

LE RESSAUT

The hydraulic jump

PAR

J.O. DE MELLO FLÔRES

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DU BRÉSIL

Les problèmes posés par le ressaut (non ondulé): hauteurs conjuguées, longueur, perte de charge. — Solution classique (canal horizontal, section rectangulaire). — Cas général des canaux prismatiques de section ou de pente quelconque: expression des hauteurs conjuguées, sous forme dimensionnelle, puis adimensionnelle; longueur du ressaut et perte de charge. — Degré de validité des équations proposées; nécessité de contrôles expérimentaux.

The problems posed by the direct hydraulic jump: conjugated depths, length, energy losses. Classical solution (horizontal canal, rectangular section). General case of prismatic canals of any section or slope: expression for the conjugated depths, in dimensional form, then dimensionless: length of the jump and head loss. Range of validity of the proposed equations; need for experimental check.

1) Introduction

Le ressaut est un type connu de mouvement permanent brusquement varié dont l'importance découle, principalement, de la forte perte de charge qui s'y produit, propriété qui le rend utile en tant que moyen de dissipation d'énergie; parallèlement, les tourbillons qui accompagnent ce type d'écoulement apportent un intérêt spécial pour le mélange des réacteurs utilisés dans le traitement des eaux, alors que la différence de niveau bien caractérisée qu'on y observe, ainsi que sa corrélation précise avec d'autres éléments du mouvement, permettent de l'employer comme procédé de mesure des débits.

Un ressaut peut se présenter sous deux formes: une forme transitoire — pour des nombres de FROUDE, en amont, pouvant aller jusqu'à des valeurs de l'ordre de 2 — qui se produit avec une succession d'ondulations superficielles et dont la perte de charge locale est pratiquement négligeable (fig. 1); une autre forme stable — pour

des nombres de FROUDE supérieurs à la valeur ci-dessus — dans laquelle on distingue: une première région tourbillonnaire à mouvements cycliques qui ne font pas partie de l'écoulement général; puis une région inférieure où l'écoule-

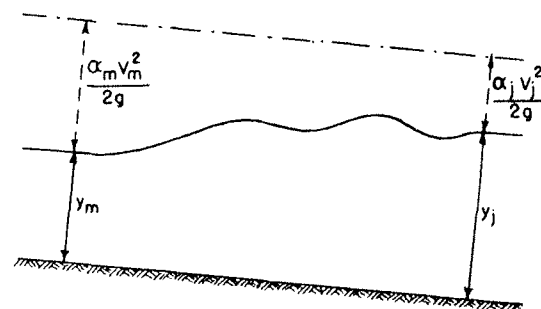


FIG. 1

ment se produit, sous forme d'une expansion progressive. La turbulence qui naît dans la région supérieure et dans la zone de discontinuité

comprise entre ces deux régions cause une forte dissipation d'énergie (fig. 2).

C'est ce dernier type qui est intéressant dans les applications pratiques citées plus haut, rai-

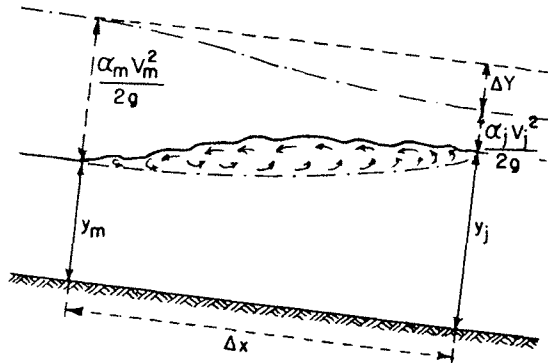


FIG. 2

son pour laquelle nous le traiterons seul dans cet article.

2) Problèmes de base des ressauts

2-1) GÉNÉRALITÉS :

Les problèmes généraux du ressaut direct sont, pour un canal prismatique, et un débit donné, de déterminer :

2-1-1) La profondeur d'eau en aval (ou en amont) qui correspond à une profondeur d'eau désirée en amont (ou en aval) : c'est ce que l'on appelle la relation entre hauteurs conjuguées.

2-1-2) La longueur du canal atteinte par l'écoulement brusquement varié; c'est ce qu'on nomme la longueur du ressaut.

2-1-3) La perte de charge qui en découle et qui mesure l'importance de ce mouvement en tant que dissipateur d'énergie.

2-2) RÉOLUTION DES PROBLÈMES DE BASE DES RESSAUTS.

Pour obtenir la relation qui lie les hauteurs conjuguées, on applique le théorème des quantités de mouvement qui donne une expression généralement symétrique de ces deux profondeurs.

Une telle solution analytique peut être rendue rationnelle au moyen de grandeurs sans dimensions, y compris les nombres de FROUDE à l'amont :

$$F_m = \sqrt{\frac{\alpha_m V_m^2}{g y_m}}$$

et à l'aval :

$$F_j = \sqrt{\frac{\alpha_j V_j^2}{g y_j}}$$

Quant à la longueur du ressaut, il n'existe actuellement aucune théorie en fonction de laquelle on puisse faire sa détermination; de sorte qu'on a exclusivement recours aux résultats expérimentaux.

Enfin, la perte de charge est déterminée par l'application du théorème de BERNOULLI généralisé entre les sections extrêmes amont et aval, ce qui est rendu possible par le fait que ces sections font partie de courants liquides (écoulement uniforme) ou de courants assimilables à ces derniers (écoulement graduellement varié);

3) Solution usuelle

3-1) GÉNÉRALITÉS.

L'application du théorème des quantités de mouvement à la masse de liquide qui compose le ressaut (hachurée dans la fig. 3), devient

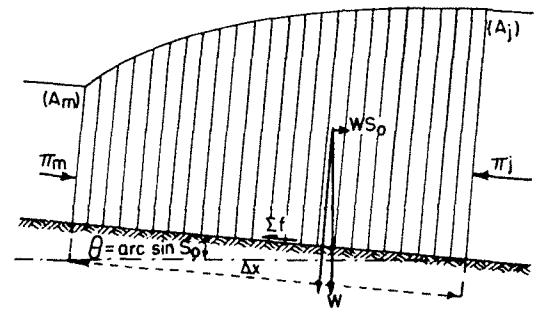


FIG. 3

simple dans le cas présent, car la variation de la quantité de mouvement par unité de temps, l'écoulement étant permanent, se réduit à une dérivation dans l'espace, autrement dit à la différence entre la quantité de mouvement de la masse qui entre et de celle qui sort :

$$\begin{aligned} \Delta Q_M &= Q_{Mm} - Q_{Mj} = \int_{A_m} dQ_M - \int_{A_j} dQ_M \\ &= \int_{A_m} \left(\frac{\bar{w}}{g} v dA \right) v - \int_{A_j} \left(\frac{\bar{w}}{g} v dA \right) v \\ &= \frac{\bar{w}}{g} \alpha (V_m^2 A_m - V_j^2 A_j) \\ &= \frac{\bar{w}}{g} \alpha Q^2 \left(\frac{1}{A_m} - \frac{1}{A_j} \right) \end{aligned}$$

où :

- $\bar{\omega}$: poids spécifique du liquide;
- g : accélération de la pesanteur;
- v : vitesse en un point quelconque;
- dA : élément d'aire;
- A_m : aire de la section transversale amont;
- A_j : aire de la section transversale aval;
- V_m : vitesse moyenne à l'amont;
- V_j : vitesse moyenne à l'aval;
- α : $\frac{\int_{(A)} v^2 dA}{VA}$ coefficient tenant compte de la distribution non uniforme des vitesses, soit dans le cas de la variation de la quantité de mouvement par unité de temps, soit dans celui de la variation de la force vive pendant un déplacement déterminé.
- Q : débit.

D'un autre côté, les composantes, dans la direction de l'écoulement, des forces en jeu, sont :

Les pressions à l'aval :

$$\Pi_j = \bar{\omega} h_j A_j$$

et à l'amont :

$$\Pi_m = \bar{\omega} h_m A_m$$

Le poids du liquide :

$$W S_0 = \bar{\omega} \mathcal{V} S_0$$

et les forces de frottement le long des parois latérales :

$$\Sigma f$$

expressions dans lesquelles :

- h_m : profondeur du centre de gravité de la section amont;
- h_j : profondeur du centre de gravité de la section aval;
- S_0 : pente de la surface libre, mesurée par le sinus;
- W : poids du liquide;
- \mathcal{V} : volume du liquide.

Dans ces conditions, et en tenant compte du fait que les forces de frottement Σf sont, en général, négligeables devant les autres, on a :

$$\frac{\alpha Q^2}{g} \left(\frac{1}{A_m} - \frac{1}{A_j} \right) = h_j A_j - h_m A_m - \mathcal{V} S_0 \tag{1}$$

3-2) EQUATION ET FONCTION DES HAUTEURS CONJUGUÉES EN CANAUX HORIZONTAUX.

Quand la pente est nulle, le dernier terme du second membre de l'équation (1) disparaît et on peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{\alpha Q^2}{g A_m} + h_m A_m = \frac{\alpha Q^2}{g A_j} + h_j A_j \tag{2}$$

Comme le binôme du premier membre est une fonction de la profondeur amont y_m , alors que le binôme du second membre est une fonction de la profondeur maximum de la section aval y_j , il s'ensuit qu'il existe une fonction de la profondeur maximum :

$$M(y) = \frac{\alpha Q^2}{g A} + h A \tag{3}$$

qui prend des valeurs identiques pour les profondeurs conjuguées amont (y_m) et aval (y_j).

De là une méthode relativement simple pour obtenir une profondeur conjuguée quand l'autre est connue : elle consiste à tracer, pour chaque débit Q et chaque forme de la section transversale (qui donnent A et h), une courbe de coord-

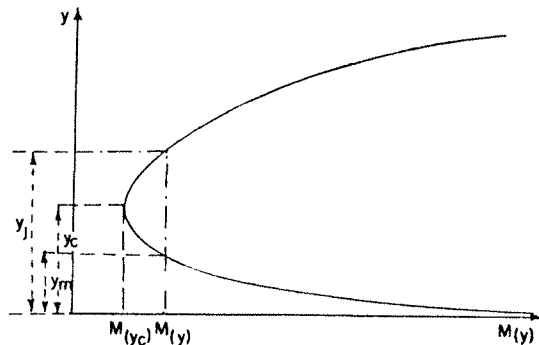


FIG. 4

onnées y et $M(y)$ (fig. 4) de manière que, l'une des profondeurs conjuguées étant donnée, la deuxième se déduit de l'autre branche de la courbe par la condition qu'elle corresponde à la même valeur de $M(y)$.

3-3) EQUATION ET FONCTION DES HAUTEURS CONJUGUÉES EN CANAUX RECTANGULAIRES A PENTE NULLE.

Dans cette hypothèse simple, on a :

$$\begin{aligned} Q &= q L \\ A &= y L \\ h &= (y/2). \end{aligned}$$

L étant la largeur et q le débit par unité de largeur.

La fonction du ressaut peut alors être ramenée à :

$$M_1(y) = \frac{M(y)}{L} = \frac{\alpha Q^2}{gy} + \frac{y^2}{2} \quad (4)$$

Toutefois, il ne sera pas nécessaire de l'employer puisque, dans le cas présent, l'équation :

$$\frac{\alpha q^2}{gy_m} + \frac{y_m^2}{2} = \frac{\alpha q^2}{gy_j} + \frac{y_j^2}{2} \quad (5)$$

nous donne une solution analytique directe :

$$\left. \begin{aligned} y_j &= \frac{y_m}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8\alpha q^2}{gy_m^3}} - 1 \right) \\ y_m &= \frac{y_j}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8\alpha q^2}{gy_j^3}} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

et comme le nombre de FROUDE s'exprime par :

$$F = \sqrt{\frac{\alpha V^2}{gy}} = \sqrt{\frac{\alpha Q^2}{gy A^2}} = \sqrt{\frac{\alpha q^2}{gy^3}}$$

il est courant de l'écrire sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_j}{y_m} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8F_m^2} - 1 \right) \\ \frac{y_m}{y_j} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8F_j^2} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Tels sont les résultats obtenus par BAKHMETEFF qui, au lieu du nombre de FROUDE, a utilisé son carré en l'appelant « facteur cinétique de l'écoulement ».

3-4) LONGUEUR DU RESSAUT.

Les études empiriques des éléments longitudinaux du ressaut, spécialement les travaux de MOORE et ceux de BAKHMETEFF ET MATZKE, ont montré que le profil de ce type d'écoulement, lorsqu'il est représenté sans dimensions avec pour coordonnées $(y - y_m)/(y_j - y_m)$ et $(x)/(y_j - y_m)$, varie peu et peut être considéré comme à peu près constant.

En particulier, lorsque la longueur du ressaut Δx est comptée par rapport à la différence $(y_j - y_m)$, elle ne varie que d'une façon peu accentuée, ce qui permet d'écrire :

$$\Delta x = b (y_j - y_m) \quad (8)$$

b étant une constante qui, dans l'hypothèse du canal rectangulaire à pente nulle, peut être prise égale à 6,5. Quelques auteurs, tels SMETANA, réduisent cette valeur à 6.

3-5) PERTE DE CHARGE.

Comme on peut le voir sur la figure 5, le théorème de BERNOULLI généralisé, appliqué à l'intérieur de l'espace compris entre les sections amont et aval du ressaut, en prenant comme plan de

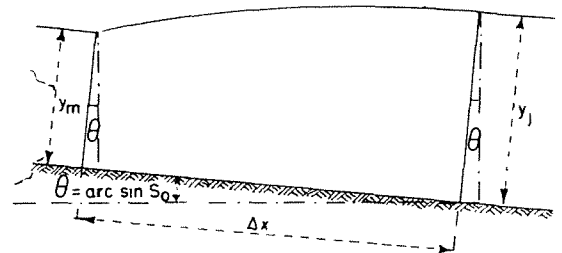


FIG. 5

référence le plan horizontal du fond de la section aval, conduit à l'expression suivante pour la perte de charge ΔH :

$$\Delta H = \left\{ \left[\frac{y_m}{\cos \theta} + (\Delta x - y_m \operatorname{tg} \theta) \sin \theta \right] + \frac{\alpha V_m^2}{2g} \right\} - \left\{ \left[\frac{y_j}{\cos \theta} - (y_j \operatorname{tg} \theta) \sin \theta \right] + \frac{\alpha V_j^2}{2g} \right\}$$

avec les notations du paragraphe 3-1.

En simplifiant et substituant, on arrive à :

$$\Delta H = \frac{\alpha Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_m^2} - \frac{1}{A_j^2} \right) + \Delta x S_0 - (y_j - y_m) \sqrt{1 - S_0^2} \quad (9)$$

Dans l'hypothèse particulière de canaux à pente nulle, la formule ci-dessus se réduit à :

$$\Delta H = \frac{\alpha Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_m^2} - \frac{1}{A_j^2} \right) - (y_j - y_m) \quad (10)$$

Enfin, pour des canaux rectangulaires à pente nulle, on a encore :

$$\Delta H = (y_j - y_m) \left[\frac{\alpha q^2}{2g} \cdot \frac{(y_j + y_m)}{y_j^2 y_m^2} - 1 \right]$$

et comme :

$$\frac{\alpha q^2}{g} = \frac{y_j y_m (y_j + y_m)}{2}$$

on déduit que :

$$\Delta H = \frac{(y_j - y_m)^3}{4 y_j y_m} \quad (11)$$

4) Solution proposée

4-1) GÉNÉRALITÉS :

En vue d'une étude sur les ressauts dans des conduites prismatiques à section transversale et pente quelconques, parallèlement à une étude principale sur le mouvement permanent progressivement varié, j'ai présenté, sur ce sujet, en septembre 1948, à la « Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil », un rapport (*) dont les résultats, bien que déduits d'une manière légèrement différente de celle de l'exposé développé ici, sont ceux du paragraphe 4-2.

Plus tard, au début de 1950, dans un article (**) publié dans la revue *Aguas e Energia Elétrica*, j'ai perfectionné cette première étude en la traitant adimensionnellement, ce qui simplifie beaucoup l'application de la méthode suivie : le paragraphe 4-3 en constitue le résumé.

Bien que de tels résultats représentent un progrès sur ceux qui existaient jusqu'alors, ils présentent encore des lacunes. J'ai cherché à combler certaines d'entre elles dans le paragraphe 4-4.

Auparavant, toutefois, je me dois d'exposer quelques considérations préliminaires sur lesquelles je me suis appuyé dans mes travaux sur les écoulements en canaux découverts.

La première concerne la généralisation de la forme analytique de l'aire de la section transversale A, en fonction de la profondeur maximum y; cette fonction est donnée d'une manière simplifiée par :

$$A = A_1 y^a \tag{12}$$

ce qui, puisque nous avons :

$$\frac{dA}{dy} = L = a A_1 y^{a-1} = \frac{a A}{y}$$

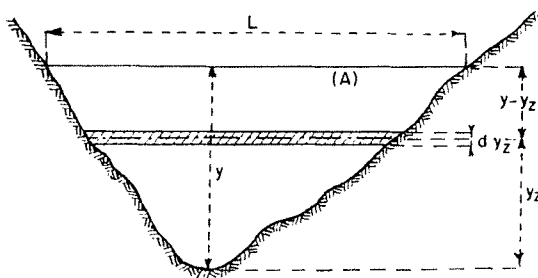


FIG. 6

(*) « Mouvement permanent progressivement varié en conduites libres. » Rio de Janeiro, Escola Nacional de Engenharia, 1948, pp. 51-57 (Thèse pour le concours de professeur libre de la Chaire d'Hydraulique théorique et appliquée).

(**) « Le ressaut et ses applications aux usines hydroélectriques » (dans *Aguas e Energia Elétrica*, Rio de Janeiro, Conselho Nacional de Aguas e Energia Elétrica, 1950, janvier, n° 3, pp. 16-26, et avril, n° 4, pp. 13-19).

(L étant la largeur) nous donne :

$$a = \frac{L y}{A}$$

La deuxième de ces considérations concerne le coefficient α :

$$\alpha = \frac{\int_{(A)} v^2 dA}{V^2 A}$$

qui tient compte de l'effet de l'inégale distribution des vitesses. Bien que l'on admette normalement que ce coefficient reste constant, malgré la variation de niveau de l'eau, il a, en réalité, tendance à décroître lorsque la profondeur augmente; en effet, si y croît, la vitesse moyenne V croît également ainsi que, en général, le rayon hydraulique R, ce qui augmente le nombre de REYNOLDS et, partant, la turbulence, rendant la distribution des vitesses plus uniforme et réduisant α . On a ainsi, en première approximation :

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{y^\kappa} \tag{13}$$

La troisième considération concerne l'expression de la profondeur critique, que l'on peut obtenir à partir de l'énergie spécifique :

$$E = y + \frac{\alpha V^2}{2g} = y + \frac{\alpha Q^2}{2g A^2} = y + \frac{\alpha_1 Q^2}{2g A_1^2 y^{2a+\kappa}}$$

dont le minimum correspond à :

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 1 - \frac{\alpha_1 Q^2}{2g A_1^2} \cdot \frac{2a + \kappa}{y_c^{2a+\kappa+1}} = 0 \tag{*}$$

ou, en posant :

$$\epsilon = 2a + \kappa + 1$$

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{(\epsilon - 1) \alpha_1 Q^2}{2g A_1^2}} \tag{14}$$

Dans le cas d'une section rectangulaire, et si l'on introduit le débit par unité de largeur $q = Q/L$, on a :

$$y_c = \sqrt[3+\kappa]{\frac{(2 + \kappa) \alpha_1 q^2}{2g}} \tag{15}$$

Enfin, si l'on néglige l'effet dû à la variation de la distribution des vitesses ($\kappa = 0$, $\alpha_1 = \alpha$), on obtient la formule connue :

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}} \tag{16}$$

(*) Les deux notations α et κ sont rigoureusement équivalentes; si elles apparaissent différentes, c'est seulement pour des raisons typographiques.

4-2) EQUATION ET FONCTION DIMENSIONNELLES DES HAUTEURS CONJUGUÉES.

Dans la déduction initiale, j'ai appliqué le théorème des quantités de mouvement à la masse liquide qui fait réellement partie de l'écoulement général.

Les forces agissent comme le montre la figure 7, mais apparaissent, en plus de celles qui interviennent dans le raisonnement habituel, les

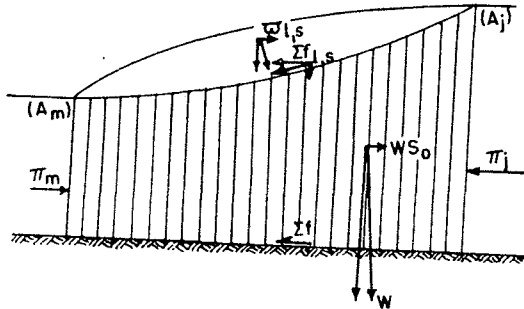


FIG. 7

composantes, selon la direction du mouvement, des résultantes des pressions normales et des tensions tangentielles qui agissent à la surface limitant la zone supérieure tourbillonnaire.

L'équation du théorème des quantités de mouvement devient alors :

$$\Delta Q_M = \Pi_j - \Pi_m - \pi_{1,s} + \Sigma f + \Sigma f_{1,s} - G$$

ou :

$$\Delta Q_M = (\Pi_j - \Pi_m) + (\Sigma f + \Sigma f_{1,s} - \pi_{1,s}) - G$$

Si l'on observe que la parenthèse

$$(\Sigma f + \Sigma f_{1,s} - \pi_{1,s})$$

représente une différence de valeur négligeable, et que :

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^y \bar{\omega} (y - y_z) dA = \bar{\omega} \int_0^y (y - y_z) a A_1 y_z^{a-1} dy \\ &= \frac{\bar{\omega} A_1}{a+1} y^{a+1} \end{aligned}$$

avec $G = W S_0$, on aura, avec les notations adoptées précédemment :

$$\Delta Q_M = \frac{\bar{\omega} A_1}{a+1} (y_j^{a+1} - y_m^{a+1}) - W S_0 \quad (17)$$

Mais comme il s'agit d'un écoulement permanent, la variation de la quantité de mouvement par unité de temps se réduit à la dérivée « spatiale », égale, numériquement, à la différence

entre la quantité de mouvement de la masse qui entre et de la masse qui sort par unité de temps, c'est-à-dire :

$$\Delta Q_M = Q_{M,m} - Q_{M,j} - \Delta Q_{M,1}$$

car nous avons, ici encore, la masse qui s'éloigne pour participer au tourbillonnement cyclique supérieur, ainsi que celle qui en revient. Ces deux masses, par raison de continuité, sont identiques, mais elles possèdent des quantités de mouvement différentes à cause des pertes passives.

Dans mes travaux précédents, j'ai laissé de côté le dernier terme, ce qui a réduit l'équation à :

$$\Delta Q_M = Q_{M,m} - Q_{M,j}$$

Comme :

$$\begin{aligned} Q_M &= \int_A dQ_M = \int_A \left(\frac{\bar{\omega}}{g} v dA \right) v = \frac{\bar{\omega}}{g} \alpha V^2 A \\ &= \frac{\bar{\omega}}{g} \alpha \frac{Q^2}{A} = \frac{\bar{\omega}}{g} \alpha \frac{Q^2}{A_1 y^a} \end{aligned}$$

on a, en tenant compte de (13) :

$$\begin{aligned} \Delta Q_M &= \frac{\bar{\omega}}{g} \frac{Q^2}{A_1} \left(\frac{\alpha_m}{y_m^a} - \frac{\alpha_j}{y_j^a} \right) \\ &= \frac{\bar{\omega} \alpha_1 Q^2}{g A_1} \left(\frac{1}{y_m^{a+\kappa}} - \frac{1}{y_j^{a+\kappa}} \right) \quad (18) \end{aligned}$$

Là, surgissait un des points difficiles du problème : comment déterminer la composante longitudinale du poids, soit, en dernière analyse, le volume de la masse liquide correspondante, si on ne connaît pas la forme de la courbe donnant la trace de la surface supérieure sur le plan vertical de la profondeur maximum?

La réponse logique est qu'il vaut mieux établir cette courbe avec quelque erreur, ce qui entraîne simplement l'omission d'un terme relatif à la composante longitudinale du poids de liquide compris entre la surface vraie et celle qui découle de la courbe imposée, plutôt que de laisser totalement de côté l'action de la pesanteur, ce qui revient à négliger un terme beaucoup plus grand : la composante longitudinale du poids de la masse totale du liquide en cause.

Il reste alors à établir la forme de courbe choisie par un critère logique en tenant compte des exigences du problème.

Pour cela, il suffit de noter que l'on doit avoir une courbe continue, de concavité tournée vers le haut, et que si l'on désire continuer à appliquer la méthode des profondeurs conjuguées, l'ordonnée de la courbe devra avoir une ex-

pression symétrique par rapport aux profondeurs conjuguées amont et aval, soit :

$$y = y_m^{1 - (x/\Delta x)} \quad y_j^{(x/\Delta x)} = y_m \left(\frac{y_j}{y_m} \right)^{x/\Delta x} \quad (19)$$

où, en plus des notations précédentes, x et y sont les coordonnées de la courbe rapportées au fond du canal et au tracé de la section amont, et où Δx est la longueur du ressaut, ainsi qu'on peut le voir sur la figure 8.

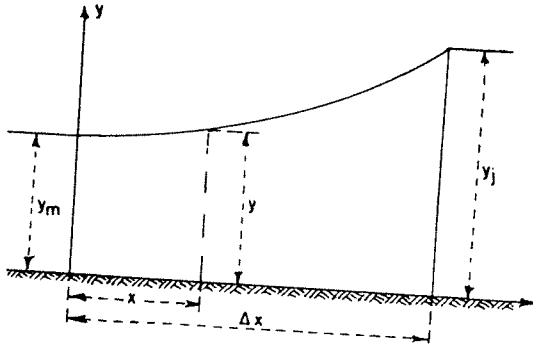


FIG. 8

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_0^{\Delta x} A \, dx = \int_0^{\Delta x} A_1 y^a \, dx \\ &= A_1 \int_0^{\Delta x} y_m^a \left(\frac{y_j}{y_m} \right)^{ax/\Delta x} \, dx \\ &= \frac{A_1 y_m^a \Delta x}{a} \left| \left(\frac{y_j}{y_m} \right)^{ax/\Delta x} \frac{1}{\text{Log} (y_j/y_m)} \right|_0^{\Delta x} \\ &= \frac{A_1 \Delta x}{a \text{Log} (y_j/y_m)} (y_j^a - y_m^a) = \frac{A_j - A_m}{a} \frac{\Delta x}{\text{Log} (y_j/y_m)} \end{aligned} \quad (20)$$

Pour un canal de section transversale et de pente données, et dans un domaine restreint de variation du nombre de FROUDE, on peut admettre une proportionnalité approchée entre la longueur du ressaut et le logarithme du rapport des hauteurs conjuguées :

$$\Delta x = K \text{Log} \frac{y_j}{y_m} \quad (21)$$

où K est le paramètre linéaire du ressaut.

En rappelant que :

$$W = \bar{\omega} \varphi \quad (22)$$

on déduit de (17), (18), (20), et (21), une expres-

sion qui traduit le théorème des quantités de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\omega}}{g} \frac{\alpha_1 Q^2}{A_1} \left(\frac{1}{y_m^{a+\kappa}} - \frac{1}{y_j^{a+\kappa}} \right) &= \frac{\bar{\omega} A_1}{a+1} (y_j^{a+1} - y_m^{a+1}) \\ &\quad - \frac{\bar{\omega} A_1}{a} K S_0 (y_j^a - y_m^a) \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1 Q^2}{g A_1} \frac{1}{y_m^{a+\kappa}} + \frac{A_1}{a+1} y_m^{a+1} - \frac{A_1}{a} K S_0 y_m^a \\ = \frac{\alpha_1 Q^2}{g A_1} \frac{1}{y_j^{a+\kappa}} + \frac{A_1}{a+1} y_j^{a+1} - \frac{A_1}{a} K S_0 y_j^a \end{aligned} \quad (23)$$

Ainsi, la fonction du ressaut qui prend des valeurs égales pour $y = y_m$ et $y = y_j$ sera :

$$M(y) = \frac{\alpha_1 Q^2}{g A_1} \frac{1}{y^{a+\kappa}} + \frac{A_1}{a+1} y^{a+1} - \frac{A_1}{a} K S_0 y^a \quad (24)$$

ou encore :

$$M(y) = \frac{\alpha Q^2}{g A} + \frac{A y}{a+1} - \frac{K S_0 A}{a} \quad (25)$$

Cette solution rend obligatoire, pour chaque forme de section transversale (A_1, a), la construction d'une double infinité de courbes, soit une famille de courbes paramétriques (paramètre S_0) pour chaque débit Q ; et une autre famille de courbes paramétriques (paramètre Q) pour chaque pente S_0 .

Dans le cas particulier d'une section rectangulaire, comme $Q = q L$, $A = y L$, on aura :

$$M(y) = L \left(\frac{\alpha q^2}{g y} + \frac{y^2}{2} - K S_0 y \right)$$

ce qui, la largeur étant constante, nous permet d'utiliser plus simplement la fonction :

$$M_1(y) = \frac{M(y)}{L} = \frac{\alpha q^2}{g y} + \frac{y^2}{2} - K S_0 y \quad (26)$$

de sorte que :

$$\frac{\alpha q^2}{g y_m} + \frac{y_m^2}{2} - K S_0 y_m = \frac{\alpha q^2}{g y_j} + \frac{y_j^2}{2} - K S_0 y_j$$

donnant la solution analytique directe :

$$\begin{aligned} y_j &= \sqrt{\left(\frac{y_m}{2} - K S_0 \right)^2 + \frac{2 \alpha q^2}{g y_m}} - \left(\frac{y_m}{2} - K S_0 \right) \\ y_m &= \sqrt{\left(\frac{y_j}{2} - K S_0 \right)^2 + \frac{2 \alpha q^2}{g y_j}} - \left(\frac{y_j}{2} - K S_0 \right) \end{aligned} \quad (27)$$

ou encore :

$$\frac{y_j}{y_m} = \left(\frac{1}{2} - \frac{K}{y_m} \cdot S_0 \right) \left[\sqrt{1 + \frac{2 F_m^2}{(1/2) - (K/y_m) \cdot S_0^2} - 1} \right] \quad (28)$$

$$\frac{y_m}{y_j} = \left(\frac{1}{2} - \frac{K}{y_j} \cdot S_0 \right) \left[\sqrt{1 + \frac{2 F_j^2}{(1/2) - (K/y_j) \cdot S_0^2} - 1} \right]$$

4-3) EQUATION ET FONCTION ADIMENSIONNELLES DES HAUTEURS CONJUGUÉES.

En introduisant l'expression (14) qui donne la profondeur critique :

$$\frac{z_1 Q^2}{g A_1} = \frac{2 A_1 y_c^\varepsilon}{\varepsilon - 1}$$

et en notant que :

$$\varepsilon = 2a + x + 1$$

on a successivement :

$$\frac{2 A_1 y_c^\varepsilon}{(\varepsilon - 1) y_m^{a+\kappa}} + \frac{A_1}{a+1} y_m^{a+1} - \frac{A_1}{a} K S_0 y_m^a$$

$$= \frac{2 A_1 y_c^\varepsilon}{(\varepsilon - 1) y_j^{a+\kappa}} + \frac{A_1}{a+1} y_j^{a+1} - \frac{A_1}{a} K S_0 y_j^a$$

$$\frac{2}{2a+x} \left(\frac{y_c}{y_m} \right)^{a+\kappa} + \frac{1}{a+1} \left(\frac{y_m}{y_c} \right)^{a+1} - \frac{S_0}{a} \frac{K}{y_c} \left(\frac{y_m}{y_c} \right)^a$$

$$= \frac{2}{2a+x} \left(\frac{y_c}{y_j} \right)^{a+\kappa} + \frac{1}{a+1} \left(\frac{y_j}{y_c} \right)^{a+1} - \frac{S_0}{a} \frac{K}{y_c} \left(\frac{y_j}{y_c} \right)^a$$

En introduisant les hauteurs conjuguées relatives :

$$\eta_m = \frac{y_m}{y_c} \quad \eta_j = \frac{y_j}{y_c}$$

et le paramètre adimensionnel du ressaut $k = (K/y_c)$, on a finalement :

$$\frac{2}{2a+x} \frac{1}{\eta_m^{a+\kappa}} + \frac{1}{a+1} \cdot \eta_m^{a+1} - \frac{k S_0}{a} \cdot \eta_m^a$$

$$= \frac{2}{2a+x} \cdot \frac{1}{\eta_j^{a+\kappa}} + \frac{1}{a+1} \cdot \eta_j^{a+1} - \frac{k S_0}{a} \cdot \eta_j^a \quad (29)$$

ce qui conduit à la fonction adimensionnelle du ressaut :

$$N(\eta) = \frac{M(y)}{A_1 y_c^{a+1}} = \frac{2}{2a+x} \cdot \frac{1}{\eta^{a+\kappa}} + \frac{1}{a+1} \cdot \eta^{a+1} - \frac{k S_0}{a} \cdot \eta^a \quad (30)$$

La solution devient maintenant bien plus simple que dans le cas des équations dimensionnelles. En effet, au lieu de la double infinité de courbes, il suffit de construire une famille de courbes paramétriques, de paramètre S_0 ou mieux $k S_0$, donnant un graphique semblable à celui de la figure 9.

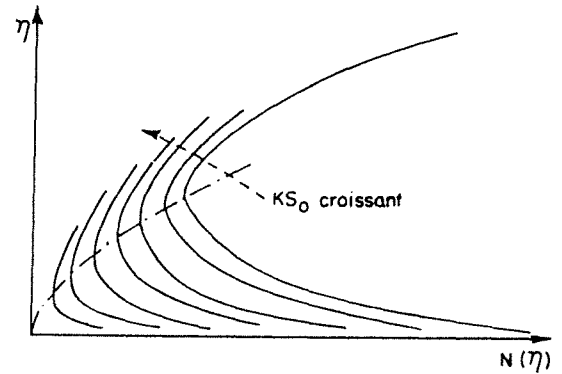


Fig. 9

Comme il s'agit d'une section rectangulaire ($a=1$), et en négligeant la distribution inégale des vitesses ($x=0$), on a :

$$N(\eta) = \frac{1}{\eta} + \frac{\eta^2}{2} - (k S_0) \eta \quad (31)$$

et :

$$\frac{1}{\eta_m} + \frac{\eta_m^2}{2} - (k S_0) \eta_m = \frac{1}{\eta_j} + \frac{\eta_j^2}{2} - (k S_0) \eta_j \quad (32)$$

ce qui donne une solution analytique directe, avec :

$$\eta_j = \sqrt{\frac{\eta_m}{2} - K S_0^2} + \frac{2}{\eta_m} - \left(\frac{\eta_m}{2} - k S_0 \right)$$

$$\eta_m = \sqrt{\frac{\eta_j}{2} - K S_0^2} + \frac{2}{\eta_j} - \left(\frac{\eta_j}{2} - k S_0 \right) \quad (33)$$

et comme :

$$F = \sqrt{\frac{\alpha q^2}{g y^3}} = \sqrt{\left(\frac{y_c}{y} \right)^3} = \frac{1}{\eta^{3/2}}$$

On peut encore écrire :

$$\frac{y_j}{y_m} = \frac{r_j}{r_m} = \left(\frac{F_m}{F_j} \right)^{2/3} = (0,5 - k S_0 F_m^{2/3}) \left[\sqrt{1 + \frac{2 F_m^2}{(0,5 - k S_0 F_m^{2/3})^2}} - 1 \right] \quad (34)$$

$$\frac{y_m}{y_j} = \frac{r_m}{r_j} = \left(\frac{F_j}{F_m} \right)^{2/3} = (0,5 - k S_0 F_j^{2/3}) \left[\sqrt{1 + \frac{2 F_j^2}{(0,5 - k S_0 F_j^{2/3})^2}} - 1 \right]$$

4-4) RÉVISION DES ÉQUATIONS ET DES FONCTIONS DU RESSAUT.

Les résultats auxquels on est arrivé aux paragraphes 4-2 et 4-3, bien que plus précis que ceux obtenus en négligeant intégralement la composante longitudinale de la pesanteur, comportent encore, comme nous l'avons dit déjà au paragraphe 4-1, quelques erreurs qui peuvent être en partie réduites.

La principale erreur est faite en négligeant la variation de la quantité de mouvement qui correspond à la masse liquide qui sort et entre dans le volume considéré et qui fait partie de la zone tourbillonnaire supérieure. La meilleure manière de l'atténuer est encore de revenir à la solution habituelle, c'est-à-dire d'appliquer le théorème des quantités de mouvement à toute la masse liquide comprise entre les sections extrêmes amont et aval du ressaut (fig. 3), en imposant une forme symétrique à la courbe qui représente la trace de la surface supérieure extrême du ressaut dans le plan vertical de la profondeur maximum. On peut ainsi appliquer la méthode des hauteurs conjuguées, et l'erreur commise en négligeant la composante longitudinale du poids du volume compris entre la surface réelle et la surface imposée sera, évidemment, beaucoup plus faible que celle que l'on commet en renonçant à tenir compte de l'action de la pesanteur.

On aura alors :

$$\frac{z_1 Q^2}{g A_1} \left(\frac{1}{y_m^{a+\kappa}} - \frac{1}{y_j^{a+\kappa}} \right) = \frac{A_1}{a+1} (y_j^{a+1} - y_m^{a+1}) - \mathcal{V} S_0 \quad (35)$$

avec :

$$\mathcal{V} = \int_0^x A dx = A_1 \int_0^x y^a dx$$

et :

$$y = (y_m + y_j) - y_m^{x/\Delta x} y_j^{1-(x/\Delta x)} \quad (36)$$

Dans le cas général, cette intégration conduit à des équations compliquées, mais il est possible d'arriver à un résultat plus simple au moyen d'un choix plus heureux de la relation symétrique qui lie y à y_m et y_j ;

Toutefois, dans le cas beaucoup plus fréquent d'une section transversale rectangulaire, l'expression adoptée est assez satisfaisante. Comme dans ce cas, $A_1 = L$ et $a = 1$, on aura :

$$\frac{z_1 Q^2}{g L} \left(\frac{1}{y_m^{1+\kappa}} - \frac{1}{y_j^{1+\kappa}} \right) = \frac{L}{2} (y_j^2 - y_m^2) - \mathcal{V} S_0$$

avec :

$$\mathcal{V} = L \int_0^{\Delta x} y dx = L \int_0^{\Delta x} [(y_m + y_j) - y_m^{x/\Delta x} y_j^{1-(x/\Delta x)}] dx = \quad (37)$$

$$= L (y_m + y_j) \int_0^{\Delta x} dx - L y_j \int_0^{\Delta x} \left(\frac{y_m}{y_j} \right)^{x/\Delta x} dx =$$

$$= L (y_m + y_j) \Delta x - L y_j \frac{\Delta x}{\text{Log}(y_m/y_j)} \left[\left(\frac{y_m}{y_j} \right)^{x/\Delta x} - 1 \right]$$

$$= L (y_m + y_j) \Delta x - L \frac{\Delta x}{\text{Log}(y_j/y_m)} (y_j - y_m) \quad (38)$$

En faisant comme précédemment :

$$\Delta x = K \text{Log} \frac{y_j}{y_m} = k y_c \text{Log} \frac{y_j}{y_m}$$

et en admettant, comme le font de nombreux auteurs et comme cela a été justifié au paragraphe 3-4 :

$$\Delta x = b (y_j - y_m)$$

on tire :

$$\mathfrak{Q} = b L (y_j^2 - y_m^2) - K L (y_j - y_m)$$

d'où :

$$\frac{\alpha_1 Q^2}{g L} \frac{1}{y_m^{1+\kappa}} + \frac{L}{2} y_m^2 - b L S_0 y_m^2 + K L S_0 y_m = \frac{\alpha_1 Q^2}{g L} \frac{1}{y_j^{1+\kappa}} + \frac{L}{2} y_j^2 - b L S_0 y_j^2 + K L S_0 y_j$$

et :

$$M(y) = \frac{\alpha_1 Q^2}{g L} \frac{1}{y^{1+\kappa}} + L \left(\frac{1}{2} - b S_0 \right) y^2 + K L S_0 y$$

On peut également écrire plus simplement :

$$\frac{\alpha_1 q^2}{g} \cdot \frac{1}{y_m^{1+\kappa}} + \left(\frac{1}{2} - b S_0 \right) y_m^2 + K S_0 y_m = \frac{\alpha_1 q^2}{g} \cdot \frac{1}{y_j^{1+\kappa}} + \left(\frac{1}{2} - b S_0 \right) y_j^2 + K S_0 y_j \quad (39)$$

avec :

$$M_1(y) = \frac{M(y)}{L} = \frac{\alpha_1 q^2}{g} \frac{1}{y^{1+\kappa}} + \left(\frac{1}{2} - b S_0 \right) y^2 + K S_0 y \quad (40)$$

En introduisant la profondeur critique y_c , les hauteurs conjuguées relatives τ_m et τ_j et le paramètre sans dimensions k , on arrive à l'équation sans dimensions :

$$\frac{2}{2+z} \cdot \frac{1}{\tau_m^{1+\kappa}} + \left(\frac{1}{2} - b S_0 \right) \tau_m^2 + k S_0 \tau_m = \frac{2}{2+z} \cdot \frac{1}{\tau_j^{1+\kappa}} + \left(\frac{1}{2} - b S_0 \right) \tau_j^2 + k S_0 \tau_j \quad (41)$$

qui entraîne :

$$N(\tau) = \frac{M(y)}{L y_c^2} = \frac{2}{2+z} \cdot \frac{1}{\tau^{1+\kappa}} + \left(\frac{1}{2} - b S_0 \right) \tau^2 + k S_0 \quad (42)$$

En négligeant l'effet de l'inégale distribution des vitesses, on arrive à la solution analytique directe :

$$\begin{aligned} y_j &= \sqrt{\left(\frac{K S_0}{1 - 2 b S_0} + \frac{y_m}{2} \right)^2 + \frac{2 \alpha q^2}{(1 - 2 b S_0) g y_m}} - \left(\frac{K S_0}{1 - 2 b S_0} + \frac{y_m}{2} \right) \\ y_m &= \sqrt{\left(\frac{K S_0}{1 - 2 b S_0} + \frac{y_j}{2} \right)^2 + \frac{2 \alpha q^2}{(1 - 2 b S_0) g y_j}} - \left(\frac{K S_0}{1 - 2 b S_0} + \frac{y_j}{2} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{y_j}{y_m} &= \frac{0,5 - [b - (K/y_m)] S_0}{1 - 2 b S_0} \left| \sqrt{1 + \frac{2 F_m^2 (1 - 2 b S_0)}{0,5 - [b - (K/y_m)] S_0^2}} - 1 \right| \\ \frac{y_j}{y_m} &= \frac{0,5 - [b - (K/y_j)] S_0^2}{1 - 2 b S_0} \left| \sqrt{1 + \frac{2 F_j^2 (1 - 2 b S_0)}{0,5 - [b - (K/y_j)] S_0}} - 1 \right| \end{aligned} \quad (44)$$

ou, sous forme adimensionnelle :

$$\begin{aligned} \frac{y_j}{y_m} = \frac{\tau_j}{\tau_m} &= \left(\frac{F_m}{F_j} \right)^{2/3} = \frac{0,5 - (b - k F_m^{2/3}) S_0}{1 - 2 b S_0} \left[\sqrt{1 + \frac{2 F_m^2 (1 - 2 b S_0)}{0,5 - (b - k F_m^{2/3}) S_0^2}} - 1 \right] \\ \frac{y_m}{y_j} = \frac{\tau_m}{\tau_j} &= \left(\frac{F_j}{F_m} \right)^{2/3} = \frac{0,5 - (b - k F_j^{2/3}) S_0}{1 - 2 b S_0} \left[\sqrt{1 + \frac{2 F_j^2 (1 - 2 b S_0)}{0,5 - (b - k F_j^{2/3}) S_0^2}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (45)$$

Telles sont les expressions qui permettent de calculer les hauteurs conjuguées dans des canaux rectangulaires de pente quelconque.

4-5) LONGUEUR DU RESSAUT.

Comme cela a été dit, en anticipant, au paragraphe 4-2, la longueur du ressaut peut, à l'intérieur de limites rapprochées, être donnée d'une manière approximative par :

$$\Delta x = K \text{Log} (y_j/y_m) = 2,303 K \log (y_j/y_m)$$

K étant le paramètre linéaire du ressaut.

Dans des canaux rectangulaires à pente nulle, pour lesquels les nombres de FROUDE à l'amont (F_m) ne dépassent pas des valeurs de l'ordre de 3,5, ce paramètre peut être pris sensiblement égal à 1 m. Pour des nombres de FROUDE plus grands, il tend à décroître. D'un autre côté, il paraît probable que la valeur de K dépend de la forme de la section transversale et de la pente.

Par suite, l'expression précédente, pour servir au calcul de la longueur du ressaut, doit être ainsi complétée :

$$\Delta x = K \text{Log} (y_j/y_m) \varphi (F_m, S_0) \quad (46)$$

$$\psi (F_m, S_0) = \frac{\text{Log} \left[\frac{0,5 - (b - k F_m^{2/3}) S_0}{1 - 2 b S_0} \right] + \text{Log} \left[\sqrt{1 + \frac{2 F_m^2 (1 - 2 b S_0)}{[0,5 - (b - k F_m^{2/3}) S_0]^2}} - 1 \right]}{\text{Log} [0,5 (\sqrt{1 + 8 F_m^2} - 1)]} \quad (48)$$

4-6) PERTE DE CHARGE.

Pour calculer la perte de charge, on revient à l'équation (9) qui peut, en tenant compte de la variation de la distribution des vitesses suivant le degré de turbulence à l'amont et à l'aval, être écrite ainsi :

$$\Delta H = \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{\alpha_m}{A_m^2} - \frac{\alpha_j}{A_j^2} \right) + \Delta x \cdot S_0 - (y_j - y_m) \sqrt{1 - S_0^2}$$

En considérant maintenant les expressions (12), (13), et (21), on a :

$$\Delta H = \frac{\alpha_1 Q^2}{2g A_1^2} \left(\frac{1}{y_m^{2a+\kappa}} - \frac{1}{y_j^{2a+\kappa}} \right) + K S_0 \text{Log} \left(\frac{y_j}{y_m} \right) - (y_j - y_m) \sqrt{1 - S_0^2} \quad (49)$$

et comme on déduit de (22) :

$$\frac{\alpha_1 Q^2}{g A_1} = \frac{A_1 \{ [1/(a+1)] (y_j^{a+1} - y_m^{a+1}) - (K S_0/a) (y_j^a - y_m^a) \}}{(1/y_j^{a+\kappa}) - (1/y_m^{a+\kappa})}$$

on peut conclure que :

$$\Delta H = \frac{[1/(a+1)] (y_j^{a+1} - y_m^{a+1}) - (K S_0/a) (y_j^a + y_m^a)}{2 y_j^a y_m^a} \cdot \frac{y_j^{2a+\kappa} - y_m^{2a+\kappa}}{y_j^{a+\kappa} - y_m^{a+\kappa}} + K S_0 \text{Log} \frac{y_j}{y_m} - (y_j - y_m) \sqrt{1 - S_0^2} \quad (50)$$

Dans le cas d'un canal horizontal, on a plus simplement :

$$\Delta H = \frac{(y_j^{a+1} - y_m^{a+1}) (y_j^{2a+\kappa} - y_m^{2a+\kappa})}{2(a+1) y_j^a y_m^a (y_j^{a+\kappa} - y_m^{a+\kappa})} - (y_j - y_m) \quad (51)$$

D'autre part, la formule :

$$\frac{\Delta x}{y_c} = k \text{Log} (\tau_j/\tau_m) = 2,303 \log (\tau_j/\tau_m)$$

présente quelques difficultés d'emploi, car le paramètre adimensionnel ne reste pas constant, ce qui amène à écrire :

$$\frac{\Delta x}{y_c} = k [\text{Log} (\tau_j/\tau_m)]^\xi \quad (47)$$

Il est donc encore préférable d'employer l'expression usuelle :

$$\Delta x = b (y_j - y_m)$$

vérifiée dans le cas d'un fond horizontal, et d'introduire un facteur qui tienne compte de la pente et qui, en première approximation et pour une section transversale rectangulaire, peut être donné par :

Les formules (48) et (49) découlent des études préliminaires encore incomplètes auxquelles je me suis livré; après révision et dans l'hypothèse d'un canal rectangulaire, on a :

$$\Delta H = \frac{\alpha_1 q^2}{2g} \left(\frac{1}{y_m^{2+\kappa}} - \frac{1}{y_j^{2+\kappa}} \right) + K S_0 \text{Log} \left(\frac{y_j}{y_m} \right) - (y_j - y_m) \sqrt{1 - S_0^2} \quad (52)$$

et comme on a, d'après (39) :

$$\frac{\alpha_1 q^2}{g} = \frac{(0,5 - b S_0) (y_j^2 - y_m^2) + K S_0 (y_j - y_m)}{\frac{1}{y_m^{1+\kappa}} - \frac{1}{y_j^{1+\kappa}}}$$

il s'ensuit que :

$$\Delta H = \frac{(0,5 - b S_0) (y_j^2 - y_m^2) + K S_0 (y_j - y_m)}{2 y_j y_m} \times \frac{y_j^{2+\kappa} - y_m^{2+\kappa}}{y_j^{1+\kappa} - y_m^{1+\kappa}} + K S_0 \text{Log} \frac{y_j}{y_m} - (y_j - y_m) \sqrt{1 - S_0^2} \quad (53)$$

ou encore, en négligeant l'effet dû à une non-uniformité dans la distribution des vitesses :

$$\Delta H = \frac{(0,5 - b S_0) (y_j + y_m) + K S_0}{2 y_j y_m} \times (y_j^2 - y_m^2) + K S_0 \text{Log} \left(\frac{y_j}{y_m} \right) - (y_j - y_m) \sqrt{1 - S_0^2} \quad (54)$$

Toutes ces relations peuvent être transformées en expressions adimensionnelles en y introduisant la profondeur critique.

En particulier (52) se transforme en :

$$\frac{\Delta H}{y_c} = \frac{(0,5 - b S_0) (\tau_j + \tau_m) + K S_0}{2 \tau_j \tau_m} \cdot (\tau_j^2 - \tau_m^2) + K S_0 \text{Log} \left(\frac{\tau_j}{\tau_m} \right) - (\tau_j - \tau_m) \sqrt{1 - S_0^2} \quad (55)$$

Etant donnée la relation entre la profondeur relative et le nombre de FROUDE :

$$\tau = \frac{1}{F^{2/3}}$$

on peut avoir encore une représentation plus intéressante au point de vue rationnel, mais elle ne sera pas traitée ici.

5) Considérations finales

Dans cet article, j'ai voulu contribuer à rendre générale la solution des problèmes de base des ressauts. Mon but était, en particulier, de passer des cas courants : section rectangulaire, canal horizontal, à ceux où la section transversale et la pente sont quelconques.

Les relations établies, quoique plus complètes que les expressions usuelles, présentent encore

quelques défauts, en particulier celui de n'avoir pas été soumises à une vérification expérimentale qui permette de juger de leur précision et de constater si les résultats obtenus justifient les complications introduites.

De toute manière, j'ai jugé bon de publier cette étude, afin de la soumettre aux critiques et de permettre à ceux qui se trouveraient dans des conditions propices pour franchir le stade que je n'ai pu dépasser, de l'améliorer et de la compléter.