Quelques résultats théoriques récents concernant les écoulements des nappes d'eau souterraines

A few recent theoretical results concerning ground water flow

PAR R. MEYER

INGÉNIEUR AU LABORATOIRE DAUPHINOIS D'HYDRAULIQUE NEYRPIIC

Cet article comprend trois parties :

1. *Etude de la validité de l'hypothèse de Dupuit.*
2. *Etude de l'influence de la vitesse d'écoulement d'une nappe sur les écoulements produits par des pompages ou des injections.*
3. *Etude des efforts sur les ouvrages situés aux limites des nappes (par exemple : murs de quai).*

L'hypothèse de Dupuit entraîne deux sortes d'erreurs :

- *erreurs n'intervenant que près des limites de la nappe, près des puits, ou près des changements brusques de caractéristiques de la nappe;*
- *des erreurs intervenant dans l'ensemble de la nappe, en régime transitoire, et augmentant avec la rapidité de variation de la nappe.*

La marée ou les fluctuations dues aux crues sont, par exemple, souvent beaucoup trop rapides pour s'accommoder de l'hypothèse de Dupuit.

La vitesse d'écoulement d'une nappe n'a aucune influence sur les pompages, injections ou autres écoulements de courte durée (de l'ordre du mois en moyenne); par contre, elle est déterminante pour les mêmes écoulements s'ils sont permanents ou de longue durée. Elle détermine également le temps de mise en régime des nappes. Ce temps est souvent de l'ordre d'une ou plusieurs générations humaines.

Les efforts sur les ouvrages limitant les nappes sont en général compris entre 1/2 et 1 fois l'effort obtenu en admettant que le plan d'eau libre est (statiquement) à sa position la plus basse et la nappe dans sa position moyenne.

This article comprises three parts :

- 1) *Study of the validity of Dupuit's hypothesis,*
- 2) *Study of the influence of ground water flow velocity on the flow produced by pumping or injections.*
- 3) *Study of forces on structures located at a boundary of the ground water (e.g. quay walls).*

The hypothesis of Dupuit involves two kinds of error :

- *errors which exist only near the boundaries of the ground water, near wells, or near sharp changes in the ground water characteristics;*
- *errors which intervene in the whole of the ground water, in transitory regime, and increase with the speed of variation of the nappe.*

The tide or fluctuations due to floods are for example much too rapid to come within the hypothesis of Dupuit.

The flow velocity of the ground water has no influence on pumping, injections or other flows of short duration (of the order of a month); on the contrary it is the determining factor for the same flows if they are permanent or of long duration. It also determines the time taken for the ground water to establish its regime. This time is often of the order of one or several generations.

The forces exerted on structures at the ground water boundaries are generally between 1/2 and 1 times the force obtained by assuming that the free water surface is (statically) at its lowest position and the ground water table statically in its mean position.

SOMMAIRE

CHAPITRE I. — INTRODUCTION

- 1-1. — *RAPPEL DES IDÉES DE BASE EN MATIÈRE D'HYDRAULIQUE SOUTERRAINE.*
- 1-2. — *LE PROBLÈME DES NAPPES SOUTERRAINES.*

CHAPITRE II. — CONSIDÉRATIONS PRATIQUES
SUR LES PROBLÈMES ÉTUDIÉS

- 2-1. — *HYPOTHÈSE DE DUPUIT.*
- 2-2. — *NAPPES SANS ÉCOULEMENT MOYEN, SITUÉES AU-DESSUS D'UNE ASSISE IMPERMÉABLE HORIZONTALE.*
- 2-3. — *ÉCOULEMENT D'UNE NAPPE SUR UNE ASSISE IMPERMÉABLE INCLINÉE.*
- 2-4. — *NAPPES DE GRANDE ÉPAISSEUR.*
- 2-5. — *CONCLUSIONS DU CHAPITRE II.*

(Seuls ces deux premiers chapitres sont publiés dans le présent numéro.)

CHAPITRE III. — CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES

- 3-1. — *ÉQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT DE L'EAU DANS LES MILIEUX POREUX.*
- 3-2. — *VARIATIONS SINUSOIDALES DANS UNE NAPPE SANS ÉCOULEMENT MOYEN ET SUR UNE ASSISE IMPERMÉABLE HORIZONTALE.*
- 3-3. — *APPROXIMATION DE DUPUIT, OU DES « NAPPES DE FAIBLE ÉPAISSEUR », EN RÉGIME SINUSOIDAL.*
- 3-4. — *NAPPES DE FAIBLE ÉPAISSEUR EN GÉNÉRAL.*
- 3-5. — *DISCUSSION PHYSIQUE DES HYPOTHÈSES ET RÉSULTATS DU PARAGRAPHE 3-4.*
- 3-6. — *NAPPES DE GRANDE ÉPAISSEUR.*
- 3-7. — *SURPRESSIONS SUR LES MURS DE QUAI DUES A LA MARÉE.*
- 3-7. — *PHÉNOMÈNES NON SINUSOIDAUX DANS LES NAPPES DE GRANDE ÉPAISSEUR.*
- 3-9. — *CONCLUSIONS DU CHAPITRE III.*

Préoccupé par la mise en valeur des zones arides ou semi-arides, l'homme a été conduit à prendre très sérieusement en considération les réserves d'eau constituées par les « eaux souterraines ». On entend par là l'eau qui remplit les « vides » situés en dessous de la surface du sol. Suivant la nature et la dimension de ces vides (soit espaces entre les grains de sable, soit failles ou cavernes), on distingue deux grandes classes d'écoulement; on peut dire qu'en gros, si les dimensions des vides restent inférieures au demi-centimètre, on a affaire à l'écoulement d'une *nappe souterraine*; dans le cas contraire, on parle d'écoulement d'une *nappe semi-karstique* ou même, pour les failles ou les cavernes, de cours d'eau karstique.

C'est à l'examen des nappes souterraines que nous nous limiterons dans le présent article;

cependant, avant d'aborder l'exposé des problèmes théoriques, nous avons soin de rappeler quelques idées générales qu'il nous paraît bon d'avoir constamment présentes à l'esprit en cette matière.

Nous ne saurions enfin mettre un terme à ces quelques remarques liminaires sans exprimer à M. SAUVAGE DE SAINT-MARC, directeur-adjoint du Laboratoire Neyrpic, toute notre reconnaissance, non seulement pour l'intérêt qu'il n'a cessé de témoigner à nos travaux, mais aussi et surtout pour les très précieux conseils qu'il a bien voulu nous donner en vue de leur présentation (*).

(*) Pour la mise au point de certains aspects de cette rédaction, nous avons été heureux de pouvoir bénéficier du concours de M. Y. Carpentier, élève de l'Ecole Supérieure d'Electricité, alors en stage au Laboratoire.

CHAPITRE I

INTRODUCTION

1-1. — Rappel des idées de base en matière d'hydraulique souterraine.

1-1-1. — GÉNÉRALITÉS.

De l'eau de pluie qui tombe sur un bassin une partie ruisselle ou s'évapore, le reste s'infiltre et constitue ainsi une nappe souterraine. La valeur de la fraction de pluie atteignant la nappe est très variable d'une région à une autre : un ordre de grandeur moyen est 20 %.

Cette fraction représente des quantités d'eau importantes, et il reste assez difficile de s'imaginer que l'espace entre des grains de sable ou d'argile soit suffisant pour emmagasiner une réserve d'eau considérable et par là intéressante à plus d'un point de vue. Quelques chiffres permettent cependant de fixer les idées sur cette réalité : une plaine alluviale dont la couche perméable a 30 cm d'épaisseur peut contenir 5 à 10 millions de m^3 d'eau par km^2 de superficie.

Mais il y a plus. La vitesse moyenne des eaux souterraines varie, suivant la nature du sol, de quelques mètres par jour à quelques mètres par année. Deux remarques s'imposent :

1° Malgré ces faibles vitesses (10 m par jour par exemple, le débit d'une nappe n'est généralement pas négligeable, car la section d'écoulement présente une très grande largeur; pour la couche perméable de 30 m précédemment citée, le débit peut aller jusqu'à 300.000 m^3 par jour à travers une frontière large de 1 km (fig. 1);

FIG. 1. — Le débit à travers le tronçon AB peut aller jusqu'à 10 000 m^3 /jour

2° Grâce à ces faibles vitesses, les nappes ne se vident que très peu entre deux pluies. Par exemple la nappe schématisée (fig. 2) se vide de moitié en dix ans environ si la vitesse moyenne de l'écoulement est de 1 m par jour, et bien entendu s'il ne pleut

FIG. 2

pas pendant ces dix ans. Ce dernier calcul met l'accent sur la lenteur d'évolution d'une nappe, renseigne sur l'ordre de grandeur du « temps de réponse d'une nappe » ; il explique pourquoi des irrigations nouvelles peuvent parfois ne se révéler désastreuses qu'au bout d'un certain nombre d'années.

Généralement, les nappes d'eau souterraines s'écoulent à travers le sol perméable limité en profondeur et sur les côtés par des rochers ou des terrains imperméables; on a alors affaire à une nappe à surface libre. Certaines nappes cependant sont limitées vers le haut par une couche imperméable; on a alors un écoulement en charge : ces nappes sont dites artésiennes ou captives. Nous n'étudierons par la suite que la nappe à surface libre.

1-1-2. — SURFACE LIBRE ET FRANGE CAPILLAIRE.

Examinons de plus près la surface libre d'une nappe et pour cela plaçons un piézomètre (puits creusé dans le sol contenant la nappe) (fig. 3).

FIG. 3

Nous constatons que le niveau piézométrique est inférieur à celui de la nappe dans le sol. La différence h_c provient de la capillarité :

$$h_c = \frac{4}{g \varphi} \frac{A}{D}$$

A : constante capillaire de l'interface eau-air (environ 70 c.g.s. pour l'eau pure).

g : $= 10^8$ c.g.s. : pesanteur.

D : diamètre des interstices intervenant pour la capillarité.

φ : masse spécifique de l'eau.

Si $D = 1/2$ mm, on trouve $h_c = 6$ cm; si $D = 1/10$ de mm, on trouve $h_c = 30$ cm.

En dessous de la surface libre, il existe souvent une zone de terrain contenant des bulles d'air emprisonnées. L'épaisseur de cette zone dépend des mouvements antérieurs de la nappe. Si la nappe monte et envahit de nouvelles parties du terrain, vides encore d'eau, elle emprisonne de l'air dans certains petits interstices. Par la suite, cet air est lentement dissous sous pression (loi de HENRY) ou chassé par l'eau. De même, au-dessus de la surface libre, il existe souvent une zone dans laquelle il existe en partie de l'eau retenue par capillarité dans les pores suffisamment fins. Cette zone dépend évidemment elle aussi des mouvements antérieurs de la nappe.

La surface libre divise donc le terrain en deux parties : en bas la partie où l'eau est en charge et où l'air remplit des volumes isolés les uns des autres; en haut la partie où c'est l'eau qui remplit des volumes isolés les uns des autres (fig. 4).

FIG. 4. — Les parties hachurées contiennent de l'air

La capillarité produit donc deux effets très différents :

- Elèvement de la surface libre de la quantité h_c ;
- Rétention d'air ou d'eau.

1-2. — Le problème des nappes souterraines.

Les variations du niveau d'une nappe souterraine peuvent avoir des incidences considérables sur les plans économique, social et humain : (région marécageuse à assainir, irrigation et drainage, conséquences inattendues et souvent fâcheuses d'une remontée de nappe phréatique, etc.). C'est pourquoi la « vie » des nappes souterraines intéresse tout particulièrement les ingénieurs chargés de mettre en valeur une région soit au point de vue agricole, soit au point de vue hydroélectrique. Or il se trouve que, dans ce domaine, les recherches théoriques ont donné et peuvent encore donner des résultats fort intéressants pour résoudre des problèmes réels. Aussi exposerons-nous ici ce côté théorique de l'Hydraulique souterraine en précisant les équations générales de tels écoulements en même temps que les hypothèses adoptées au départ.

1-2-1. — EQUATION DE CONTINUITÉ ET LOI DE DARCY.

L'équation de continuité, ou de la conservation de l'eau, exprime que la quantité d'eau entrant dans un volume géométrique donné est égale à celle qui sort de ce même volume. Facile à établir au sein même de l'écoulement, elle reste plus délicate à exprimer à la surface libre; car l'eau occupe au fur et à mesure de l'écoulement de nouveaux domaines; le pourcentage de vide à remplir par l'eau et contenu dans un volume donné au voisinage de la surface libre intervient alors pour fixer le volume géométrique occupé par un volume d'eau donné. — Ce pourcentage ou rapport est appelé porosité. — Elle dépend donc de l'eau capillaire dans le sol au-dessus de la surface libre.

La loi de DARCY indique la résistance opposée par le milieu poreux à l'écoulement de l'eau. Généralement la vitesse est faible, l'écoulement est alors laminaire (*). La résistance à l'écoulement est proportionnelle au débit, comme l'a trouvé expérimentalement DARCY (fig. 5).

$$\frac{H}{L} = \frac{1}{K} \frac{Q}{S}$$

Q : Débit à travers le milieu poreux;

H : Perte de charge;

S : Section du milieu poreux;

(*) Dans des cas très rares on rencontre néanmoins des écoulements turbulents. Ce cas ne se produit dans les nappes en terrain alluvial que près des puits à fort débit.

FIG. 5

K : Coefficient dépendant du milieu poreux et souvent de la direction de la vitesse; on le désigne sous le nom de coefficient de perméabilité ou simplement « *perméabilité* ».

Ainsi ces deux équations suffisent à déterminer les écoulements souterrains si toutefois on connaît les caractéristiques hydrauliques d'un sol en chacun de ses points, c'est-à-dire sa porosité et sa perméabilité.

1-2-2. — POROSITÉ ET PERMÉABILITÉ.

Pratiquement, ces deux grandeurs dépendent de la grosseur, de la forme et de l'agencement des particules solides constituant le milieu. Comme nous l'avons vu, seule la porosité près de la surface libre intervient dans les écoulements; par ailleurs, nous avons vu aussi que, près de la surface libre, il existe presque toujours des zones contenant simultanément de l'eau et de l'air. La porosité intervenant est alors la porosité effective en eau : m , définie par :

$$m = \frac{\text{volume des vides se remplissant ou se vidant d'eau}}{\text{volume total}}$$

On appelle porosité absolue p le rapport :

$$p = \frac{\text{volume des vides d'un terrain}}{\text{volume total}}$$

On a évidemment $p \geq m$; p n'intervient jamais dans l'hydraulique des milieux poreux.

La porosité effective est presque toujours différente de la porosité absolue. La porosité absolue des terrains naturels est de l'ordre de 15 à 35 %; elle est d'autant plus petite qu'il existe plus de grains ayant des dimensions différentes les uns des autres. En effet, dans un milieu de grains de dimensions à peu près uniforme, on peut diminuer le volume des vides en remplissant partiellement ces derniers par des grains plus fins. La porosité effective varie beaucoup

plus que la porosité absolue. Dans certaines argiles, elle est pratiquement nulle, par contre, elle est égale à la porosité absolue dans certains sols formés uniquement de sables siliceux grossiers. Les sols argileux ont souvent une rétention d'air ou d'eau considérable. Pour faire monter ou descendre le niveau piézométrique d'une nappe, il suffit souvent de boucher quelques vides relativement gros situés au-dessus de la surface libre, ou de déboucher quelques-uns de ces vides dans la zone située en dessous de la surface libre. Ainsi une pluie de quelques centimètres d'eau peut faire monter une telle nappe de plusieurs dizaines de centimètres.

La perméabilité est encore beaucoup plus variable que la porosité, elle varie en gros comme le carré du diamètre « moyen » des grains. La notion de diamètre « moyen » est évidemment sujette à caution dans la plupart des sols naturels composés de particules de dimensions très différentes. Cette notion a donné lieu à de nombreuses recherches et publications. Pratiquement, K varie de 1 à 10^{-8} cm/s.

L'application de lois fondamentales, dans un cas pratique de nappes et de terrains, se heurte en général à de grosses difficultés parce que les sols naturels sont très hétérogènes : ils contiennent des stratifications et des lentilles de terrain de perméabilités très différentes. Ces stratifications et lentilles ont souvent des dimensions relativement petites par rapport aux champs à explorer (1 à 10 m par exemple), en plus elles varient souvent d'une verticale à l'autre. Il pourrait donc paraître impossible a priori de déterminer l'écoulement dans un sol naturel, puisqu'il est impossible de mesurer tous les « accidents », géologiques ou topographiques, du terrain ou d'en tenir compte. En fait, on démontre qu'on peut en général déterminer l'écoulement *moyen* dans une région, en ne tenant compte que d'une porosité et d'une perméabilité moyennes. On néglige alors les phénomènes locaux et il peut exister localement des divergences parfois très grandes entre la réalité et le calcul. Néanmoins, on ne s'intéresse en général qu'aux phénomènes moyens dans une région; c'est-à-dire par exemple au débit moyen à travers une frontière de plusieurs kilomètres de longueur ou à la hauteur moyenne de la nappe sur plusieurs hectares. Dans ces cas, les équations donnent des résultats souvent en bon accord avec la réalité (avec une précision suffisante en pratique).

1-2-3. — HYPOTHÈSES COMPLÉMENTAIRES.

Comme nous l'avons dit, les deux équations indiquées au paragraphe 121 déterminent les écoulements en milieu poreux, mais la résolution

numérique de ces équations reste généralement délicate et donc, économiquement parlant, impossible. C'est pourquoi on est contraint à consentir des hypothèses simplificatrices.

Nous limiterons encore ici le champ de nos investigations en précisant que nous n'étudierons que les écoulements lentement et faiblement variables; ce sont eux d'ailleurs que l'on rencontre le plus souvent. Nous laisserons donc les écoulements rapidement variables, beaucoup plus rares et physiquement encore mal connus par suite du rôle important joué par les phénomènes de rétention capillaire d'air et d'eau et par les phénomènes physico-chimiques.

Les principales hypothèses faites pour l'étude des écoulements des nappes souterraines sont les suivantes :

- a) Les phénomènes de rétention d'air et d'eau et les phénomènes physico-chimiques ne font pas changer la forme des équations, mais seulement la valeur des coefficients m et K ;
- b) La nappe à étudier est, soit en écoulement plan (c'est-à-dire que l'écoulement est partout parallèle à un certain plan vertical et est le même dans tout plan vertical parallèle à ce plan privilégié), soit limitée vers le bas par une couche imperméable horizontale;
- c) Les variations de vitesse et de pression en un point sont petites et l'état de la nappe est voisin d'un état de régime permanent possible;
- d) Dans le cas des nappes non en écoulement plan, ce régime d'équilibre est le repos absolu;
- e) L'épaisseur de la nappe est faible par rapport aux dimensions en plan.

Pratiquement, l'ensemble de ces hypothèses veut dire que les cas étudiés se ramènent aux suivants :

1. Ecoulement plan;
2. Ecoulement non plan, dont la forme est schématisée sur la figure 6.

Des études sur ces questions remontent pratiquement à BOUSSINESQ. La presque totalité des connaissances théoriques acquises à l'heure actuelle se trouve dans le livre de Mme POLUBARINOVA KOTCHINA [1] (*), ainsi d'ailleurs que dans

FIG. 6

ceux de M. MUSKAT [2], TISON [3] et JAEGER [4], etc...

Un grand nombre de problèmes pratiques peuvent ainsi être résolus théoriquement et nous en avons traité un certain nombre qui nous ont confirmé l'excellent accord entre résultats théoriques et réalité. Citons, par exemple :

1° Ecoulements plans permanents :

- a) Nappes d'eau douce et d'eau salée près d'une mer sans marée (fig. 7);

FIG. 7

- b) Lignes d'eau ou « courbes de remous » d'une nappe (fig. 8).

FIG. 8

(*) Les chiffres entre crochets [...] renvoient à la bibliographie qui se trouve à la fin de cet article.

2° Ecoulements plans non permanents :

Baisse brusque d'un niveau (nappe initiale mince) (fig. 9).

FIG. 9

3° Ecoulements à trois dimensions :

Réalimentation : nappe initiale mince et au repos sur une assise imperméable horizontale (fig. 10), etc.

FIG. 10

1-2-4. — L'OBJET DES RECHERCHES EXPOSÉES DANS LA SUITE DE NOTRE ARTICLE.

Notre objet ici est double; comme certaines hypothèses généralement faites ne sont que très rarement vérifiées dans la nature, nous chercherons d'abord à évaluer l'erreur commise en les admettant. Nous nous efforcerons ensuite de traiter certains problèmes avec des hypothèses moins simplificatrices et donc plus en accord avec la réalité ou tout au moins de préciser l'intuition que l'on peut avoir déjà sur certains problèmes.

CHAPITRE II

CONSIDÉRATIONS PRATIQUES SUR LES PROBLÈMES ÉTUDIÉS

Dans le chapitre II nous indiquerons un certain nombre de résultats numériques pouvant être obtenus à partir de méthodes de calculs qui seront exposées dans le chapitre III. Le chapitre II ne contient que des explications à propos des résultats qui seront donnés et quelques justifications élémentaires. L'ensemble des résultats donnés sera justifié plus en détail dans le chapitre III.

2-1. — Hypothèse de Dupuit.

Nous avons vu que les lois régissant ces écoulements sont : la loi de DARCY et l'équation de continuité. La loi de DARCY, telle qu'on la déduit directement des essais au perméamètre, s'écrit :

$$V = \frac{Q}{S} = K \times \frac{H}{L}$$

V : vitesse de filtration,

K : coefficient de perméabilité,

H/L : perte de charge par unité de longueur.

Il se trouve que l'équation de continuité, et la loi de DARCY écrite sous cette forme, ne suffisent pas pour déterminer un écoulement; il faut une troisième équation, que nous allons chercher. La loi de DARCY précise que la charge diminue le long de l'écoulement à cause de la force de frottement que l'eau doit vaincre dans le sol. On peut donc tracer dans chaque écoulement une famille de surfaces sur lesquelles la charge a une valeur constante. Quand le milieu poreux est isotrope, il est à peu près évident que la vitesse ne peut être que perpendiculaire en chaque point à la surface équicharge qui y passe. Cette condition peut tenir lieu de la troisième équation que nous cherchons. L'écoulement est alors parfaitement défini. On peut réunir cette condition, et la loi de DARCY en une seule relation vectorielle (équivalente à 3 relations par projection sur un système d'axes).

$$\vec{V} = -K \vec{\text{grad}} h$$

ou, en projetant sur un système d'axes tri-rectangulaires :

$$u = -K \frac{\partial h}{\partial x} \quad v = -K \frac{\partial h}{\partial y} \quad w = -K \frac{\partial h}{\partial z}$$

u, v, w , composantes de la vitesse de filtration suivant les axes ox, oy, oz .

h : charge hydraulique (rapportée à un plan de référence quelconque). La condition : V perpendiculaire à la surface équicharge, est vérifiée par l'ensemble des essais et mesures faits jusqu'ici en milieu poreux isotrope.

L'équation de continuité s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

ou :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

La loi de DARCY est valable pratiquement dans tous les écoulements de nappes d'eau souterraines, sauf au voisinage des puits d'injection ou de pompage. D'une façon plus exacte, la loi de DARCY est valable si le nombre de REYNOLDS de l'écoulement autour des particules de grandeur « moyenne » du milieu poreux, est inférieur à 2 ou 3.

L'application des équations générales aux écoulements des nappes d'eau souterraines conduit, la plupart du temps, à des problèmes mathématiques qui ne peuvent pas être résolus économiquement dans l'état actuel de nos connaissances mathématiques. On est donc obligé de faire des hypothèses simplificatrices. Une des hypothèses les plus employées dans les écoulements des nappes d'eau souterraines est, comme nous l'avons déjà indiqué, l'hypothèse de DUPUIT. Elle revient à admettre que les composantes verticales des vitesses sont négligeables et que les composantes horizontales sont égales sur chaque verticale. On sait que l'hypothèse de DUPUIT est d'autant meilleure que l'épaisseur de la nappe est plus

faible. Dans ce cas, on peut déduire les équations régissant les écoulements, soit en partant des équations générales et en faisant certaines approximations, soit en raisonnant directement sur un élément prismatique de section infiniment petite et de génératrice verticale (fig. 11). Nous montrerons plus loin comment on peut déduire l'hypothèse de DUPUIT des équations générales. Faisons ici un raisonnement direct.

La loi de DARCY et l'hypothèse de DUPUIT montrent que les vitesses sont proportionnelles aux pentes de la surface libre :

$$u = -K \frac{\partial H}{\partial x} = -K i_{1x}$$

$$v = -K \frac{\partial H}{\partial y} = -K i_{1y}$$

$$\text{ou } \vec{V} = -K \vec{\operatorname{grad}} H$$

H : cote de la surface libre par rapport à un plan horizontal arbitraire.

L'équation de continuité exprime dans ce cas que la montée de la surface libre est proportionnelle au flux d'eau entrant dans le prisme :

$$m \frac{\partial H_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (H_0 u) + \frac{\partial}{\partial y} (H_0 v) = 0$$

H_0 : épaisseur de la nappe.

La loi de DARCY signifie, d'une façon générale, que l'eau coule vers les points où la charge est la plus faible; dans le cas de l'hypothèse de DUPUIT, elle signifie que l'eau coule suivant les lignes de plus grande pente de la surface libre.

Une autre hypothèse qu'on est souvent obligé de faire pour étudier les écoulements dans les nappes d'eau souterraines, est l'hypothèse des « variations suffisamment petites ». En effet, si les variations sont suffisamment petites par rapport à un écoulement connu, on peut simplifier les équations et les rendre « linéaires ». Elles sont alors beaucoup plus facilement intégrables. L'hypothèse des « variations suffisamment faibles » est en général acceptable dans les nappes d'eau souterraines. En effet, les nappes n'ont, en général, pas le temps de varier beaucoup entre deux pluies ou deux montées du niveau des rivières adjacentes. De même, les injections et pompages ne créent des variations de plan d'eau importantes par rapport à l'épaisseur de la nappe que très près des puits. Or, dans le voisinage des puits, l'équation de DARCY n'est, de toute façon, pas valable. On se contente alors d'exclure un certain domaine près des puits et on n'étudie l'écoulement que dans le domaine restant.

FIG. 11

2-2. — Nappes sans écoulement moyen, situées au-dessus d'une assise imperméable horizontale.

La figure 12 montre une telle nappe. Nous nous proposons d'étudier les écoulements qui peuvent se produire dans cette nappe si les conditions aux limites varient tout en restant dans certaines limites (hypothèse des variations relativement petites). Nous ne ferons pas l'hypothèse de DUPUIT, mais au contraire, nous essaierons d'évaluer les erreurs faites en faisant cette hypothèse. Pour ceci nous allons étudier les écoulements d'une telle nappe.

FIG. 12

A priori, il existe une infinité d'écoulements possibles de cette nappe et ces écoulements ont des aspects très différents les uns des autres. Néanmoins, dans le cas particulier des variations restant dans certaines limites, ces écoulements ont un grand nombre de propriétés remarquables et surtout peuvent se ramener à une seule famille d'écoulements. Pour expliquer comment on peut ramener tous ces écoulements à une seule famille, il faut étudier plus en détail leurs propriétés.

La propriété la plus remarquable de ces écoulements est la possibilité de leur superposition ou sommation. On dit qu'un écoulement E_1 est la somme de deux autres écoulements E_2 et E_3 si les charges correspondantes vérifient en chaque point la relation $h_1 = h_2 + h_3$ (on en déduit d'ailleurs la même propriété pour les vitesses). Cette propriété permet de fabriquer de nouveaux écoulements à partir d'un certain nombre d'écoulements connus. La formation d'écoulements nouveaux peut être comparée à la définition de fonctions (périodiques ou non) par des sommes de fonctions sinusoïdales (séries et intégrales de FOURIER). Dans les écoulements étudiés, ce sont les ondes élémentaires qui jouent le rôle des fonctions sinusoïdales des séries de FOURIER. On peut donc considérer chaque écoulement comme une somme d'ondes élémentaires. Dans le cas où l'écoulement est plan, c'est-à-dire le même dans

tout plan vertical parallèle à un plan donné, ces ondes élémentaires sont sinusoïdales dans le temps et sont de la forme indiquée par la figure 13.

$$h = \cos \left(a \frac{z}{H_0} + b \frac{x}{H_0} - \omega t \right) e^{-[a(x/H_0) - b(z/H_0)]}$$

FIG. 13

Elles sont périodiques dans la direction :

$$ax - bz = \text{constante}$$

et décroissent exponentiellement dans la direction :

$$az + bx = \text{constante}$$

Les valeurs a et b sont données par les équations suivantes :

$$2a \sin 2a = 2b \operatorname{sh} 2b$$

et :

$$\frac{2b \sin 2a + 2a \operatorname{sh} 2b}{\operatorname{ch} 2b + \cos 2a} = \frac{2\omega m H_0}{K}$$

Si on pose :

$$\mu = a + jb \quad (j = \sqrt{-1}),$$

les deux équations précédentes sont ramenées à une seule équation entre nombres complexes.

$$\mu \operatorname{tg} \mu = j \frac{\omega m H_0}{K}$$

La figure 14 donne a et b en fonction de $\omega m H_0/K$.

On peut classer les valeurs a et b ou μ (pour $\omega m H_0/K$ donné) suivant les « a » croissants; la $n^{\text{ième}}$ valeur s'appelle alors $\mu_n = a_n + j b_n$; n est l'ordre de l'onde. Plus l'ordre est élevé, plus « a » est grand, donc les ondes successives

FIG. 14. — $2a$ en fonction de $2b$
(cf. fig. 14 a, b, c)

FIG. 14 a. — $2a$ en fonction de $2b$. La courbe donne la fonction exacte, la droite donne l'approximation de Dupuit. La graduation donne les valeurs de $\omega m H_0 / K$
Première onde

FIG. 14 b
Deuxième onde

FIG. 14 c
Troisième onde

FIG. 15

décroissent de plus en plus rapidement suivant $0x$.

Etudions maintenant comment un écoulement quelconque peut être décomposé en ondes élémentaires. Supposons que l'écoulement provienne des variations d'un plan d'eau limitant la nappe. On peut décomposer ces variations dans le temps, en séries ou intégrales de FOURIER. Cette variation est alors une somme de valeurs sinusoïdales. Chaque variation sinusoïdale induit dans la nappe une onde élémentaire. L'écoulement global produit dans la nappe est égal à la somme

des ondes élémentaires produites par les sinusoïdes provenant de la décomposition de la variation du plan d'eau en fonction du temps. Un exemple illustrant ce processus de formation d'un écoulement est schématisé sur la figure 15.

Nous allons maintenant montrer comment on arrive à l'approximation de DUPUIT. On a vu que les ondes décroissent d'autant plus rapidement que leur ordre est plus élevé. On peut donc calculer le rapport des amplitudes des ondes successives supposées égales au départ. On obtient :

$$r = e^{(a_p - a_q)x/H_0}$$

a_p, a_q : valeurs de « a » relatives à la $p^{\text{ième}}$ et à la $q^{\text{ième}}$ onde.

La figure 16 montre r_{pq} en fonction de x/H_0 . Si x est plus grand que H_0 ou $2H_0$, on peut en général se contenter de la première onde, quelle

FIG. 16. — Pour chaque valeur $\omega m H_0/K$, il existe une courbe r_{pq} en fonction de x/H_0 . Les courbes sont toutes comprises entre deux courbes extrêmes, d'où une plage pour chaque r_{pq}

que soit la valeur de $\omega m H_0/K$. On verra au chapitre III que cette approximation peut se traduire par une simplification des équations de départ. Cette simplification est un premier pas vers l'hypothèse de DUPUIT. Pour arriver complètement à cette hypothèse, il faut en outre admettre que la première onde est déterminée par :

$$\mu^2 = j \frac{\omega m H_0}{K}$$

c'est-à-dire confondre $\text{tg } \mu$ avec μ .

Cette hypothèse supplémentaire introduit une nouvelle erreur que nous allons déterminer.

Si a , b et a' , b' désignent respectivement les valeurs exactes et les valeurs approchées de a et b , l'erreur relative la plus grande qui puisse exister en un point, rapportée à la hauteur maximum de l'onde, est donnée par :

$$\varepsilon_1 = e^{-a(x/H_0)} \sqrt{[1 - e^{-(a'-a)x/H_0}]^2 + 4 e^{-(a'-a)x/H_0} \sin^2 \left(\frac{b-b'}{2} \right) \frac{x}{H_0}}$$

L'erreur relative ε_2 rapportée à la valeur maximum de l'onde en ce point est égale à la quantité sous radical.

Si ε_2 est faible (par exemple inférieur à 10 %), on peut écrire :

$$\varepsilon_2 \approx \frac{x}{H_0} \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2}$$

De même, si ε_1 est faible, on peut écrire : $\varepsilon_1 \approx \frac{x}{H_0} e^{-a(x/H_0)} \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2}$

Les figures 17 et 18 montrent ε_1 et ε_2 en fonction de x/H_0 et de $\omega m H_0/K$.

FIG. 17

FIG. 18

Cette deuxième erreur dépend beaucoup de $\omega m H_0/K$, contrairement à la première.

En résumé, en faisant l'hypothèse de DUPUIT, on fait donc deux erreurs de nature très différente.

a) On néglige les ondes d'ordre supérieur. Il n'y a alors plus qu'une seule onde et la dimension oz n'intervient plus. En effet, la répartition des vitesses et des charges de long de l'axe oz est déterminée pour chaque onde : le problème se ramène à deux dimensions. En fait, pour x inférieur à H_0 , les ondes d'ordre supérieur interviennent toujours et le phénomène est bien à trois dimensions et non pas à deux dimensions comme l'admet l'hypothèse de DUPUIT.

b) On admet que :

$$a = b = \sqrt{\omega m H_0/2 K}$$

Ceci n'est valable que si $\omega m H_0/K$ est suffisamment petit.

FIG. 19. — Exemples de nappe

Nous avons étudié jusqu'ici les écoulements plans, on peut également étudier d'autres écoulements relatifs à d'autres cas de nappes (fig. 19).

Parmi ces écoulements, les plus simples sont les écoulements de révolution. La figure 20 montre des formes de surface libre dues à certaines ondes élémentaires dans ce cas.

Revenons au cas général. Comme nous l'avons vu, les écoulements non périodiques peuvent être décomposés en ondes élémentaires. L'erreur b si-

FIG. 20 a. — Allure des ondes de révolution pour $\omega m H_0/K = 0,2$

FIG. 20 b. — Allure des ondes cylindriques pour $\omega m H_0/K = 4,0$. La première ondulation négative n'est déjà plus perceptible

gnalée plus haut n'est alors pas constante pour toutes les ondes composant un écoulement. Cette erreur est d'autant plus grande que la fréquence relative à cette onde est plus grande. Mais comme les ondes décroissent d'autant plus rapidement que leur fréquence est grande, l'hypothèse de DUPUIT est en général quand même valable à une certaine distance de la frontière d'où provient l'écoulement. Le milieu poreux fonctionne comme un « filtre à ondes » qui ne laisse passer que les basses fréquences. Il convient néanmoins de faire une étude particulière et sommaire dans chaque cas.

2-3. — Ecoulement d'une nappe sur une assise imperméable inclinée.

On peut raisonnablement admettre que les erreurs dues à l'hypothèse de DUPUIT sont à peu près les mêmes pour une nappe coulant sur une assise imperméable inclinée que pour une nappe située au-dessus d'une assise imperméable horizontale. Nous emploierons donc l'hypothèse de DUPUIT. Dans ce cas, les équations de base se ramènent à l'équation de la chaleur avec convection. On peut alors étudier un certain nombre d'écoulements pouvant se produire dans une telle nappe. A titre d'exemple, nous indiquons ici l'écoulement produit par un pompage ou une injection quasi ponctuelle, de débit constant et démarré au temps $t = 0$. La cote de la surface libre est alors donnée par les équations (*) :

$$\mathcal{H} = e^{\xi} f(\varphi, \tau)$$

$$f(\varphi, \tau) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-\alpha \rho} \frac{d\alpha}{\sqrt{x^2 - 1}} & \tau < \varphi \\ K_0(\varphi) & \tau = (\varphi) \\ K_0(\varphi) + \int_1^{1/2(\rho/\tau + \tau/\rho)} e^{-\alpha \rho} \frac{d\alpha}{\sqrt{x^2 - 1}} & \tau > \varphi \end{cases}$$

$$\text{Pour : } \tau \rightarrow \infty \quad f(\varphi, \tau) \rightarrow 2 K_0(\varphi)$$

Dans ces équations :

$$\mathcal{H} = \frac{4 \pi K H_0}{Q_0} h$$

$$\xi = \frac{U_0 x}{2 H_0 K} = \frac{x i}{2 H_0}$$

(*) Les notations employées ici sont celles définies dans [5].

$$\eta = \frac{U_0 y}{2 H_0 K} = \frac{y i}{2 H_0}$$

$$\varphi^2 = \xi^2 + \eta^2$$

$$\tau = \frac{U_0^2 t}{2 H_0 K m} = \frac{K i^2}{2 H_0 m} t$$

x, y : coordonnées sur la surface de la terre (plan horizontal) et définissant un point;

K : perméabilité;

m : porosité;

i : pente de la nappe;

U_0 : vitesse moyenne de la nappe au repos;

h : cote de la surface libre par rapport à la nappe au repos.

La cote de la surface libre par rapport à un plan de référence horizontal est donnée par :

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} - \frac{8 \pi K H_0}{Q_0} \xi$$

La figure 21 montre un certain nombre de « cartes » de $\mathcal{H}$ en fonction de x et y pour différentes valeurs de t . Ces quelques « cartes » montrent plusieurs faits intéressants; en particulier, elles montrent que les nappes dont la vitesse d'écoulement est relativement faible ont le « temps de mise en régime » excessivement long qui peut souvent dépasser 50 ou 100 ans en pratique. Jusqu'à présent, on ne calculait les régimes transitoires que pour des nappes sans vitesse moyenne d'écoulement. Dans ce cas il n'existe pas de régime d'équilibre, donc pas de « temps de mise en régime ».

La figure 22 montre les cartes de $\mathcal{H}_1$. Sur ces cartes, on voit l'écoulement des filets d'eau. La distorsion des filets provoqués par la présence d'un puits ne se fait sentir en général que très près du puits, alors que les relèvements ou abaissements de la nappe sont en général appréciables beaucoup plus loin. Dans le cas des régimes permanents, les lignes de courant sont très voisines de celles d'un écoulement en charge (nappe artésienne).

A partir des formules mentionnées plus haut, on peut traiter un grand nombre d'écoulements. Ainsi les figures 23 a et 23 b montrent un écoulement permanent dans une nappe limitée soit par une montagne, soit par une rivière. On voit l'influence importante que peut avoir une telle frontière. Pratiquement, ces écoulements sont obtenus par superposition d'images (fig. 24). On peut évidemment de même obtenir l'écoulement d'une nappe dans laquelle il existe plusieurs puits à débit constant ou non. Si le débit n'est pas constant, on le décompose en variations brusques (dit « échelons ») (fig. 25). Le nombre

FIG. 21-1

FIG. 21-2

FIG. 21-3

FIG. 21-4

FIG. 21-5

FIG. 21-6

FIG. 22-1

FIG. 22-3

FIG. 22-2

d'échelons à prendre dépend de la précision que l'on désire obtenir. La figure 26 montre une coupe d'une nappe dans laquelle on a fait une injection de durée limitée (régime avec deux variations brusques en sens inverse). A ce propos, nous nous permettons de rappeler la différence très grande qui existe entre les écoulements dans les nappes d'eau souterraines et les écoulements de l'air libre. Dans les nappes d'eau souterraines, il ne peut pas exister d'onde à front raide, ni surtout d'onde se déplaçant en sens inverse de leur pente. En effet, l'eau coule toujours dans le sens de la pente. A l'air libre, l'injection d'un débit de durée limitée aurait donné lieu à des « ronds dans l'eau », ce qui montre la différence essentielle entre les deux sortes d'écoulement : écoulement avec et sans inertie de l'eau.

Par ailleurs, on peut assez facilement expliquer diverses particularités des écoulements dans une nappe coulant sur assise imperméable inclinée en étudiant une injection ponctuelle de très courte durée. Dans ce cas on obtient une remon-tée donnée par :

$$h = \frac{V_0}{4 \pi K H_0 t} e^{-\frac{[x - (U/m) t]^2 + l^2}{4 (H_0 K/m) t}}$$

V_0 étant le volume d'eau injecté et les autres notations analogues à celles déjà employées dans ce paragraphe.

FIG. 23 a

FIG. 24

FIG. 23 b

FIG. 25

FIG. 26

La remontée affecte donc la forme d'un « chapeau » de GAUSS (surface de révolution dont la méridienne est une courbe « en cloche » de GAUSS). Ce « chapeau » s'étale dans le temps et en outre il « glisse » sur la pente de la surface libre avec la vitesse vraie de l'eau : on peut considérer une injection continue, débutant au temps

$t = 0$, comme la somme d'une grande quantité d'injections de courte durée très rapprochées les unes des autres. Si l'injection est de courte durée, les « chapeaux » n'ont pas le temps de « glisser » et tout se passe comme si la pente était nulle. Par contre, si l'injection dure longtemps, les « chapeaux » ont le temps de glisser très

FIG. 27

loin et l'existence de la pente est très importante. Il y a évidemment un autre facteur important, c'est le rapport entre la vitesse de « glissement » et la vitesse d'« étalement » des chapeaux. Selon le cas, la pente déforme peu ou beaucoup la symétrie de révolution due au puits. Il est intéressant d'étudier dans ce sens les figures 25 par exemple.

2-4. — Nappes de grande épaisseur.

On a vu que l'approximation de DUPUIT n'était valable que si $\omega m H_0/K$ était petit. Si, au contraire, cette grandeur est très grande, on peut employer une autre approximation que nous appellerons « approximation de nappes de grande épaisseur », par opposition à l'approximation de DUPUIT qui est valable pour les nappes de faible épaisseur. Nous avons déjà vu que, dans le cas où $\omega m H_0/K$ est grand, les ondes ne pénètrent pratiquement pas dans le domaine dans lequel x est plus grand que H : les ondes ont été filtrées à l'avance par le milieu poreux. Pour x inférieur à H_0 , on peut admettre que $\omega m H_0/K$ est infiniment grand, ce qui revient à admettre que H_0 est infiniment grand devant $K/m\omega$. On obtient alors une image assez bonne des phénomènes ayant lieu près des limites de la nappe. En particulier, on peut étudier l'effet des variations

de plans d'eau touchant la nappe : marées, abaissments et exhaussements de plans d'eau. Ainsi on trouve l'onde de marée dans une nappe (fig. 27).

On voit que cette onde est apériodique. Dans les cas pratiques, c'est-à-dire avec les valeurs habituelles de ω , H , m et K , la théorie ($\omega m H_0/K$) $\neq \infty$ s'applique très bien aux phénomènes produits par la marée. L'approximation de DUPUIT n'a aucun sens dans ce cas.

De même, on peut facilement trouver l'onde produite par un exhaussement brusque du plan d'eau. Cette onde est donnée par la figure 28. On y voit la différence entre $\omega m H_0/K$ petit et grand. Dans le cas d'un exhaussement ou abaissement brusque, la théorie des nappes à grande épaisseur traduit assez mal ce qui se passe pour :

$$t > \frac{2\pi m H_0}{K}$$

Les applications les plus importantes de cette théorie sont fournies par les efforts sur les ouvrages situés près des limites des nappes et dus aux écoulements. Ainsi, on peut déterminer les surpressions dues à la marée sur les murs de quai. La figure 29 montre la résultante générale et le moment des efforts sur le mur schématisé sur la figure 30. On voit que les efforts dépendent de $\omega m a/K$. Si $(\omega m a/K) > 3$, les efforts sont

FIG. 28

FIG. 29-1. — Résultante générale des efforts d'une marée sur le mur fig. 30 : on a porté en rayon vecteur la grandeur $F/\omega H_0 a$ et en angle polaire le déphasage entre la marée et la force, c'est-à-dire le temps s'écoulant entre les maxima de la marée et de la force divisée par la période de la marée

FIG. 29-2. — Moment des efforts par rapport à l'intersection du mur et du niveau moyen de la mer. Le moment est rapporté à $\omega H_0 a^2$

relativement constants en amplitude. En effet, la perméabilité est trop petite pour permettre une variation importante du niveau de la nappe. Par contre, si $(\omega m a/K) < 3$, la perméabilité permet dans une certaine mesure une variation du niveau de la nappe, qui contrebalance la variation du plan d'eau libre. Le maximum de la courbe $F(\omega m a/K)$ s'explique par le déphasage entre les variations de charge, déphasage dû au frottement visqueux de l'eau dans le sol. Ainsi pour $(m \omega a/K) = 4$ ou 5, les variations de niveau sont encore sensibles dans les nappes mais très en retard sur celles du plan d'eau libre. Ainsi quand le plan d'eau libre est très bas, le niveau dans la nappe est au contraire très haut.

Dans le cas général, ces efforts sont assez compliqués à déterminer. Leur détermination n'est simple que si les dimensions de l'ouvrage sont telles que les nombres sans dimension $\omega m L/K$ sont plus grands que 2 ou 3 (fig. 30). Dans ce cas, on peut valablement faire l'approxi-

mation admettant que les surélévations de la nappe sont négligeables même près des ouvrages, et on peut calculer les efforts sur de nombreux types d'ouvrages. Les figures 31 et 32 donnent quelques exemples.

L'ensemble de ces figures montre :

1. Que seuls les phénomènes au voisinage des ouvrages interviennent pour déterminer la grandeur des efforts; le voisinage ayant les dimensions de l'ouvrage même;

2. Que les forces sont toujours de l'ordre de :

$$1/2 \text{ à } 1 \times \omega H_0 S,$$

les moments de :

$$1/4 \text{ à } 1/2 \times \omega H_0 L S,$$

S étant la surface de la projection de l'ouvrage sur un plan perpendiculaire à F , et L la longueur correspondant au moment. Ces conclusions sont d'ailleurs assez intuitives.

On peut de même calculer les efforts sur les ouvrages dans le cas d'exhaussements ou d'abaissements brusques, quoique la théorie cesse d'être valable quand $t > (2\pi m H_0/K)$. La figure 33 donne ces efforts dans le cas du mur de quai schématisé sur la figure 30.

On peut aussi étudier avec l'approximation des nappes de grande épaisseur d'autres écoulements tels que ceux produits par la surélévation d'une nappe due à une pluie.

2-5. — Conclusions du chapitre II.

Nous avons essayé, dans ce chapitre, de donner des exemples chiffrés pouvant être tirés des méthodes de calculs qui seront exposées dans le chapitre III. D'autres exemples pourraient être indiqués. La plus grosse difficulté néanmoins est d'expliquer physiquement les résultats obtenus.

FIG. 30

FIG. 31-2

FIG. 31-1

FIG. 31-3

FIG. 32-1

FIG. 32-2

FIG. 33

Récapitulons ici rapidement les résultats généraux les plus importants.

a) Les écoulements dans les nappes d'eau souterraines peuvent en général être considérés comme étant à deux dimensions quand on est à une distance plus grande que l'épaisseur de la nappe des frontières ou des « accidents » importants de la nappe;

b) L'hypothèse de DUPUIT est valable dans la région où la nappe peut être considérée comme étant à deux dimensions. En toute rigueur, la fréquence de l'écoulement, ou, d'une façon générale, la rapidité des variations de l'écoulement devrait être petite. En fait, si cette condition n'est pas remplie, l'écoulement ne se fait pratiquement pas sentir dans la zone où l'approximation de DUPUIT serait valable;

c) Dans une nappe possédant une vitesse moyenne non nulle, les phénomènes transitoires

peuvent être schématisés en les découpant en impulsions infiniment minces et en admettant que chaque impulsion donne naissance à un « chapeau de GAUSS » qui est emporté avec la vitesse moyenne de l'eau. On peut par cette méthode étudier un certain nombre d'écoulements nouveaux. La présence d'une pente même faible est souvent importante. Des phénomènes entièrement nouveaux apparaissent, comme les régimes d'équilibre de pompage ou d'injection;

d) Dans la région où l'approximation de DUPUIT n'est pas valable, on peut souvent admettre que la nappe a une profondeur infinie et on peut calculer localement les écoulements avec cette hypothèse; en particulier, on peut déterminer de cette façon les efforts sur les ouvrages situés près des limites des nappes.

L'ensemble des justifications, assertions et résultats énoncés dans le chapitre II se trouve dans le chapitre III.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] POLUBARINOVA-KOTCHINA. — *Écoulement des eaux souterraines* (livre écrit en russe).
- [2] MUSKAT. — *Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*. Editeur: McGraw Hill Book Cy, New-York et Londres, 1937.
- [3] TISON. — *Hydraulique*, tome II, Gand.
- [4] JAEGER. — *Hydraulique technique*. Traduction de Mme LARONDE, chez Dunod, 1954.
- [5] JAHNKE-EMDE. — *Tables of functions with formulae and curves*. Editeur: Dover Publication, New-York, 1945.