NOTULE HYDRAULIQUE
HYDRAULIC BRIEFS

Débit d'infiltration sous un rideau de palplanches

Discharge percolating under a sheet pile cut-off wall

Des considérations géométriques permettent d'obtenir l'expression analytique du réseau d'infiltration sous un rideau de palplanches, dans le cas d'un écoulement permanent plan. On en déduit une formule pour le calcul du débit d'infiltration. Les résultats numériques sont donnés sous forme d'abaque cartésien.

Goemetrical considerations allow an analytical expression to be obtained from the flow net of percolation under a sheet pile cut-off wall, in the case of plane steady flow. A formula is derived for calculating the infiltration discharge. The numerical results are given in the form of Cartesian curves.

Nous nous proposons de calculer le débit d'infiltration sous un rideau de palplanches, dans le cas d'un écoulement permanent plan dans un milieu poreux, homogène et isotrope.

Une solution générale de ce problème a été publiée dans *la Houille Blanche* par M. SAUVAGE DE SAINT-MARC [1]; à dessein, l'auteur n'avait fait appel qu'à la géométrie des transformations conformes, afin de dégager une méthode du tracé de ces réseaux d'infiltration sous une palplanche ou plus généralement sous un barrage. Nous voulons ici reprendre la question, limitée cependant aux infiltrations sous un rideau de palplanches, mais en explicitant les transformations conformes dans leurs expressions analytiques.

1. — RAPPEL DE NOTIONS FONDAMENTALES

Suivant les conventions généralement admises, nous poserons :

$$\Phi = -\lambda h = -\rho\left(\frac{P}{\rho g} + y\right)$$

λ étant le coefficient de perméabilité, h la charge hydraulique, P la pression hydrostatique, ρ la masse spécifique de l'eau, et y la cote du point considéré, comptée sur une verticale ascendante. La loi de DARCY s'écrit alors :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$$

On voit que l'écoulement va dans le sens des Φ croissants.

L'équation de continuité :

$$\text{div}\,\vec{V} = 0$$

nous donne :

$$\Delta\,\Phi = 0$$

Le potentiel des vitesses $\Phi\,(x, y)$ est donc une fonction harmonique. Nous désignerons par $\Psi\,(x, y)$ la fonction harmonique associée à Φ.

L'écoulement sera représenté dans le plan (x, y) par les courbes orthogonales d'équations : $\Phi\,(x, y) = C^{te}$ (équipotentielles);
et $\Psi\,(x, y) = C^{te}$ (lignes de courant), qui constituent un réseau isotherme.

Le long d'une équipotentielle d'abscisse curviligne s, on a :

$$V = \frac{d\,\Psi}{ds}$$

On en déduit que, le long d'un tube de courant limité par les lignes de courant de cotes Ψ_1 et Ψ_2, le débit est constant et égal à :

$$\Delta \Psi = \Psi_2 - \Psi_1$$

Un réseau isotherme est caractérisé par une équation de la forme :

$$Z = f(z)$$

avec $Z = \Phi + i\Psi$, c'est le potentiel complexe, et $z = x + iy$, c'est la variable complexe du plan sur lequel on représente le réseau.

Nous allons chercher cette équation dans le cas qui nous occupe.

2. — Equation du réseau

Le réseau à étudier R est schématisé figure 1. Nous commencerons par construire le réseau ré-

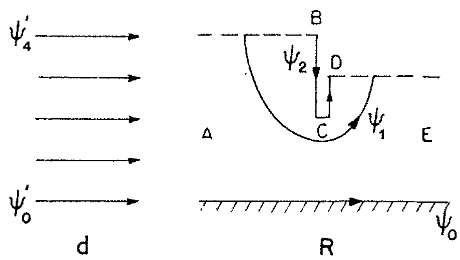

Fig. 1

ciproque r (*). Géométriquement, nous définissons le réciproque comme le réseau obtenu en appliquant, à un damier d, la transformation conforme qui fait passer du réseau R à un damier D.

Si $Z = f(z)$ est l'équation du réseau R, la transformation conforme $R \rightarrow D$ s'exprime par le changement de variable :

$$z_1 = f(z) \qquad \text{ou} \qquad z = F(z_1)$$

F étant la fonction inverse de f.

Appliquée au damier d du plan z :

$$Z = z$$

cette transformation donne comme équation du réciproque r dans le plan z_1 :

$$Z = F(z_1) \qquad \text{ou} \qquad z_1 = f(Z)$$

Pratiquement on conserve la variable z, et le passage au réciproque r s'opère par une permutation de Z et z dans l'équation du réseau R.

La transformation $R \rightarrow D$ fait correspondre, à la totalité du réseau R, un rectangle A E D B. Le contour B C D se transforme en un des côtés du rectangle, porté par la ligne de courant correspondante de D. Les lignes de courant de r, qui correspondent à celles du damier d, partent du sommet A et aboutissent au sommet E du rectangle, ces deux sommets étant les homologues des régions à l'infini du réseau R. On détermine sans peine l'allure de ces lignes en étudiant la position relative des lignes de courant de d et R (fig. 2).

En complétant r par symétrie, on obtient un réseau comportant deux sources S_1, S_2 et deux puits P_1, P_2 situés aux sommets d'un rectangle. S_1 et P_1 ont le même débit : Q_1; S_2 et P_2 ont le même débit : Q_2; Q_2 et Q_1 sont différents; ceci provient de ce que la couche perméable a des épaisseurs différentes de part et d'autre de la palplanche. On peut alors décomposer r en séparant S_1, P_1 et S_2, P_2 : on obtient les réseaux r_1 et r_2 qu'il faut superposer pour obtenir r (fig. 3).

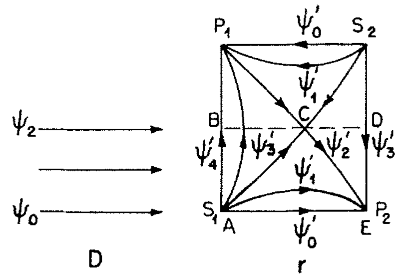

Fig. 2

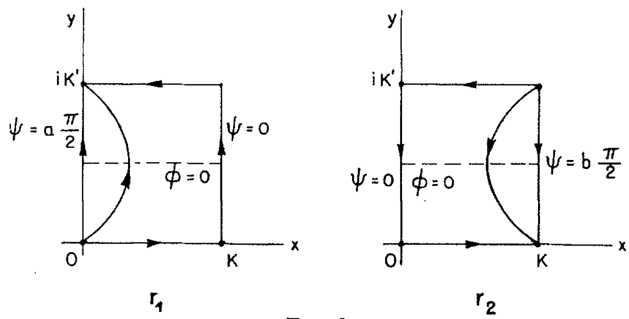

Fig. 3

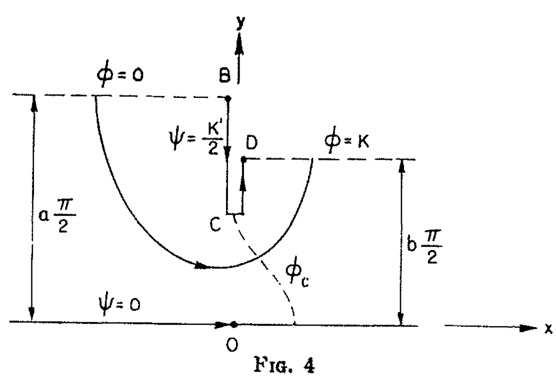

Fig. 4

(*) Voir, par exemple, à ce sujet, l'article cité de M. Sauvage de Saint-Marc [1].

Mais r_1 est un réseau connu dont l'équation peut s'écrire (voir par exemple [2], p. 279) :

$$Z = a \log \left[\sqrt{k}\, \mathrm{sn}\, z\right]$$

Une rotation de π autour de 0, puis une translation nous donnent l'équation de r_2 :

$$Z = b \log \left[\sqrt{k}\, \mathrm{sn}\, (K + i\,K' - z)\right]$$

En superposant r_1 et r_2, puis en permutant Z et z, on obtient finalement l'équation du réseau étudié (fig. 4) :

$$z = a \log \left[\sqrt{k}\, \mathrm{sn}\, Z\right] + b \log \left[\sqrt{k}\, \mathrm{sn}\, (K + i\,K' - Z)\right] \qquad (1)$$

3. — Calcul du point le plus bas de la palplanche

Sur le contour B C D on a :

$$\Psi = K'/2$$

En portant cette valeur dans l'équation (1), il vient :

$$y = a\,\alpha + b\,\beta$$

avec :

$$\alpha = \mathrm{Arc\,tg}\, \frac{\mathrm{cn}\,\Phi\, \mathrm{dn}\,\Phi}{(1+k)\,\mathrm{sn}\,\Phi}; \qquad \beta = \mathrm{Arc\,tg}\, \frac{(1-k)\,\mathrm{sn}\,\Phi}{\mathrm{cn}\,\Phi\, \mathrm{dn}\,\Phi}$$

Pour obtenir le minimum de y, il faut calculer la racine de sa dérivée par rapport à Φ. En désignant par Φ_c la cote de l'équipotentielle qui passe au point C, on arrive à :

$$\mathrm{sn}\,\Phi_c = \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{1-d}{1+d}}$$

avec :

$$d = \sqrt{\frac{b}{a}\, \frac{1-k}{1+k}}$$

Connaissant sn Φ_c, on calcule facilement cn Φ_c

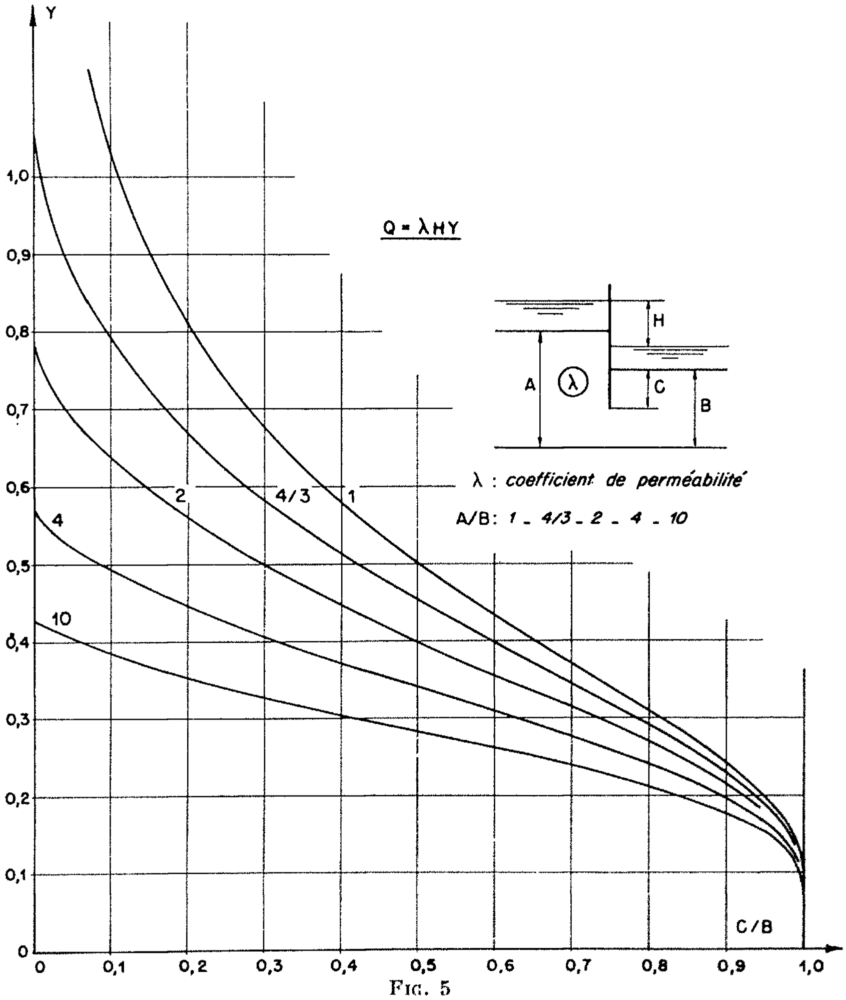

FIG. 5

et dn Φ_c et finalement on obtient l'ordonnée du point C :

$$\frac{y_c}{b}=\frac{a}{b}\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{k_1}\sqrt{\frac{1-(a/b)\,k_1}{(a/b)-k_1}}$$

$$+\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{k_1}\sqrt{\frac{(a/b)-k_1}{1-(a/b)\,k_1}} \quad (2)$$

avec :

$$k_1=\frac{1-k}{1+k} \qquad \frac{b}{a}\geqslant k_1$$

ou :

$$\frac{y_c}{b}=\frac{a}{b}\operatorname{Arc\,tg} u+\operatorname{Arc\,tg} v \quad (2)$$

avec :

$$u=\sqrt{k_1}\sqrt{\frac{1-(a/b)\,k_1}{(a/b)-k_1}} \quad \text{et} \quad v=k_1/u$$

4. — Débit d'infiltration

D'après ce que nous avons vu au paragraphe 1, le débit Q est égal à la variation totale de Ψ :

$$Q=\Delta\,\Psi=\frac{K'(k)}{2}$$

D'autre part, on a :

$$\Delta\,\Phi=\lambda\,H=K\,(k)$$

H étant la charge hydraulique sur la couche perméable.

Nous écrivons donc :

$$\frac{Q}{\lambda\,H}=\frac{K'(k)}{2\,K\,(k)}$$

ou, en posant : $k_1=\dfrac{1-k}{1+k}$

comme nous l'avons fait précédemment :

$$\frac{Q}{\lambda\,H}=\frac{K\,(k_1)}{K'\,(k_1)} \quad (3)$$

Il s'agit d'étudier la variation de K/K', en fonction des paramètres du réseau : a/b et y_c/b.

Pour chaque valeur de a/b, on calcule y_c/b à partir d'une valeur de $k_1 \leqslant b/a$. Les tables d'intégrales elliptiques donnent ensuite les valeurs de K/K'.

Les courbes de la figure 5 représentent la variation de $Q/\lambda\,H$ en fonction de :

$$\frac{C}{B}=1-\frac{2}{\pi}\frac{y_c}{b}$$

pour différentes valeurs de :

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$$

Les résultats que nous venons d'exposer permettent aussi le calcul de la perte de charge le long de la palplanche, qui intervient dans l'étude de la formation des renards. Ce calcul fera l'objet d'une prochaine publication.

QUELQUES INGÉNIEURS
du Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique Neyrpic.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. SAUVAGE DE SAINT-MARC. — Ecoulement en milieu poreux. Fuites sous les barrages. *La Houille Blanche*, n° 2, 1947, pp. 126-134.
Commentaires et discussions. *La Houille Blanche*, n° 5, 1947, pp. 417-418.

[2] A. BETZ. — Konforme Abbildung. *Springer*, Berlin, 1948.