Considérations théoriques sur le maintien en suspension de particules solides dans un courant turbulent uniforme

A theoretical study of suspension regime in turbulent flow

PAR M. BOUVARD

INGÉNIEUR A LA RÉGION D'ÉQUIPEMENT HYDRAULIQUE ALPES II, D'ÉLECTRICITÉ DE FRANCE

Etude des hypothèses servant de base à la mise en équation classique (Schmidt Rouse) du problème de la suspension par un écoulement turbulent. Critique qualitative des résultats à l'aide d'expériences concernant une galerie de forme circulaire.
L'idée maitresse du calcul présenté consiste à faire apparaître la valeur de la fluctuation turbulente de vitesse. Présentation d'un premier calcul basé sur des hypothèses simplificatrices, tant en ce qui concerne la schématisation de cette vitesse que la concentration. On aboutit à une équation intégrale résolue numériquement, dont les résultats sont comparés à ceux de Schmidt Rouse.
Perfectionnement des hypothèses concernant l'intervention de la vitesse turbulente par un procédé permettant de tenir compte de sa vraie valeur et, notamment, de ses fluctuations aléatoires.
Examen rapide de la façon de faire entrer les régimes transitoires dans les hypothèses utilisées, liaison entre le mouvement d'une particule unique et l'équilibre statistique d'un nuage de particules en suspension.

This is a study of the hypotheses upon which the equation for suspension in turbulent flow (Schmidt-Rouse) is based. Results from this equation are compared qualitatively with results obtained from tests on a circular pipe. The main principle underlying the calculation consists in bringing into evidence the value of the turbulent velocity fluctuation. A preliminary calculation is presented, based on simplifying assumptions for the concentration and the schematic representation of this velocity. An integral equation is finally obtained which is solved numerically and its results are compared with those of Schmidt-Rouse. The assumptions taking into account the effect of turbulent velocity are improved by means of a method in which its true value, and especially its random fluctuations, are taken into account.
A method of introducing the transient states into the hypotheses used is rapidely examined-connecting the motion of a single particle with the static equilibrium or a cluster of particles in suspension.

Le problème que nous allons étudier a fait l'objet de travaux de SCHMIDT et de ROUSE qui ont établi sur ce problème des théories bien connues, que nous allons d'abord rappeler.

Considérons un écoulement à deux dimensions, turbulent, et un plan (P) de séparation, arbitraire, dans cet écoulement. Les particules solides ont tendance à tomber; mais la diffusion turbulente a tendance à monter plus de particules qu'elle n'en descend, à cause de la concentration croissante vers le bas.

Soit :

W la vitesse de chute en eau calme des particules,

C la concentration moyenne à la distance y du fond.

Dans ces théories, on écrit que le débit solide descendant dû à la pesanteur est égal à CW. Quant au débit solide remontant dû à la turbu-

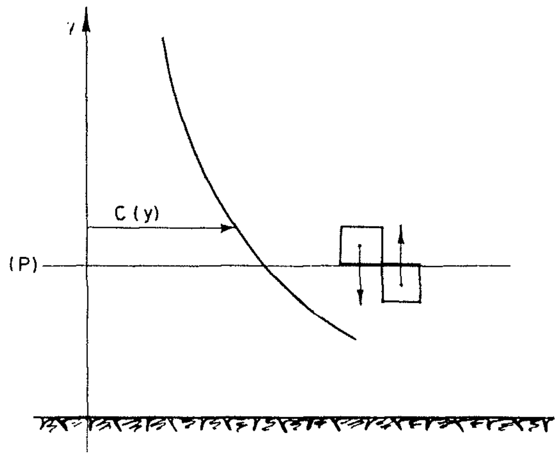

FIG. 1

lence, on admet qu'il est égal à $\varepsilon\,(dc/dy)$, ε représentant le « coefficient de transfert de mouvement turbulent ». L'état d'équilibre est atteint quand la somme des débits solides descendants et ascendants est nulle, ce qui s'écrit :

$$\mathrm{CW} + \varepsilon \frac{dc}{dy} = 0 \qquad (2)$$

On assimile en général ε à la valeur correspondant à un écoulement sans suspension, et on déduit sa valeur de la théorie de la turbulence. On obtient alors l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dc}{c} = -\mathrm{W}\left[\frac{dy}{\dfrac{\tau_0}{\rho}\,\dfrac{y_m - y}{y_m}}\right]\frac{du}{dy} \qquad (3)$$

τ_0 représente le frottement du fluide à la paroi, par unité de surface,

ρ sa masse spécifique,

y la distance au fond du point considéré,

y_m la profondeur de l'écoulement

Si on pose :

$$Z = \frac{\mathrm{W}}{k\sqrt{\tau_0/\rho}}$$

on trouve que la forme théorique de la concentration est donnée par l'expression :

$$\frac{c}{Ca} = \left(\frac{y_m - y}{y} \times \frac{a}{y_m - a}\right)^{Z} \qquad (4)$$

Ca représentant la concentration de référence, prise à une distance a du fond. La valeur de la concentration au point courant n'est donc connue qu'en valeur relative.

L'équation (4) peut être représentée par des courbes qui ont une allure bien connue. A noter que y peut prendre des valeurs quelconques voisines de zéro, car on trouverait alors que la concentration prend une valeur infinie. On admet donc que (4) n'est valable que jusqu'à une certaine distance du fond (qu'on prend en général égale au 1/5 ou au 1/10 de la profondeur totale).

I

Critique des résultats de Rouse

A) CRITIQUE THÉORIQUE :

Le mouvement des particules fluides dans un écoulement turbulent s'effectue avec une certaine vitesse. Cette vitesse n'est évidemment pas constante en grandeur et en direction, mais elle varie entre 0 et une valeur maximum, finie, suivant une loi de probabilité. Le rapport entre cette vitesse et la vitesse de chute en eau calme des particules solides doit jouer un rôle fondamental, puisque l'écoulement turbulent ne saurait remonter vers le haut des particules dont la vitesse de chute est supérieure à la valeur maximum de la composante turbulente en un point. Or, ε est égal au produit de la valeur absolue moyenne, V, de la fluctuation turbulente et de la longueur de mélange, de sorte que, si V diminue (ce qui doit correspondre, à notre avis, à une diminution de la capacité de transfert de courant turbulent, si la vitesse des particules reste constante), ε peut néanmoins rester constant si la longueur de mélange croît.

B) CRITIQUE EXPÉRIMENTALE :

La relation théorique (4) semble avoir été vérifiée par plusieurs expérimentateurs, dans des essais de laboratoire, notamment en Amérique (*). Nous avons voulu néanmoins comparer avec des résultats obtenus dans un canal industriel.

Nous avons utilisé les résultats des expériences effectuées par M. DUFOUR dans la galerie d'amenée de l'usine de Lavey en Suisse. Ces expérien-

(*) Les essais de Vanoni (*Proc. A.S.C.E.*, 1946, pp. 67-133) concernent en fait un sable à granulométrie variable, de 1 à 3 environ. W est alors pris égal à la vitesse de chute du centre de gravité d'un nuage composé de grains de sable utilisé, alors qu'il varie, suivant le diamètre des grains, de 1 cm/s à 0,4 cm/s, entraînant une variation du nombre de Schmidt du même ordre. Ceci nous paraît sérieusement compromettre, pour plusieurs raisons, la valeur des résultats précités.

ces ont été décrites dans le *Bulletin technique de la Suisse Romande*, n° 1, du 13 janvier 1951, et n° 10 du 15 mai 1954. Elles concernent le dessableur installé dans la galerie d'amenée, à la suite d'un tronçon rectiligne de 1.600 m de longueur où le régime permanent de suspension peut donc être supposé atteint. Les eaux dérivées proviennent du Rhône et sont très chargées de sable de toute granulométrie, et surtout de sable fin. Les résultats sont consignés dans les tableaux présentés par M. DUFOUR, que nous reproduisons ci-dessous :

PRÉLÈVEMENTS DU 2 JUILLET 1953

Diamètre des grains mm	Poids partiels en %	
	Eliminés	Non éliminés
0,15	24,91	66,25
0,15-0,25	18,60	15,15
0,25-0,5	50,85	18,50
0,5-1,0	5,42	0,10
1,0	0,22	0,00
Totaux.	100.000	100.000
Poids par jour.	3.008 tonnes	14.350 tonnes

PRÉLÈVEMENTS DU 2 JUILLET 1953

Diamètre des grains mm	Poids en tonnes par jour des alluvions		
	Eliminés	Non éliminés	pénétrant dans le tunnel
0,15	750	9.510	10.260
0,15-0,25	558	2.173	2.731
0,25-0,5	530	2.653	4.183
0,5-1,0	163	14	177
1,0	7	0	7
Totaux. .	3.008	14.350	17.358
	17,3 %	82,7 %	100,0 %

PRÉLÈVEMENTS DU 2 JUILLET 1953

Diamètre des grains mm	Poids des alluvions pénétrant dans le tunnel		Poids partiels en % des alluvions	
0,15	10.260	100	7,3	92,7
0,15-0,25	2.731	100	20,4	79,6
0,25-0,5	4.183	100	36,6	63,4
0,5-1,0	177	100	92,1	7,9
1,0	7	100	100,0	0,0
Total. . .	17.358			

Nous en avons tiré le graphique représentant le pourcentage des sables éliminés et non éliminés, indiqué ci-joint.

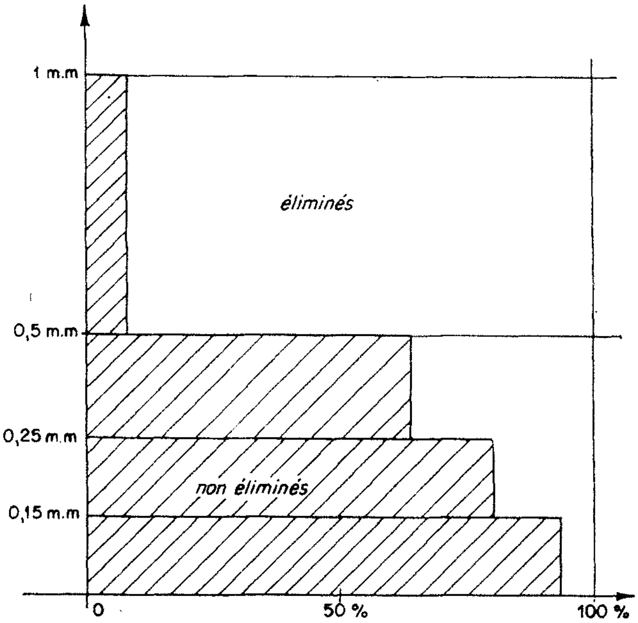

FIG. 2

La quantité de matériaux purgés était déterminée après analyse de la concentration de l'eau. Des prélèvements d'eau à la sortie des turbines permettaient de connaître les caractéristiques des sables non éliminés. Le débit du tunnel en amont du dessableur était de 148 m³/s (vitesse 3,14 m/s), le débit de purge atteignait 4,3 m³/s (soit environ 3 % du débit total) (*).

(*) M. DUFOUR précise que ce débit est plus élevé que celui qui correspondrait au maximum d'efficacité du dessableur.

Les résultats de Rouse ne s'appliquent qu'assez imparfaitement au tunnel de Lavey puisqu'il s'agit d'une conduite en charge. Sa forme circulaire, donc à trois dimensions, interdirait pratiquement la construction d'une théorie correcte. Des tentatives, en supposant ε, coefficient de diffusion turbulent constant au centre de l'écoulement, montrent cependant, comme il fallait s'y attendre, que la concentration est plus homogène, toutes autres choses égales d'ailleurs, dans un écoulement en charge que dans un écoulement libre. Les courbes représentant l'équation (4) donnent donc des concentrations théoriques systématiquement trop faibles à la partie supérieure et trop fortes à la partie inférieure d'un écoulement en charge de même caractéristiques (section, rugosité, débit) dans le cadre d'hypothèses de base identiques.

Nous avons calculé le coefficient de Schmidt correspondant aux essais de Lavey. On trouve aisément la valeur suivante :

$$Z = 0{,}89 \frac{W}{U} C$$

C représentant le coefficient de Strickler que nous prendrons égal à 75 (grande galerie),

W la vitesse de chute en eau calme des particules considérées,

U la vitesse moyenne dans la galerie.

Diamètre des grains	Vitesse de chute W	Z
0,3 mm	3,5 cm/s	0,75
0,5 mm	6 cm/s	1,28
1 mm	10 cm/s	2,15

Nous avons tracé la courbe de la concentration correspondant à $Z = 1{,}25$ (donc très voisine de 1,28) pour un canal rectangulaire. En supposant que tout le débit de purge provienne de la tranche inférieure (ce qui est optimiste, même en présence de courant de densité, et suppose que l'évacuation du débit ne remette aucun sable en suspension), il ne semble pas possible que l'élimination de 3 % du débit (représentée sur le graphique par l'élimination de la tranche représentant 3 % de la hauteur de l'écoulement) corresponde à l'élimination de la part du sable de 0,5 mm correspondant aux résultats expérimentaux de Lavey (*). La comparaison ne peut d'ailleurs être que qualitative, étant donné les incertitudes signalées plus haut (section circulaire en charge au lieu d'une section plane).

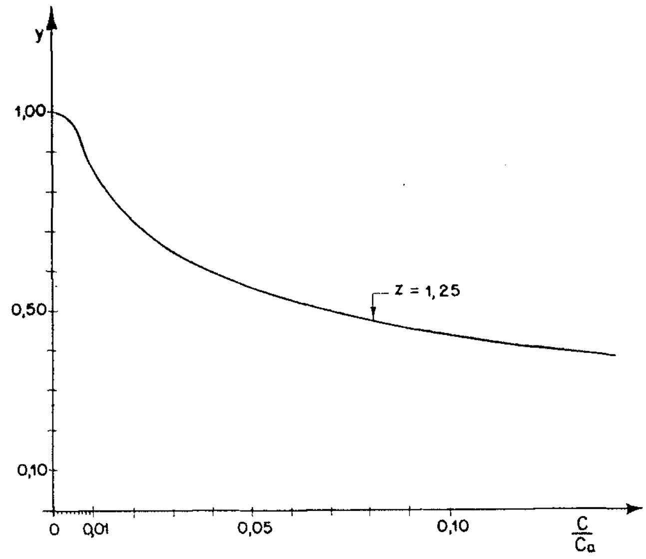

Fig. 3

II

Essais de mise en équation du problème, en tenant compte de la vitesse turbulente dans le mouvement ascensionnel des particules

Considérons un plan frontière à une altitude donnée : y. Nous allons supposer qu'une surface unité est traversée par moitié par un courant turbulent de vitesse dirigée vers le haut, de valeur absolue, unique V, et que l'autre moitié est traversée par des particules fluides de même vitesse, en valeur absolue, mais de sens opposé. Nous supposerons en outre que la concentration, en éléments solides, du fluide qui passe le plan frontière ainsi défini, est égale à la valeur moyenne de la fonction $C(y)$ sur une bande

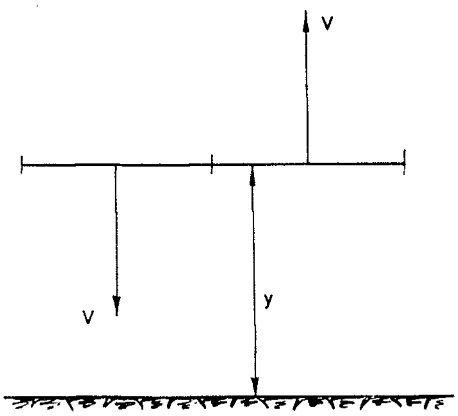

Fig. 4

(*) On pourrait d'ailleurs préciser ce point en calculant la proportion correspondant aux résultats théoriques. Une difficulté subsiste : on admet que la théorie ne s'applique qu'à une certaine distance du fond.

d'épaisseur a, soit : $1/a \int_{y-a}^{y} c dy$. L'équilibre des échanges des particules solides s'écrit alors :

$$\left(V+W\right)\frac{1}{a}\int_{y}^{y+a} c dy = \left(V-W\right)\frac{1}{a}\int_{y}^{y-a} c dy \quad (5)$$

L'équation (5) représente une équation intégrale dont la solution permettrait de connaître $C(y)$, à condition de se fixer $a(y)$, et dans le cadre des hypothèses de base.

Le maniement de telles équations n'est pas très facile, et nous avons essayé de trouver sa solution en utilisant des procédés approchés analytiques ou numériques, ce qui nous a conduit dans certains cas à des résultats dignes de remarque.

A) Résolution analytique :

Pour éliminer l'intégrale, on peut penser à poser :

$$C = C_{y_0} + \left(y_0 - y\right)\left(\frac{dC}{dy}\right)_{y_0}$$

ce qui revient à assimiler la courbe à sa tangente au voisinage d'un point. L'introduction de cette expression dans la relation (5) donne alors :

$$\frac{dC}{dy} + \frac{2C}{a}\frac{W}{v} = 0$$

On peut pousser plus loin l'étude en assimilant a à la longueur de mélange l, au sens de Prandtl (*). Si l représente en effet le parcours moyen des particules liquides, perpendiculaire à la direction principale (sans qu'elles perdent les propriétés provenant de leur point d'origine), il est logique d'admettre qu'il en est de même pour la concentration. Il est alors possible d'expliciter l et V, qu'on peut assimiler à la moyenne des valeurs absolues des vitesses turbulentes. En partant des relations bien connues :

$$\tau = \rho\, l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \tau_0 \frac{y_m - y}{y_m}\ ; \quad \bar{v} = l\,\frac{du}{dy}$$

qu'on porte dans l'équation (6), on aboutit à l'expression suivante :

$$\frac{dc}{c} = -2W \frac{dy}{\frac{\tau_0}{\rho}\frac{y_m - y}{y_m}}\frac{du}{dy} \quad (6)$$

Ce résultat est très curieux puisqu'on retombe sur l'équation de Schmidt-Rouse, *au coefficient 2 près* (*), au second membre. L'intégrale de l'équation (6) donnerait donc aussi une courbe $c(y)$ continue et de signe constant, ce qui, manifestement, ne cadre pas avec nos hypothèses de bases, les relations établies cessant d'être valables si $V \leqslant W$, puisqu'elles entraîneraient alors un changement de signe pour C.

Considérons le point où $V = W$, d'ordonnée y_0. L'équation (5) donne alors :

$$2C + a\frac{dc}{dy} = 0$$

Si on appelle C_0 la concentration résultant de l'intégration de l'équation, au point où $V = W$, la courbe $C(y)$ au voisinage a comme expression approchée :

$$C = C_0 - 2C_0\left(\frac{y - y_0}{a}\right)$$

qui conduit à une concentration négative pour $y - y_0 = a$. C'est cette valeur négative qui rétablit une valeur moyenne nulle à la profondeur $y + a/2$, prise comme référence dans l'équation (6). Or il est évident qu'une concentration négative n'a pas de sens physique, et cette approximation n'est pas acceptable dans le cadre de nos hypothèses. On peut noter d'ailleurs qu'elle cesse de l'être dès que la concentration est négative en un point quelconque d'ordonnée comprise entre y et $y + a$.

B) Résolution numérique :

La forme de l'équation (5) permet assez facilement une résolution numérique approchée, qui pourrait être rendue, si on le désirait, aussi précise que possible. (5) donne en effet :

$$\int_{y}^{y+l} c dy = \frac{\frac{V}{W} - 1}{\frac{V}{W} + 1}\int_{y}^{y-l} c dy \quad (7)$$

(*) Un calcul analogue peut être fait pour calculer la force de frottement d'un niveau donné. La quantité de mouvement entre l'ordonnée O et y est égale à.

$$\rho\, y \int_{0}^{y} c dy$$

et à un instant ultérieur :

$$\rho\, y \int_{0}^{y} u dt + m\left(u - \frac{1}{2}\frac{du}{dy}\right) - m\left(u + \frac{1}{2}\frac{du}{dy}\right)$$

La variation est donc représentée par $m\, l\,(du/dy)$, m représentant la « masse » de fluide échangée par turbulence.

Mais m est égal à $\rho\, v'$ (v' : fluctuation turbulente perpendiculaire au mouvement d'ensemble) et cette variation de quantité de mouvement est égale à la force de cisaillement. Donc :

$$\tau = \rho\, v'\, l\,\frac{du}{dy}$$

qui n'est autre que l'expression classique.

(*) Il suffirait d'ailleurs de faire $a = 2l$ pour faire disparaître cette différence.

On peut donc calculer de proche en proche $\int_0^1 cdy$, donc construire la courbe C (y) en assimilant la courbe à un segment de droite sur un intervalle donné.

Il est commode au préalable de déterminer les courbes donnant $l\,(y)$ et $V/W\,(y)$. Leurs expressions sont les suivantes :

$$\frac{V}{W} = \frac{u^*}{W}\sqrt{1-\frac{y}{y_m}} \qquad l = k\,y\sqrt{1-\frac{y}{y_m}}$$

u^* la vitesse de frottement $= \tau_0/\rho = U\sqrt{\Delta/8}$.
U la vitesse moyenne de l'écoulement.

On voit donc, d'après l'expression de V, que la valeur moyenne de la vitesse turbulente varie entre u^* au fond, et O, en surface, et que, entre, sa variation est parabolique en fonction de y. Il est commode d'introduire les facteurs :

$$\beta = \frac{V}{W}\ ; \quad \beta_0 = \frac{u^*}{W}$$

dont la signification physique est évidente; ils représentent le rapport de la fluctuation turbulente, à la vitesse de chute des corps en eau calme. Si $\beta_0 < 1$, le corps ne peut entrer en suspension. Au contraire, si $\beta_0 > 1$, les particules peuvent monter jusqu'à un point où $\beta_0 = 1$. L'équation (7) peut alors s'écrire :

$$\int_0^{+l} cdy = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}\int_0^{-l} cdy$$

Du point de vue pratique, on trace successivement :

a) la courbe $(\beta - 1)/(\beta + 1)$ en fonction de y, pour des valeurs de β_0 variables. Nous avons pris successivement $\beta_0 = 2\text{-}3\text{-}5\text{-}10$;

b) la courbe $l\,(y)$. On partage ensuite l'ordonnée en bandes de hauteur égale à la longueur de mélange, à l'aide d'une construction graphique simple.

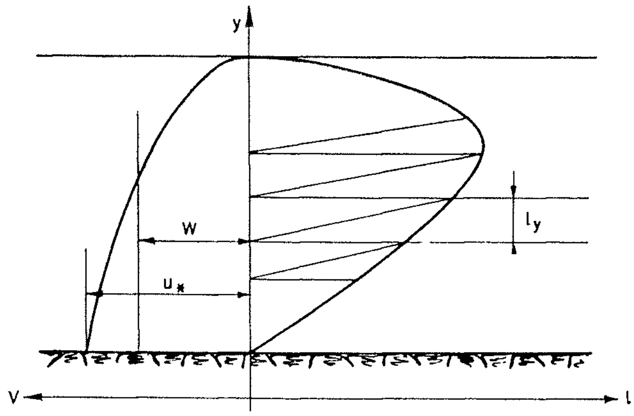

FIG. 5

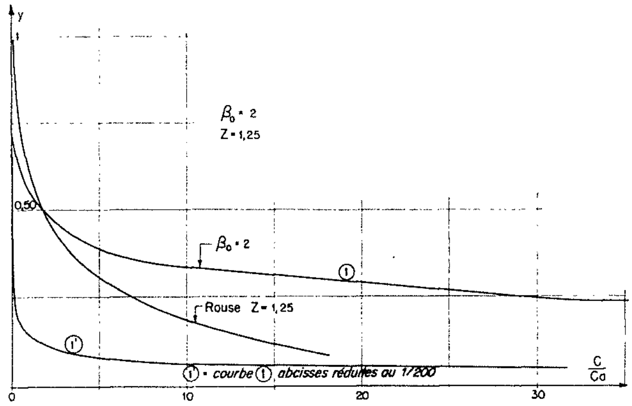

FIG. 5 *a*

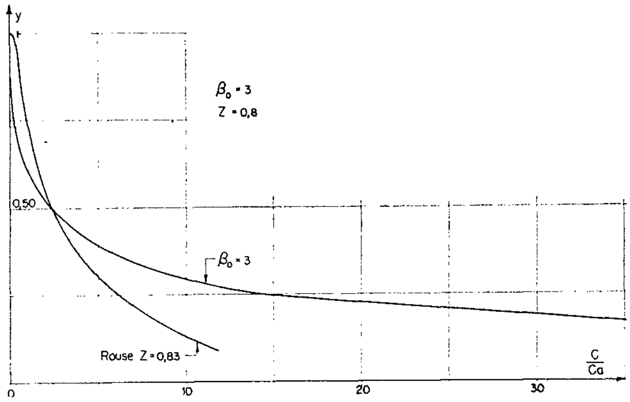

FIG. 5 *b*

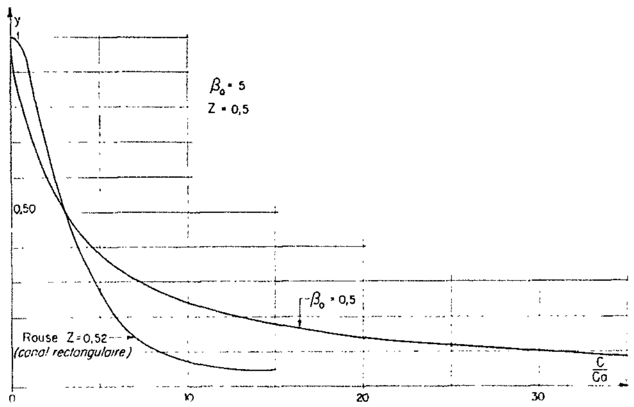

FIG. 5 *c*

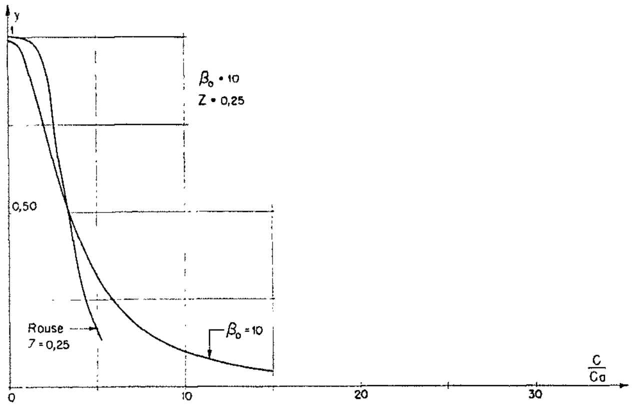

FIG. 5 *d*

Nous avons tracé, ci-joint, les courbes résultant du calcul numérique, en partant d'une concentration constante pour l'ordonnée $y/y_m = 0{,}5$. Il serait peut-être plus rationnel de partir d'un poids de matière donné en suspension constante (représenté donc par une surface entre la courbe et l'axe des ordonnées constantes), mais une telle construction supposerait une précision du graphique que nous pensons ne pas avoir atteinte.

III

Comparaison avec les résultats de Rouse

Le paramètre de SCHMIDT Z peut être exprimé en fonction de β_0 :

$$Z = \frac{W}{ku^*} = \frac{W}{0{,}4\, u^*}$$

(si on fait $k = 0{,}4$ conformément à la théorie de von KARMAN),

$$Z = \frac{2{,}5}{\beta_0}$$

Si $\beta_0 \leqslant 1$, la comparaison est immédiate: l'équation (4) donne une concentration (d'ailleurs faible en valeur absolue dès que y/y_m croît) variant de façon continue entre le radier et la surface libre de l'écoulement, alors que nos hypothèses donnent une concentration nulle en tous points. L'écart est donc maximum dans ce cas. Cet écart décroît si β_0 croît. Pour $\beta_0 = 10$, notre construction graphique donne une courbe très voisine de la courbe de ROUSE, pour un nombre de SCHMIDT double (double en raison de la divergence signalée par la note de bas de la page 631.

Nous avons reporté sur les courbes que nous avons trouvées les courbes représentant l'équation (4), en prenant encore comme référence la concentration au point d'ordonnée relative 1/2, bien que, à notre avis, il vaudrait mieux là aussi procéder à poids de matière transportée donnée. Les courbes résultant de nos hypothèses sont alors systématiquement beaucoup plus concentrées vers le bas, surtout si β_0 est égal à 2 ou 3. Le tracé de la courbe $\beta(y)$ montre que, dans ce cas, le facteur $\beta - 1$, en numérateur dans l'équation (8), ne croît que lentement avec la profondeur à partir de zéro, tandis que $\beta + 1$, en dénominateur, ne varie pas beaucoup.

On se heurte d'ailleurs, par la comparaison avec les résultats de ROUSE, à la même difficulté concernant l'allure des courbes théoriques au voisinage du radier. La concentration tend, dans les deux cas, vers l'infini, mais il faut bien admettre que les hypothèses cessent d'être valables à une certaine distance du fond.

Il est d'ailleurs assez curieux de remarquer que, dans le cas des expériences signalées à propos de Lavey, u^* est égal à 12 cm/s, alors que la vitesse de précipitation des grains de 1 mm (qui sont entièrement dessablés) est de 10 cm/s. Or ces deux chiffres sont d'un ordre de grandeur très voisin. Nous ne tirerons cependant pas de conclusion déterminante de ce résultat, étant donné que les grains de 1 mm sont en proportion très réduite dans la galerie, avant dessablage.

IV

Compléments théoriques éventuels

Il est d'abord probable qu'une étude mathématique de l'équation intégrale (7) pourrait donner des résultats intéressants et permettrait peut-être d'expliciter la courbe représentative $C(y)$.

A) FLUCTUATION TURBULENTE DE VITESSE :

Nous avons pris, pour V, la moyenne des valeurs absolues des fluctuations de vitesses. En fait, elle doit varier suivant une fonction de probabilité autour de cette valeur moyenne. Il est alors possible d'en tenir compte de la façon suivante :

Considérons une surface de référence horizontale que nous avions précédemment divisée en deux, en admettant une vitesse turbulente égale à $\pm$ V sur chacune des deux moitiés. On pourrait diviser cette surface en un certain nombre d'éléments, au travers desquels la vitesse turbulente admettrait certaines valeurs, la courbe de probabilité V (t) étant alors remplacée par une courbe V (ΔS). Il est facile d'établir les relations correspondantes, toutes les autres hypothèses restant les mêmes. On obtient facilement :

$$\Sigma \Delta S_n (V_n + W) \int_y^{y+a} c\,dy = \Sigma \Delta S_n (V_n - W) \int_y^{y-a} c\,dy$$

S_n s'obtient en fonction de V_n en divisant l'intervalle de variation de V en élément de valeur absolue constante.

Au fur et à mesure que $V_n - W$ deviennent négatifs, les termes correspondants passent dans le premier membre (ils correspondent alors à une descente de matière en suspension), jusqu'à ce qu'il reste des termes positifs dans le second qui représente une remontée des particules solides. Au-delà, les expressions ne sont plus valables, la concentration est nulle.

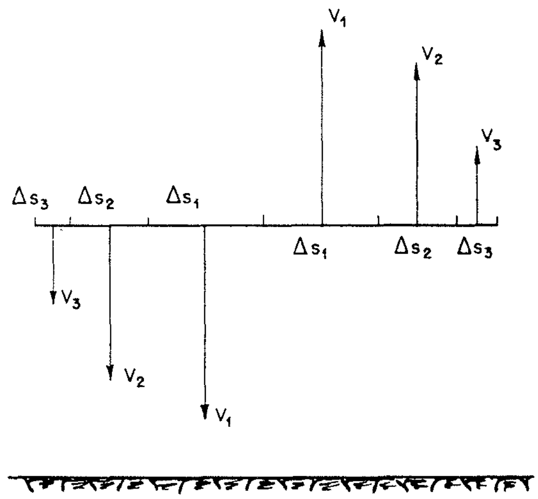

FIG. 6

L'équation s'écrirait avec une présentation analogue à celle de (7) :

$$\int_y^{y+a} cdy = \frac{\Sigma \Delta S_n \left(\frac{V_n}{W} - 1\right)}{\Sigma \Delta S_n \left(\frac{V_n}{W} + 1\right)} \int_y^{y-a} cdy$$

Le facteur par lequel il faut multiplier l'intégrale du second membre pourrait être facilement déterminé en fonction de y.

B) ETUDE DES RÉGIMES TRANSITOIRES :

Supposons une courbe de concentration arbitraire et différente de celle du régime permanent ayant fait l'objet des calculs précédents. Il peut être intéressant de déterminer à partir de quel moment la courbe de régime est sensiblement atteinte.

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, il est facile d'obtenir par la masse Δm des particules solides qui traversent une surface unité pendant un temps Δt :

$$\frac{l \Delta m}{W \Delta t} = (\beta + 1) \int_y^{y+l} cdy - (\beta - 1) \int_y^{y-l} cdy$$

Il peut être commode, par ce calcul, de partager également la profondeur en bandes d'épaisseur l en chaque point, la courbe de concentration initiale donne alors l'ordonnée moyenne de la concentration sur chacune d'elles.

En prenant des Δt finis, le problème peut être résolu numériquement. On voit d'ailleurs que si le régime permanent est atteint, le second membre est nul, et par suite $\Delta m = 0$.

Conclusions

Il semble donc qu'on pourrait compléter l'étude théorique de la répartition des matières en suspension en faisant intervenir la vitesse turbulente. La forme sous laquelle nous l'avons fait n'est qu'une des solutions possibles à cet égard : elle paraît cependant assez souple pour pouvoir tenir compte des divers facteurs intervenant dans le phénomène.

Les calculs que nous avons présentés conduisent à des concentrations beaucoup plus fortes que celles couramment admises dans la partie inférieure des écoulements, et surtout à une granulométrie des corps en suspension strictement limitée vers les grosseurs maxima.

Il serait intéressant de procéder à des essais dans des ouvrages industriels du genre de ceux de Lavey, les expériences actuelles, soit en canal industriel, soit en laboratoire n'étant pas suffisantes pour des conclusions définitives.

Il resterait d'ailleurs à relier le mouvement d'une particule isolée à l'équilibre statique auquel peut aboutir un mélange de grains très nombreux. On peut démontrer aisément que, si une particule est en suspension dans un écoulement, la probabilité relative au temps pendant lequel elle reste à une profondeur donnée représente, à une échelle près, la concentration qu'aurait un nuage composé d'un nombre infini de particules identiques.

DISCUSSION

Président : M. LAVAL.

M. le Président remercie M. BOUVARD d'avoir essayé de rénover le schéma, d'ailleurs assez arbitraire, que Prandtl avait proposé pour expliquer la suspension dans un écoulement turbulent et d'avoir présenté de nouveaux schémas.

M. HALBRONN demande à M. BOUVARD comment il a fixé la concentration de référence pour appliquer quantitativement la formule de Rouse aux dessableurs Dufour.

M. BOUVARD répond que les résultats des dessableurs sont donnés en valeur relative (évacuation de 3 %, 4 %, etc. des matériaux). Dans ces conditions, si on suppose que le débit de purge est représenté par 3 % de y_m (y_m étant la profondeur totale du canal) on peut admettre, sous réserve de la difficulté que l'on rencontre au voisinage du radier, que la théorie de Rouse est applicable aux dessableurs.

M. HALBRONN estime, également, qu'il est difficile d'appliquer à une galerie circulaire les résultats établis pour un écoulement plan. Par ailleurs, la méthode suivie par Prandtl pour établir son équation a le caractère d'une analyse dimensionnelle améliorée; il ne convient donc pas, d'attacher une signification particulière aux valeurs trouvées pour les coefficients numériques.

M. BOUVARD reconnaît qu'il y a là une difficulté sérieuse; mais on constate toujours dans les canaux que le sable redescend vers le bas et se rassemble sur une épaisseur relativement faible, qui est de l'ordre de 0,10 à 0,15 de la hauteur totale de l'écoulement. Ces résultats sont qualitativement différents de ceux qui correspondent aux expressions théoriques de M. Rouse.

Par ailleurs, M. HALBRONN rappelle que les difficultés rencontrées par la théorie de Rouse au voisinage de la paroi inférieure de l'écoulement étaient levées dans sa communication « Remarque sur la théorie de l'Austausch appliquée au transport des matériaux en suspension » présentée à la 3e Réunion AIRH des 5, 6, 7 septembre 1949.

Répondant à une question de M. LARRAS, M. BOUVARD indique que l'hypothèse sur l'équilibre des quantités de grains montants et de grains descendants correspond à une vitesse unique de turbulence; mais la vitesse turbulente peut, évidemment, atteindre une valeur quelconque et il serait intéressant de préciser la loi en partant d'une surface très grande, à travers laquelle on peut supposer que le mouvement est statiquement semblable à lui-même et en affectant chaque élément de surface d'une vitesse variable donnée par une expérimentation.

M. HALBRONN estime que, si on descend à un point de concentration faible, cela montre qu'il n'y a pas la même surface pour l'eau à la remontée et à la descente.

M. BOUVARD indique que, dans le mémoire présenté par M. HALBRONN aux IIe Journées de l'Hydraulique (Grenoble, juin 1952), on ne retrouvait pas la continuité à la fois pour les fluides et pour les particules solides.

M. le Président demande à M. BOUVARD de préciser, dans le texte qui sera publié, que la substitution des quantités de mouvement aux concentrations permet de retrouver la valeur de cisaillement donnée par la formule de cisaillement de Prandtl :

$$\tau = \varepsilon \frac{du}{dy} \quad \text{avec } \varepsilon = p\, l^2 \frac{du}{dy}$$

M. le Président souligne, d'autre part, que la différence entre la loi de Rouse et les résultats de M. BOUVARD n'a pas de sens physique précis, car la « longueur de mélange » définie par Prandtl n'est qu'un coefficient dimensionnel. Il ne paraît pas y avoir d'inconvénient majeur à définir pour la suspension un coefficient différent. La théorie de M. BOUVARD paraît supérieure aux résultats de Rouse, en ce qu'elle lève la contradiction d'après laquelle des matériaux pourraient être soulevés par des fluctuations de vitesse inférieures à leur vitesse de chute.

Enfin, M. le Président demande si l'équation intégrale se simplifie en la dérivant. M. BOUVARD répond négativement.

M. CHAPOUTHIER estime que l'étude de la concentration des suspensions devrait permettre une vérification expérimentale assez serrée des hypothèses de Prandtl et de Boussinesq sur la turbulence, ce qui est très important pour les ingénieurs.

M. LABAYE, rappelant que le coefficient d'agitation ε_s des matériaux n'est pas le même que celui ε des particules liquides, suggère de rechercher si les courbes obtenues avec l'équation intégrale simplifiée correspondent aux courbes de Rouse pour une valeur particulière de z. Une étude dans ce sens permettrait peut-être d'expliciter les relations entre ε_s et ε.

M. BOUVARD indique que, daprès les essais de Vanoni, qui prend la vitesse du centre de gravité d'un nuage de points de la courbe granulométrique des sables étudiés entre les diamètres 0,104 et 0,208, on aboutit à un ε_s qui est de l'ordre de 1,3 à 1,5 de ε; ce résultat semblerait indiquer que l'agitation est plus grande dans un écoulement chargé de particules solides, ce qui paraît paradoxal : la suspension diminue la turbulence au point que l'on finit par arriver à un équilibre tel que, quand il y a plus de grains, la turbulence est suffisamment diminuée pour que la capacité porteuse du courant soit modifiée. Mais M. BOUVARD croit que la concentration correspondant aux essais de Vannoni est assez difficile à définir et que, suivant l'opinion de Rouse, il faudrait partager ces courbes granulométriques en un certain nombre de tronçons correspondants à des granulométries partielles d'épaisseur très petite, de manière à obtenir la concentration en fonction de la concentration de référence.

M. LABAYE remarque que le rapport $\varepsilon_s/\varepsilon$, très difficile à évaluer est peut-être inférieur ou supérieur à 1 suivant la granulomértie des matériaux.

Une controverse entre M. LABAYE et M. BOUVARD, sur le sens de ce rapport, montre à M. le Président que l'observation de M. CHAPOUTHIER reste valable et qu'il y a, peut-être, expérimentalement, quelque chose à faire.

M. MAITRE ne croit pas qu'une théorie sur la distribution des concentrations puisse être confirmée ou infirmée avec certitude par des résultats expérimentaux; pour deux raison :

— D'une part, il n'est pratiquement pas possible, même en laboratoire, de déterminer expérimentalement la concentration en un point donné d'un écoulement, avec une précision supérieure à 15 ou 20 % ;

— D'autre part, il n'existe pas, dans la nature, d'écoulements permanents en matière de débit solide en suspension, comme l'ont montré les mesures réalisées sur des dessableurs actuellement en service, par la Division « Essais extérieurs » des Etudes et Recherches d'E.D.F. ces dernières années.

M. MAITRE ajoute que, d'après les résultats de nombreuses expériences françaises et étrangères, la répartition des concentrations dans une section transversale d'une galerie est à deux dimensions (concentration constante à un niveau donné), alors que la distribution des vitesses est à trois dimensions et varie avec le profil en travers de la galerie.

M. LABAYE ajoute que la variation de la concentration n'est pas de l'ordre de la variation de la turbulence qui est, en général, plus homogène.