  $\xi$  et  $\gamma$  :

$$\xi = \frac{p^2 + cy^2 - 2a}{2b}$$

$$\gamma = yp^2$$

— Cas particulier où  $\operatorname{tg} \alpha = 0$ .

Dans ce cas, on a :

$$p^2 - 3m^2 + 4m^6 y^2 = 0$$

En paramétrant :

$$2m^3 y = m \sqrt{3} \sin \varphi$$

$$p = m \sqrt{3} \cos \varphi = \frac{d\gamma}{d\xi}$$

d'où :

$$\gamma = \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \cos^2 \varphi$$

$$m\xi = \frac{q \sin 2\varphi - 6q + c}{8}$$

$q$  variant de  $\varphi_0$  à  $\pi/2$ ;  $\varphi_0$  étant donné par :

$$\cos \varphi_0 = -\sqrt{2/3}$$

et  $c = 6q_0 - q \sin 2\varphi_0$

#### CALCUL DES LONGUEURS DE GRILLE

L'équation précédente permet de tracer une ligne d'eau donnée correspondant à un  $j$  donné. Partons de la ligne correspondante à  $j = 1$ .

Il est facile de voir qu'on peut déduire de cette ligne d'eau toutes les lignes correspondant à des  $j$  variables. En effet, on peut admettre qu'un point courant représente le point de départ d'une nouvelle ligne d'eau, mais avec  $j$  différent, que nous allons calculer.

Le débit a pour vraie valeur, au point courant :

$$q = \gamma q_0$$

la hauteur,

$$h = k h_c$$

Soit  $l_c$  la hauteur critique correspondant au débit  $q$ . On aura :

$$\frac{l_c}{h_c} = \gamma^{2/3}$$

Nous rapporterons maintenant toutes les variables à la nouvelle hauteur critique  $l_c$  : il suffit de multiplier toutes les longueurs par  $1/\gamma^{2/3}$ . Nous aurons donc :

$$j = \frac{k}{\gamma^{2/3}} \quad \xi' = \frac{\xi}{\gamma^{2/3}}$$

$\xi'$  représentant la longueur rapportée à la nouvelle hauteur de référence.

Il faut donc déterminer également la variation de  $k$  en fonction de  $\xi$  pour pouvoir faire cette opération. On peut l'obtenir par l'expression suivante :

$$k = \left( \frac{d\gamma}{d\xi} \right)^2 \sqrt{\frac{1}{2m^2 \cos \alpha}}$$

Les résultats du calcul sont représentés sur les abaques ci-joints.  $\operatorname{tg} \alpha$  varie de 0 à 1 par dixième.  $m$  varie de 0,3 à 0,6,  $j$  de 1 à 0,2.

On constate que ces courbes sont à peu près des droites. L'équation de la tangente à l'origine de ces courbes, qu'il peut par suite être intéressant de connaître, est la suivante :

Ordonnée à l'origine :

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( j + \frac{1}{2j^2} \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{j}{j + (1/2)j^2}} + 3 \sqrt{\frac{1}{2j}} \right) \right]$$

Coefficient angulaire :

$$\frac{0,30275}{m^2} + \frac{2j^3 - 3j^2 + 1}{4j^2}$$

Pratiquement, on ne trouve que des divergences faibles entre ces droites et les courbes intégrales de l'équation différentielle.

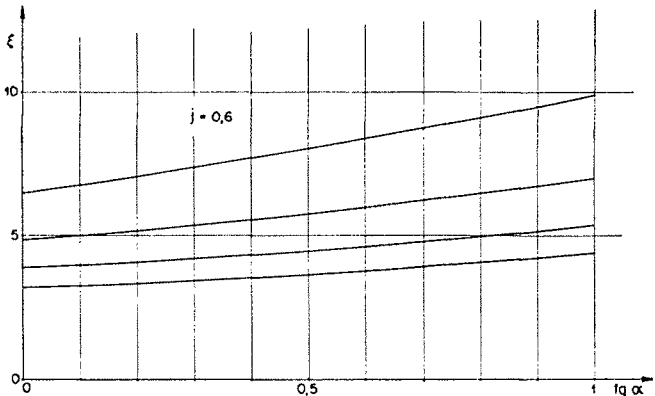
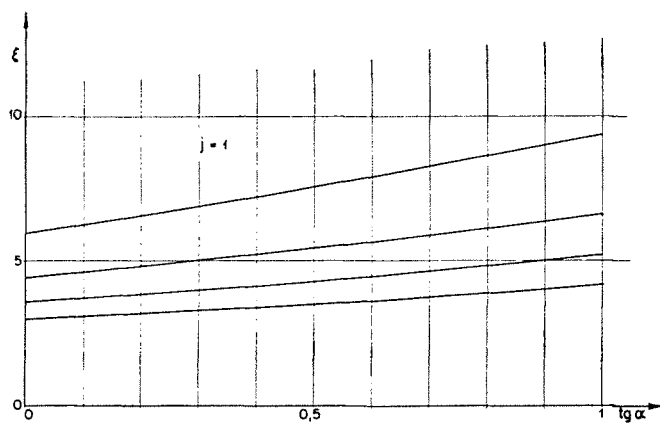
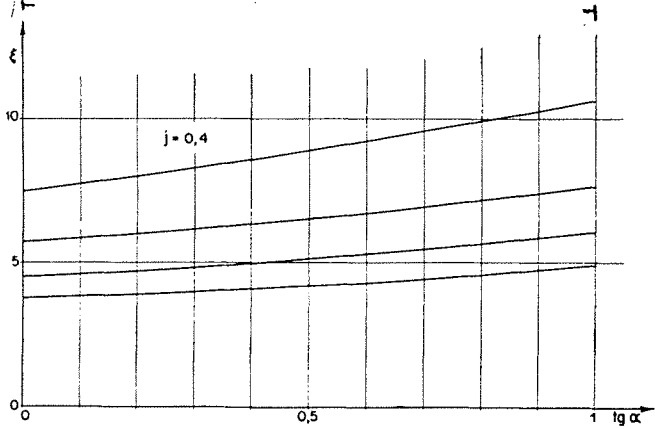
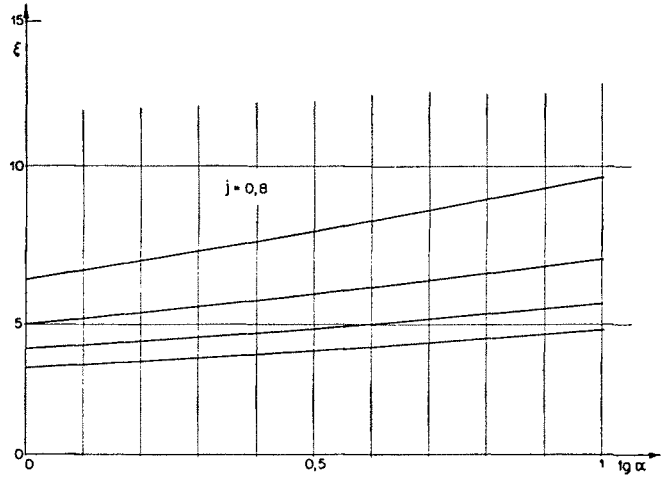
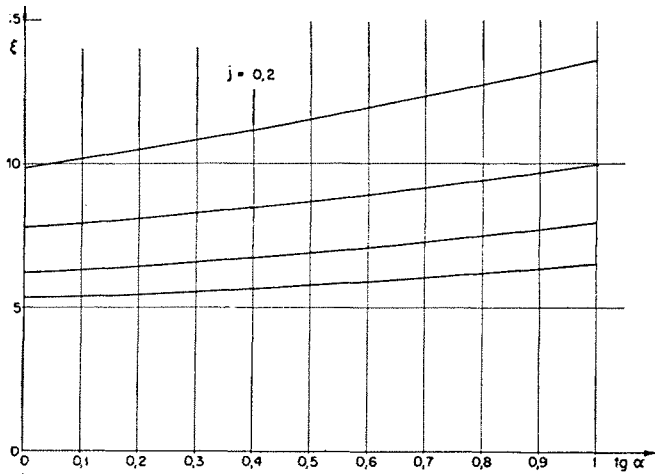
#### « SÉLECTIVITÉ » DES GRILLES

Le débit qui passe à travers les grilles est fonction du débit qui se présente. Le rapport est égal à 1 tant que la grille n'est pas saturée, il diminue ensuite suivant une certaine loi qu'il peut être intéressant de connaître. En effet, si les ouvrages en aval de la grille sont dimensionnés pour un certain débit qu'on doit éventuellement ne pas pouvoir dépasser, il faut connaître les débits maximum dont il faudra assurer ensuite l'évacuation par des ouvrages appropriés.

Des considérations de similitude analogues à celles qui précèdent nous ont permis de tirer facilement cette caractéristique des résultats précédents pour  $j = 1$  seulement. L'échelle des longueurs et des débits est alors donnée par  $\lambda^{2/3}$ ,  $\lambda$  représentant le rapport de la longueur considérée à la longueur de grille limite vis-à-vis de la saturation.

On constate d'ailleurs que l'allure de ces courbes est sensiblement indépendante de  $\alpha$  et de  $m$ . Nous avons reporté les résultats globaux sur la figure n° 2. Le premier chiffre à côté du point indique la tangente de la grille, le second le coef-

ficient  $m$ . Compte tenu du fait que ce dernier calcul amplifie considérablement l'erreur due à la limitation des décimales sur le calcul, on admettra que les courbes relatives à  $m$  et  $\alpha$  différents sont très analogues.

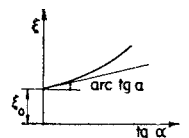


NOTATIONS

- $q$  : Débit par mètre de large à l'entrée de la grille;
- $m$  : Ecartement des barreaux (voir fig. 1);
- $\alpha$  : Angle de la grille avec l'horizontale;
- $\xi$  : Longueur de grille, rapportée à la hauteur critique  $h_c = \sqrt[3]{q^2/g}$ ;
- $j$  : Hauteur d'eau à l'entrée de la grille rapportée à  $h_c$  ( $j \leq 1$ ).

Droite tangente à l'origine } 
$$\xi_0 = \frac{1}{2m} \left[ \left( j + \frac{1}{2j^2} \right) \arcsin \sqrt{\frac{j}{j + (1/2j^2)}} + 3 \sqrt{\frac{1}{2j}} \right]$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{0,303}{m^2} + \frac{2j^3 - 3j^2 + 1}{4j^2}$$



ABAQUES

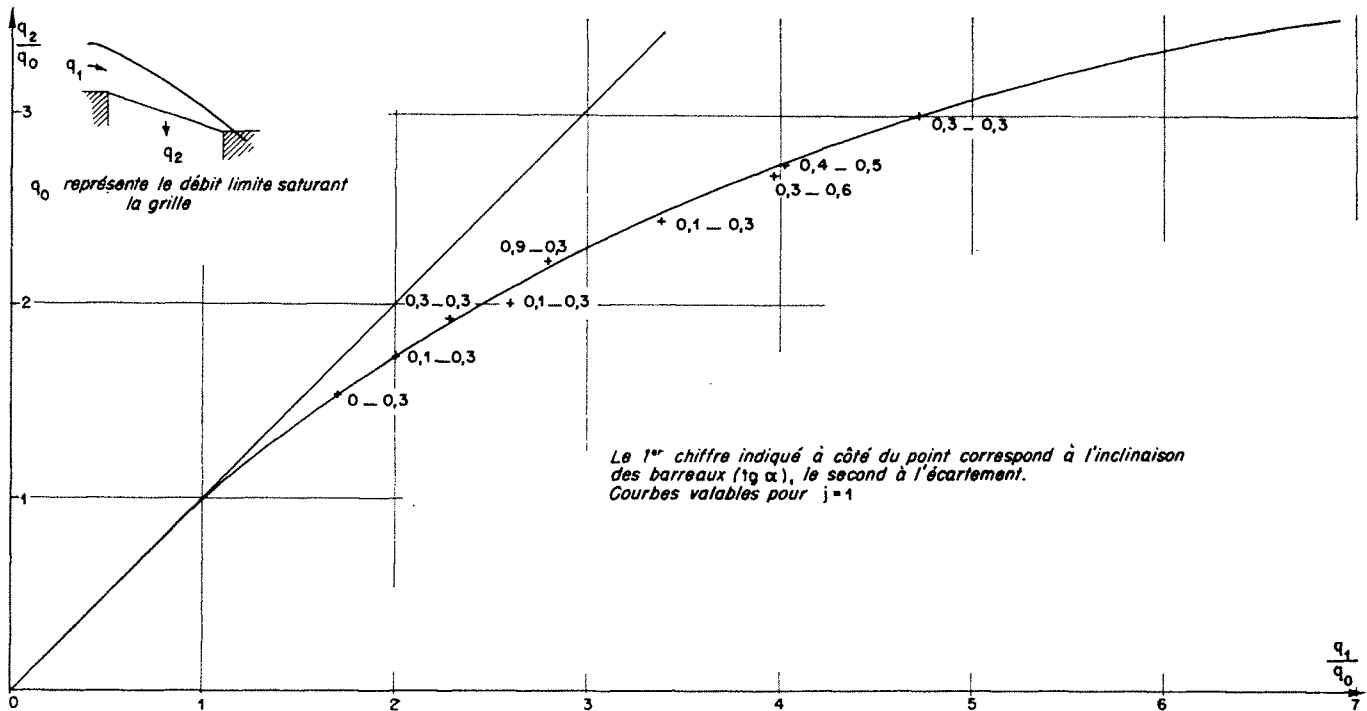


FIG. 2. — "Sélectivité" des grilles en dessous.

CONFRONTATION EXPÉRIMENTALE

Les essais de grille en dessous, effectués au Laboratoire d'Albertville et décrits dans *la Houille Blanche*, (\*) permettent de faire la comparaison indispensable entre les résultats de cette théorie et les valeurs expérimentales.

On a pu remarquer que l'accord réalisé avec le calcul approximatif que nous avons indiqué était très bon, même quand l'énergie cinétique à l'entrée de la prise était importante devant la hauteur d'eau.

L'accord avec les résultats bruts présentés par les abaques est moins bon, et ceux-ci donnent des longueurs systématiquement trop grandes, ce qui nécessite une explication.

Nous avons dit que la théorie exposée cessait d'être valable quand la hauteur de la lame devenait trop faible devant l'écartement des barreaux. C'est ce que la théorie ne peut prendre en compte, et elle suppose en fait :

- Que la section de contrôle limitant le débit entrant dans la prise est infiniment près du plan supérieur de la grille;
- Que l'épaisseur des intervalles, en gardant un rapport vide sur plein identique, diminue de façon à conserver une loi constante pour l'écoulement à travers les grilles (loi en  $\sqrt{h}$ ).

Il serait pratiquement possible de tenir compte du premier facteur, en écrivant que le débit est

(\*) *La Houille Blanche*, n° 3, 1954, p. 343.

égal à  $\sqrt{h+a}$ ,  $h$  représentant la hauteur d'eau sur le plan des grilles,  $a$  : la distance entre ce plan et la section de contrôle. Malheureusement, on ajoute aussi à l'équation différentielle un certain nombre de termes, en  $q'^2$ , qui la rendraient inintégrable. Il est, par contre, facile d'en tenir compte dans le calcul approché.

En second lieu, la courbure est dirigée vers le haut, de sorte que la pression est un peu plus grande que la valeur correspondant à la hauteur d'eau. Enfin, si la hauteur à l'entrée est égale à la hauteur critique, on trouve que la courbe  $h(x)$  a une tangente verticale, de sorte que la hauteur diminue plus rapidement en théorie qu'en pratique, et, par suite, le débit aussi. De toute façon, d'ailleurs, ces deux effets sont faibles devant le facteur précédent.

En fait, les vérifications auxquelles nous nous sommes livrés nous ont indiqué une très bonne approximation entre la théorie présentée, le calcul approximatif, et l'expérience, pour la partie amont des lignes d'eau.

Nous avons vérifié pour  $m = 0,313$ ,  $\tan \alpha = 0,2$  — puis 0,1 — pour  $j$  compris entre 0,486 et 0,57.

Le calcul par approximations successives nous a donné exactement les lignes d'eau, et le calcul théorique nous a redonné les mêmes valeurs, tant que la hauteur d'eau est supérieure à une valeur voisine de l'écartement des barreaux. L'écartement des barreaux, en « goutte d'eau », était de 9 mm, la distance entre plan des grilles et section contractée atteignant 1 cm (paramètre  $a$ ).

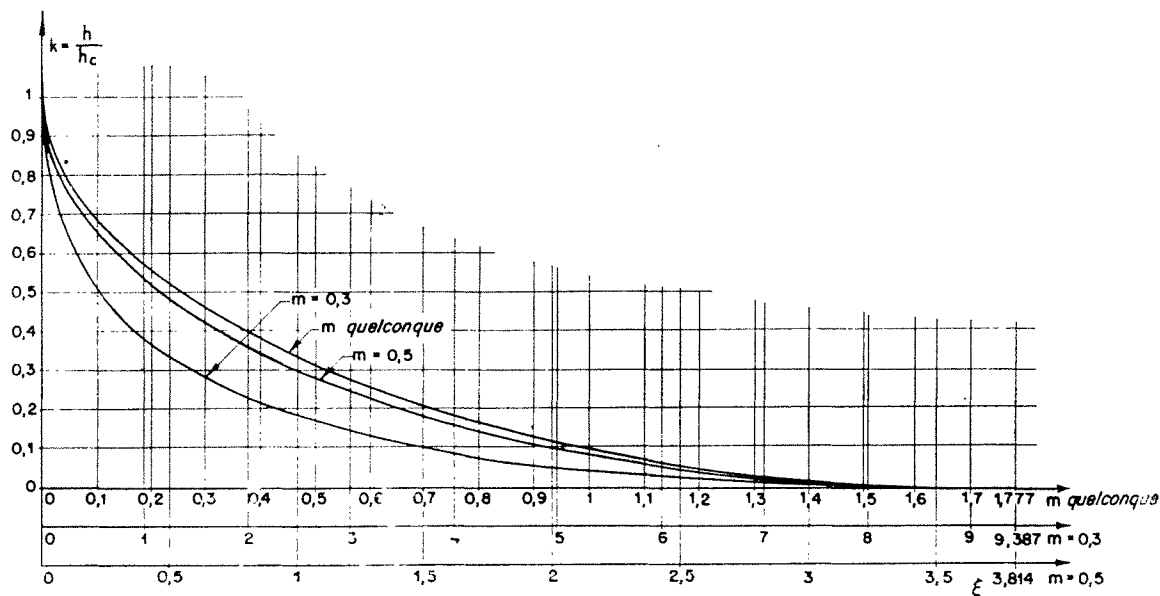


Fig. 3. — Profil des lames d'eau.

L'utilisation des abaques peut, de toute façon, être heureusement complétée par un calcul de ligne d'eau tenant compte de ces différents facteurs pratiques. Pour permettre de les déterminer plus facilement, nous donnons le tracé des courbes extrêmes rapportées à la même échelle, correspondant à  $m = 0,3$ , et  $\text{tg } \alpha = 1$  d'une part, et  $\text{tg } \alpha = 0$ , quel que soit  $m$  d'autre part, ainsi qu'une courbe moyenne correspondant à  $m = 0,5$ ,  $\text{tg } \alpha = 0,2$ . L'aspect des courbes est assez comparable et on peut mener ainsi plus facilement le calcul par réitération (fig. 3).

#### CONSIDÉRATIONS PRATIQUES

Les calculs développés ne doivent pas faire perdre de vue le but de l'étude. Outre les simplifications, indispensables pour faire entrer le phénomène dans une théorie calculable, on doit styliser les faits eux-mêmes.

On a supposé l'écoulement à l'entrée de la grille bien parallèle, entièrement caractérisé par la vitesse longitudinale et l'énergie cinétique. A vitesse moyenne donnée, on peut avoir une agitation plus ou moins grande, et, par suite, des vitesses transversales qui rendront la grille moins efficace. Le débit peut ne pas être réparti uniformément, de sorte qu'on peut être amené à mener le calcul avec le débit moyen par mètre de large, multiplié par un certain coefficient. Ces facteurs perturbateurs auront d'autant plus de chance d'être importants que l'énergie cinétique sera plus grande, donc  $j$  plus petit.

Il sera en fait indiqué, chaque fois que le site s'y prêtera, de dissiper l'énergie résultant de la forte pente du torrent aussi complètement que

possible avant l'entrée des grilles. L'avantage essentiel réside dans le fait qu'on aura un meilleur écoulement; on ne risquera pas, même avec des surfaces de grilles très grandes, des pertes d'eau par rejaillissement. Parallèlement d'ailleurs, on pourra déterminer plus exactement le paramètre « énergie cinétique », d'autant plus facilement qu'il sera sensiblement nul. Il est d'ailleurs curieux de constater, sur ce point, la convergence de l'intérêt du calcul et de l'efficacité des ouvrages.

Le choix de  $j$ , quand l'énergie cinétique est grande, n'est pas des plus aisés. On pourrait, théoriquement, admettre une valeur telle que la charge résultante soit égale à la distance verticale de l'entrée des grilles au premier point où l'énergie est sensiblement nulle, donc où l'eau est tranquille. Mais on risquerait, à notre avis, de s'exposer à des mécomptes, ainsi que nous l'avons montré le comportement d'un ouvrage au projet duquel nous avons participé.

On a admis, en outre, que l'influence des traverses supportant les barreaux était négligeable, ce qui n'est vrai que dans la mesure où ces traverses sont loin du plan supérieur des barreaux.

Enfin, et c'est bien évident, on a supposé les grilles entièrement libres de cailloux. On devra augmenter la surface dans des proportions variables suivant les torrents, pour ne pas perdre d'eau au cas où les difficultés d'accès rendraient les visites rares et le nettoyage difficile. On risquera alors, si une crue se présente avec une grille propre, d'admettre des débits encore plus importants accroissant ainsi la « non-sélectivité » de ces grilles que nous avons signalée plus haut.