NOTULE HYDRAULIQUE
HYDRAULIC BRIEFS

A propos de l'onde solitaire d'amplitude finie

On the solitary wave of finite amplitude

It is shown that the equation to the profile of the solitary wave and the velocity of propagation can be obtained by a convenient process of successive approximation without determining the velocity potential throughout the plane of flow. The method employs an operational form of the free surface condition given by LEVI-CIVITA *(1911). The wave profile and velocity are found to the third order in the ratio* a/h, *a being the wave amplitude and* h *the undisturbed depth. For small values of this ratio the solution reduces to that of* BOUSSINESQ. *The velocity equation is in good agreement with measurements reported by* DAILY *and* STEPHAN *(1953).*

Cette note montre que l'équation correspondant au profil de l'onde solitaire et à sa célérité, peut être obtenue par une méthode particulière d'approximations successives sans qu'il soit nécessaire de déterminer le potentiel des vitesses dans l'ensemble du plan de l'écoulement. La méthode utilise une forme opérationnelle de la condition à la surface libre donnée par LEVI-CIVITA *(1911). Le profil de l'onde et sa célérité sont données au 3e ordre en* (a/h), a *étant l'amplitude de l'onde et* h *la hauteur d'eau non perturbée. Pour les petites valeurs de ce rapport, la solution se ramène à celle de* BOUSSINESQ. *L'équation de la célérité est en bon accord avec les résultats de mesures publiés par* DAILY *et* STEPHAN *(1953).*

I.—Introduction

An interesting problem in the theory of gravity waves concerns the form of the solitary wave of finite amplitude which can be propagated without change of shape in a channel of constant depth. The first approximation is necessarily non-linear, in contrast to the theory of periodic waves. For periodic waves whose length is not appreciably greater than the depth, the first approximation for small values of a/λ is found from the linear theory, while for long periodic waves URSELL (1953) has demonstrated that the first approximation is linear only when :

$$a\,\lambda^2/h^3 \leqslant 1.$$

In the present paper the exact free surface conditions are employed in a form derived by LEVI-CIVITA (1911 and 1924), and used by WEINSTEIN (1926) in considering the velocity of

I. — Introduction

L'un des problèmes intéressant de la théorie des ondes de gravité concerne la forme de l'onde solitaire d'amplitude finie qui peut se propager dans un canal de profondeur constante en conservant son profil. La première approximation est nécessairement non linéaire contrairement à la théorie des ondes périodiques. Pour les ondes périodiques dont la longueur n'est guère plus grande que la profondeur, la théorie linéaire donne une première approximation dans le cas des petites valeurs de a/λ, alors que pour les ondes périodiques plus longues, URSELL a démontré (1953) que la première approximation n'est linéaire que si : $a\,\lambda^2/h^3 \leqslant 1$.

Dans le présent article, nous adopterons les conditions exactes à la surface libre telles qu'elles ont été dégagées par LÉVI-CIVITA (1911 et 1924), et exploitées par WEINSTEIN (1926), dans l'étude de la célérité de l'onde solitaire. Le profil the solitary wave. The solution for the wave profile and the velocity of propagation may then be obtained by successive approximation and are here evaluated to the third order in the ratio of the wave amplitude to the undisturbed depth. For very small values of this ratio the solution reduces to that obtained by BOUSSINESQ (1872). The comparative simplicity of the method is due to the fact that we seek only the solution along the free surface and not the velocity potential throughout the entire plane of flow as would be necessary when determining the particle velocities. To the third order the results indicate that the relative amplitude a/h of the highest solitary wave is 0.92. The expression for the velocity of propagation is in good agreement with measurements recently reported by DAILY and STEPHAN (1953), although it differs from the first order solution by only 2 % when $a/h = 0.92$ and by 0.6 % when $a/h = 0.5$.

II.—The Equations of Motion

We consider the two-dimensional motion of a fluid which is regarded as incompressible and frictionless. The motion is then reduced to rest by the addition of a constant velocity $-c$ to the flow, c being the velocity of wave propagation. Cartesian coordinates $Ox\ Oy$ are chosen so that the origin is in the bed of the channel beneath the wave crest with the axis Oy vertically upwards.

The complex velocity $w = u - iv$ is obtained from the velocity potential φ^* and the stream function ψ^* by the relation :

$$w = \frac{df^*}{dz} \qquad (1)$$

where :

$$f^* = \varphi^* + i\,\psi^*$$

and :

$$z = x + iy$$

If we choose ψ^* to be zero on the bed $y = 0$, then on the free surface $y = y_l$ we have :

$$\psi^* = ch$$

h being the undisturbed depth of water. Now writing :

$$f^* = chf \qquad \text{and} \qquad f = \varphi + i\,\psi,$$

the free surface is given by :

$$\psi = 1$$

de l'onde et sa célérité peuvent alors être obtenus par approximations successives, et nous les calculerons au troisième ordre en (a/h), rapport entre l'amplitude de l'onde et la profondeur d'eau non perturbée. Pour les très petites valeurs de ce rapport, la solution se ramène à celle obtenue par BOUSSINESQ (1872). La simplicité relative de la méthode provient de ce que nous recherchons seulement la solution le long de la surface libre et non le potentiel de vitesse dans l'ensemble du plan de l'écoulement ainsi qu'il serait nécessaire pour déterminer la vitesse des particules. Au troisième ordre d'approximation, les résultats montrent que l'onde solitaire la plus haute a pour amplitude relative a/h : 0,92. L'expression de la célérité est en bon accord avec les mesures récemment publiées par DAILY et STEPHAN (1953); cependant, elle diffère de la solution au premier ordre de 2 % seulement lorsque $a/h = 0{,}92$, et de 0,6 % lorsque $a/h = 0{,}5$.

II. — Les équations de mouvement

Nous considérons le mouvement à deux dimensions d'un fluide qui est supposé incompressible et parfait. Le mouvement peut être annulé en ajoutant une vitesse constante $-c$ à l'écoulement, c étant la célérité de l'onde. Les coordonnées rectangulaires $Ox\ Oy$ sont choisies de telle sorte que l'origine se trouve sur le fond du canal sous la crête de l'onde, Oy étant vertical vers le haut.

La vitesse complexe $w = u - iv$ s'obtient à partir du potentiel des vitesses φ^* et de la fonction de courant ψ^* par la relation :

$$w = \frac{df^*}{dz} \qquad (1)$$

dans laquelle :

$$f^* = \varphi^* + i\,\psi^*$$

et :

$$z = x + iy$$

Si nous choisissons ψ^* de telle sorte qu'elle soit nulle au fond du canal ($y = 0$), nous aurons à la surface libre ($y = y_l$) :

$$\psi^* = ch$$

h étant la hauteur d'eau non perturbée. Si maintenant nous écrivons :

$$f^* = chf \qquad \text{et} \qquad f = \varphi + i\,\psi$$

la surface libre est donnée par :

$$\psi = 1$$

Using the change of variable introduced by LEVI-CIVITA (1924) :

$$w = ce^{-i\omega} \qquad \omega = \theta + i\,\tau \tag{2}$$

we need to solve for $\omega\,(f)$ in the region $o \leqslant \psi \leqslant 1$ subject to the boundary conditions:

$$\theta = 0 \qquad \text{on} \qquad \psi = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d\,\tau}{d\,\varphi} + p\,e^{-3\tau}\sin\theta = 0 \qquad \text{on} \qquad \psi = 1 \tag{4}$$

where :

$$p = gh/c^2 \tag{5}$$

Equation (4) is the usual condition of constant pressure along the free surface expressed in terms of the new variable $\omega = \theta + i\,\tau$. The condition that the free surface shall be the stream line $\psi = 1$ can be written in the operational form (LEVI-CIVITA, 1911).

$$\omega\,(\varphi + i) = i\,e^{i\mathrm{D}}\,\tau_0 \tag{6}$$

where :

$\omega = i\,\tau_0$ on $\psi = 0$ and D denotes $d/d\,\varphi$.

Separating this equation into real and imaginary parts and eliminating τ_0 we have :

$$\tau = -\cot \mathrm{D}\,\theta \tag{7}$$

on $\psi = 1$.

The surface conditions are thus :

$$\mathrm{D}\,\tau = -\,p\,e^{-3\tau}\sin\theta \tag{8}$$

and :

$$\mathrm{D}\,\tau = -\,\mathrm{D}\cot\mathrm{D}\,\theta \tag{9}$$

III.—Solution by Successive Approximations

Equation (9) may be integrated by successive approximations by regarding τ as small throughout the region of flow. We replace :

$$\mathrm{D} = (d/d\,\varphi) \qquad \text{by} \qquad (d\,\tau/d\,\varphi)\,(d/d\,\tau),$$

and substitute the value of $(d\,\tau/d\,\varphi)$ from equation (8). To the first approximation equations (8) and (9) become :

$$\frac{d\,\tau}{d\,\varphi} = -\,\theta + \frac{1}{3}\,\frac{d\,\tau}{d\,\varphi}\,\frac{d}{d\,\tau}\left(\frac{d\,\tau}{d\,\varphi}\,\frac{d\,\theta}{d\,\tau}\right) \tag{10}$$

and :

$$\frac{d\,\tau}{d\,\varphi} = -\,p\,\theta\,(1 - 3\,\tau) \tag{11}$$

Si l'on adopte le changement de variable proposé par LÉVI-CIVITA (1924) :

$$w = ce^{-i\omega} \qquad \omega = \theta + i\,\tau \tag{2}$$

nous devons résoudre $\omega\,(f)$ dans le domaine $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ en respectant les conditions aux limites suivantes :

$$\theta = 0 \qquad \text{sur} \qquad \psi = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d\,\tau}{d\,\varphi} + pe^{-3\tau}\sin\theta = 0 \qquad \text{sur} \qquad \psi = 1 \tag{4}$$

où :

$$p = gh/c^2 \tag{5}$$

L'équation (4) est la condition classique de pression constante le long de la surface libre exprimée en fonction de la nouvelle variable $\omega = \theta + i\,\tau$. La condition exprimant que la surface libre doit correspondre avec la ligne de courant $\psi = 1$ peut être écrite sous la forme opérationnelle (LÉVI-CIVITA, 1911) :

$$\omega\,(\varphi + i) = i\,e^{i\mathrm{D}}\,\tau_0 \tag{6}$$

dans laquelle :

$\omega = i\,\tau_0$ sur $\psi = 0$ et D signifie $d/d\,\varphi$.

En séparant dans cette équation la partie réelle et la partie imaginaire, et en éliminant τ_0, on obtient :

$$\tau = -\cot\mathrm{D}\,\theta \tag{7}$$

sur $\psi = 1$.

Les conditions en surface sont donc :

$$\mathrm{D}\,\tau = -\,p\,e^{-3\tau}\sin\theta \tag{8}$$

$$\mathrm{D}\,\tau = -\,\mathrm{D}\cot\mathrm{D}\,\theta \tag{9}$$

III. — Solution par approximations successives

On peut intégrer l'équation (9) par approximations successives en considérant que τ est suffisamment petit dans l'ensemble de l'écoulement. On remplace $\mathrm{D} = (d/d\,\varphi)$ par $(d\,\tau/d\,\varphi)$ $(d/d\,\tau)$ et on remplace $(d\,\tau)/(d\,\varphi)$ par sa valeur tirée de l'équation 8. Au premier ordre d'approximation, les équations 8 et 9 deviennent :

$$\frac{d\,\tau}{d\,\varphi} = -\,\theta + \frac{1}{3}\,\frac{d\,\tau}{d\,\varphi}\,\frac{d}{d\,\tau}\left(\frac{d\,\varphi}{d\,\tau}\,\frac{d\,\theta}{d\,\tau}\right) \tag{10}$$

et :

$$\frac{d\,\tau}{d\,\varphi} = -\,p\,\theta\,(1 - 3\,\tau) \tag{11}$$

WEINSTEIN (1927) has shown that the linearized form of equation (9) as a first approximation, $(d\tau/d\varphi) = -p\,\theta$, has no non-zero bounded solution in the case of the solitary wave.

Integration of equations (10) and (11) leads to the solution :

$$\frac{1}{6}\,p^2\theta^2 = \frac{\tau^2}{2}\,[\tau + (1-p)] \qquad (12)$$

Writing $\tau = -\nu$ at the crest where $\theta = 0$, then to this approximation :

$$1 - p = \nu \qquad (13)$$

WEINSTEIN has carried this procedure to a second approximation by retaining the next higher order term in equation (9) and found :

WEINSTEIN (1927) a montré que la forme linéarisée de l'équation (9), constituant une première approximation, $d\tau/d\varphi = -p\,\theta$, n'avait pas de solution finie différente de zéro dans le cas de l'onde solitaire.

L'intégration des équations 10 et 11 conduit à la solution :

$$\frac{1}{6}\,p^2\theta^2 = \frac{\tau^2}{2}\,[\tau + (1-p)] \qquad (12)$$

Si l'on écrit $\tau = -\nu$ vers la crête où $\theta = 0$, on a, à cette approximation :

$$1 - p = \nu \qquad (13)$$

WEINSTEIN a étendu son procédé à une seconde approximation en tenant compte du terme d'ordre immédiatement supérieur de l'équation 9, et a trouvé :

$$\frac{p^4}{90}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{d\,\theta^2}{d\,\tau}\right)^2 - \theta^2\,\frac{d^2\theta^2}{d\,\tau^2}\right\} - \frac{1}{6}\,p^2\theta^2 + \frac{\tau^2}{2}\,[\tau + (1-p)] + (1-p)\,\tau^3 + \frac{3}{2}\,\tau^4 = 0. \qquad (14)$$

Substituting for θ^2 from equation (12) in the terms of the fourth order in τ we have :

En remplaçant θ^2 par sa valeur tirée de l'équation (12), dans les termes au 4ᵉ degré en τ, on trouve :

$$\frac{1}{6}\,p^2\theta^2 = \tau^2\left\{\frac{9}{8}\,\tau^2 + \frac{\tau}{2}\,[1 + (1-p)] + \frac{1}{10}\,[5\,(1-p) - (1-p)^2]\right\} \qquad (15)$$

and (et) :

$$1 - p = \nu - \frac{21}{20}\,\nu^2. \qquad (16)$$

In order to obtain third order expressions for the wave profile and the velocity of propagation it is necessary to retain a further term in equation (9) which becomes :

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = -\theta + \frac{1}{3}\,D^2\theta + \frac{1}{45}\,D^4\theta + \frac{2}{945}\,D^6\theta \qquad (17)$$

Replacing $(d\tau/d\varphi)$ and integrating, this equation reduces to :

Afin d'obtenir des expressions au troisième ordre pour le profil de l'onde et la célérité, il convient de tenir compte d'un terme de plus dans l'équation (9) qui devient ainsi :

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = -\theta + \frac{1}{3}\,D^2\theta + \frac{1}{45}\,D^4\theta + \frac{2}{945}\,D^6\theta \qquad (17)$$

En remplaçant $(d\tau/d\varphi)$ par sa valeur et en intégrant, cette équation se réduit à :

$$\begin{aligned}
&-\frac{\tau^2}{2}\,(1-p) + \tau^3\left(p - \frac{3}{2}\right) + \frac{9}{8}\,p\,\tau^4 - \frac{21}{8}\,\tau^4 + 9\,\tau^5\left(\frac{p}{10} - \frac{3}{8}\right) + \frac{\tau^5}{p^2}\left(\frac{p}{10} - \frac{1}{8}\right)\\
&+ \frac{\tau^4\,(1-p)}{p^2}\left(\frac{p}{8} - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6}\,p^2\theta^2 + \frac{p^4}{90}\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{d\,\theta^2}{d\,\tau}\right)^2 + \theta^2\frac{d^2\theta^2}{d\,\tau^2}\right\}\\
&-\frac{p^4}{90}\left\{-3\,\theta^2\frac{d\,\theta^2}{d\,\tau} - 6\,\tau\,\theta^2\,\frac{d^2\theta^2}{d\,\tau^2} + \frac{3}{2}\,\tau\left(\frac{d\,\theta^2}{d\,\tau}\right)^2\right\}\\
&-\frac{p^6}{945}\left\{\frac{3}{4}\,\theta^2\left(\frac{d^2\theta^2}{d\,\tau^2}\right)^2 + \theta^2\,\frac{d\,\theta^2}{d\,\tau}\,\frac{d^3\theta^2}{d\,\tau^3} + \theta^4\,\frac{d^4\theta^2}{d\,\tau^4} - \frac{1}{4}\left(\frac{d\,\theta^2}{d\,\tau}\right)^2\frac{d^2\theta^2}{d\,\tau^2}\right\} = 0 \qquad (18)
\end{aligned}$$

Substituting equations (15) and (16) in the fourth and fifth order terms, we have :

En tenant compte des équations 15 et 16 dans les termes des 4ᵉ et 5ᵉ ordres, on obtient :

$$\frac{1}{6}\, p^2 \theta^2 = \frac{\tau^2}{2}\Big[\tau + (1-p)\Big] + \frac{9}{8}\,\tau^4 + \frac{1}{2}\,\tau^3 (1-p) - \frac{1}{10}\,\tau^2 (1-p)^2$$

$$+ \frac{41}{20}\,\tau^5 + \frac{7}{6}\,\tau^4 (1-p) + \frac{9}{25}\,\tau^3 (1-p)^2 + \frac{6}{35}\,\tau^2 (1-p)^3 \qquad (19)$$

The condition at the crest $\theta = 0$, $\tau = -\nu$, gives :

$$1 - p = \nu - \frac{21}{20}\,\nu^2 + \frac{283}{420}\,\nu^3 \qquad (20)$$

IV.—The Wave Velocity

The pressure equation at the free surface may be written :

$$\frac{1}{2}\,|w|^2 + gy = \frac{1}{2}\,c^2 + gh$$

or, using the change of variable in equation (2) :

$$\frac{1}{2}\,(e^{2\tau} - 1) + p\left(\frac{y-h}{h}\right) = 0$$

Since at the crest $y = a + h$, a being the wave amplitude, we have :

$$p\left(\frac{a}{h}\right) = \nu - \nu^2 + \frac{2}{3}\,\nu^3 \qquad (21)$$

to the third order.

Eliminating ν between equations (20) and (21), one finds that the velocity of propagation is given to the third order by the relation :

$$c^2 = gh\left\{1 + \frac{a}{h} - \frac{1}{20}\left(\frac{a}{h}\right)^2 - \frac{3}{70}\left(\frac{a}{h}\right)^3\right\} \qquad (22)$$

which is in close agreement with recent measurements of the velocity of the solitary wave given by DAILY and STEPHAN (1953). For the highest wave, the particle velocity at the crest is equal to the wave velocity and so :

$$c^2 = 2\,ga$$

Using equation (22) the relative amplitude of the highest wave is accordingly given by :

$$1 = \frac{a}{h} + \frac{1}{20}\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{3}{70}\left(\frac{a}{h}\right)^3 \ldots$$

from which we find :

$$\left(\frac{a}{h}\right)_{\max} = 0{,}92$$

The value of $c/(gh)^{1/2}$ given by equation (22)

La condition à la crête ($\theta = 0$, $\tau = -\nu$) donne :

$$1 - p = \nu - \frac{21}{20}\,\nu^2 + \frac{283}{420}\,\nu^3 \qquad (20)$$

IV. — La célérité

L'équation de la pression à la surface libre peut s'écrire :

$$\frac{1}{2}\,|w|^2 + gy = \frac{1}{2}\,c^2 + gh$$

ou, en utilisant le changement de variable de l'équation 2 :

$$\frac{1}{2}\,(e^{2\tau} - 1) + p\left(\frac{y-h}{h}\right) = 0$$

Puisque, à la crête $y = a + h$, a étant l'amplitude, nous pouvons écrire :

$$p\left(\frac{a}{h}\right) = \nu - \nu^2 + \frac{2}{3}\,\nu^3 \qquad (21)$$

au 3^e ordre.

En éliminant ν entre les équations (20) et (21), on trouve que la célérité est donnée au 3^e ordre par la relation :

$$c^2 = gh\left\{1 + \frac{a}{h} - \frac{1}{20}\left(\frac{a}{h}\right)^2 - \frac{3}{70}\left(\frac{a}{h}\right)^3\right\} \qquad (22)$$

expression qui concorde bien avec les résultats de mesure récents concernant la célérité de l'onde solitaire communiqués par DAILY et STEPHAN. Pour l'onde la plus haute, la vitesse des particules à la crête est égale à la célérité et par conséquent :

$$c^2 = 2\,ga$$

Compte tenu de l'équation (22), l'amplitude relative de l'onde la plus haute est donc donnée par :

$$1 = \frac{a}{h} + \frac{1}{20}\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{3}{70}\left(\frac{a}{h}\right)^3 \ldots$$

d'où l'on conclut que :

$$\left(\frac{a}{h}\right)_{\max} = 0{,}92$$

La valeur de $c/(gh)^{1/2}$ donnée par l'équation differs little from the first order solution for small values of a/h, the correction being 0.6 % when $a/h = 0.5$ and 2 % when $a/h = 0.92$.

V.—The Wave Profile

The method used to obtain the wave profile is a modification of that used by LEVI-CIVITA for periodic waves. The second transformation of the plane of motion is avoided by using equation (19) connecting θ and τ on the free surface, and integrating throughout in terms of τ.

From equation (1) we have :

$$z = \int \frac{df^*}{w} = ch \int \frac{df}{w} \qquad (23)$$

where $w = c\, e^{-i\omega(f)}$.

On the free surface we have $z = z_l$ and $df = d\varphi$, and so :

$$z_l = h \int e^{i\omega}\, d\varphi$$

Also, we have from equation (4) :

$$d\varphi = -\frac{1}{p}\, e^{3\tau} \quad \operatorname{cosec}\theta\, d\tau$$

on $z = z_l$.

Thus :

$$z_l = -\frac{h}{p} \int e^{2\tau + i\theta} \operatorname{cosec}\theta\, d\tau \qquad (24)$$

Separating this into real and imaginary parts, we have the parametric form of the equation to the free surface :

$$x_l = -\frac{h}{p} \int e^{2\tau} \cot\theta\, d\tau \qquad (25)$$

$$y_l = -\frac{h}{p} \int e^{2\tau}\, d\tau \qquad (26)$$

To the third order, θ in equation (25) is given by from equation (19) :

$$\frac{p\,\theta}{\sqrt{3}} = \tau\sqrt{\tau + \nu} \left\{ 1 + \frac{9}{8}\tau - \frac{5}{8}\nu + \frac{907}{640}\tau^2 - \frac{173}{960}\tau\nu + \frac{5\,021}{9\,600}\nu^2 \right\} \qquad (27)$$

Evaluating the integrals (25) and (26), the wave profile is given to the third order by the relations :

(22) ne diffère que légèrement de la solution au premier ordre pour les petites valeurs de a/h : la correction est de 0,6 % lorsque $a/h = 0{,}5$, et de 2 % lorsque $a/h = 0{,}92$.

V. — Profil de l'onde

La méthode utilisée pour obtenir le profil de l'onde constitue une modification de celle utilisée par LÉVI-CIVITA pour les ondes périodiques. La seconde transformation du plan de l'écoulement est évitée en se servant de l'équation (19) qui relie θ et τ sur la surface libre, et en intégrant en fonction de τ.

D'après l'équation (1), nous avons :

$$z = \int \frac{df^*}{w} = ch \int \frac{df}{w} \qquad (23)$$

dans laquelle $w = ce^{-i\omega(f)}$.

Sur la surface libre, nous avons :

$$z = z_l \quad \text{et} \quad df = d\varphi,$$

si bien que :

$$z_l = h \int e^{i\omega}\, d\varphi$$

Par conséquent, d'après l'équation (4) :

$$d\varphi = -\frac{1}{p}\, e^{3\tau} \quad \operatorname{cosec}\theta\, d\tau$$

sur $z = z_l$.

Ainsi :

$$z_l = -\frac{h}{p} \int e^{2\tau + i\theta} \operatorname{cosec}\theta\, d\tau \qquad (24)$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, nous obtenons l'équation de la surface libre sous forme paramétrique.

$$x_l = -\frac{h}{p} \int e^{2\tau} \cot\theta\, d\tau \qquad (25)$$

$$y_l = -\frac{h}{p} \int e^{2\tau}\, d\tau \qquad (26)$$

Au troisième ordre, θ dans l'équation (25) est calculée d'après l'équation (19) :

Après calcul des intégrales (25) et (26), le profil d'onde est donné au troisième ordre par les relations :

$$\frac{\sqrt{3}}{2\,h}\,x_l = \frac{1}{\sqrt{\nu}}\left(1+\frac{5}{8}\,\nu-\frac{1{,}271}{9.600}\,\nu^2\right)\tanh^{-1}\sqrt{\frac{\tau+\nu}{\nu}}-\left(\frac{7}{8}+\frac{23}{960}\,\nu\right)\sqrt{\tau+\nu}$$
$$+\frac{257}{1.920}\,(\tau \quad 2\,\nu)\,\sqrt{\tau+\nu}$$
$$\frac{1}{h}\;y_l = 1-\left\{(\tau+\tau^2)\,(1+\nu)+\frac{2}{3}\,\tau^3-\frac{1}{20}\,\nu^2\,\tau\right\}.$$

Eliminating τ between these two equations, we have :

Si l'on élimine τ entre ces deux équations, on a :

$$\frac{y}{h}=1+\left(\frac{a}{h}\right)\operatorname{sech}^2\gamma x+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{h}\right)^2\operatorname{sech}^2\gamma x\tanh\gamma x\,(5\,\gamma x-3\tanh\gamma x)$$
$$-\left(\frac{a}{h}\right)^3\operatorname{sech}^2\gamma x\left\{\operatorname{sech}^2\gamma x\left(\frac{841}{480}\tanh^2\gamma x-\frac{15}{8}\,\gamma x\tanh\gamma x+\frac{25}{64}\,\gamma^2x^2\right)\right.$$
$$\left.-\frac{5}{8}\tanh^2\gamma x\left(1+\frac{5}{4}\,\gamma^2x^2\right)+\frac{8{,}521}{4.800}\,\gamma x\tanh\gamma x\right\}, \tag{28}$$

where (où) :

$$\gamma=\frac{\sqrt{3\,\nu}}{2\,h} \tag{29}$$

and (et) :

$$\nu=\frac{a}{h}+\frac{23}{60}\left(\frac{a}{h}\right)^3+\dots \tag{30}$$

I wish to thank the Director of Hydraulics Research for permission to publish this work.

Je tiens à remercier M. le Directeur de la Recherche Hydraulique pour avoir bien voulu m'autoriser à publier ce travail.

J. N. HUNT,

Hydraulics Research Station
Howbery Park, Wallingford, Berks
U. K.

REFERENCES

BOUSSINESQ J. (1872). *J. Math. Pures Appl.* 17, 55.
DAILY J. W. & STEPHAN C. (1953). *Trans. A.S.C.E.* *118*, 575.
LEVI-CIVITA T. (1911). *Rend. Acc. Linc.* (5) *20*, 605.
LEVI-CIVITA *T.* (1924). *Rend. Acc. Linc.* (5) *33*, 141.
URSELL F. (1953). *Proc. Camb. Phil. Soc.* *49*, 685.
WEINSTEIN A. (1926). *Rend. Acc. Linc.* (6) *3*, 463.
WEINSTEIN A. (1927). *Rend. Acc. Linc.* (6) *5*, 259