# Mécanique des terrains perméables

## The mechanics of permeable soils

PAR J. FERRANDON

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(*Suite et fin*)

*Le texte ci-dessous résume la matière d'une série de conférences faites aux Elèves Ingénieurs de l'Institut Polytechnique de Grenoble au cours de la session scolaire 1953-1954. Leur objet est l'examen de certaines propriétés des terrains perméables particulièrement utiles pour les applications.*
*La première partie expose les lois de l'écoulement laminaire en généralisant, par l'introduction du tenseur de perméabilité, la loi de Darcy aux milieux isotropes.*
*La seconde partie traite de l'équilibre limite des sols cohérents sans frottement interne et des sols pulvérulents par la méthode analytique de Cauchy, par laquelle les lignes de glissement apparaissent comme courbes caractéristiques d'un système d'équation aux dérivées partielles.*
*La troisième partie envisage les phénomènes de propagation de discontinuités dans un sol perméable, compte tenu de l'existence de deux phases solide et liquide en présence.*
*Enfin une note de M. F. Serre sur l'évolution en fonction du temps du tassement des couches argileuses aborde le problème du tassement des fondations d'une manière tout à fait générale.*

*The following text is a resumé of a series of lectures delivered to engineering students at the Grenoble Polytechnic Institute during the 1953-1954 session. The object of the lectures was to examine those properties of permeable soils which are of special importance in practical problems.*
*The first part treats the laws of laminar flow, generalising Darcy's law for isotropic soils by introducing the permeability tensor.*
*The second part deals with the limiting equilibrium of cohesive soils without internal friction, and of cohesionless soils. The analytical method of Cauchy is used and gives the failure lines as characteristic curves of a system of partial differential equations.*
*The third part considers the phenomena of propagation of discontinuities in a permeable soil taking into account the existence of both solid and liquid stages.*
*Finally a note by M. F.* Serre *on the time element in the settlement of clay strata introduces the problem of foundation settlement in a very general manner.*

## TROISIÈME PARTIE (*)

## DYNAMIQUE DES SOLS PERMÉABLES

### III

### CONSOLIDATION DES ARGILES

1.

L'application de charges à la surface limite d'un sol argileux en équilibre détermine une évolution. dite *consolidation*, de celui-ci au cours de laquelle l'eau libre est expulsée des régions les plus chargées. Le phénomène de consolidation se révèle par la déformation progressive et très lente des couches intéressées dont le tassement final, bien qu'appréciable et parfois même catastrophique quant à la stabilité des ouvrages auxquelles elles tiennent lieu de fondation, demeure généralement petit eu égard aux dimensions de celles-ci.

Les équations indéfinies [3, I] régissent ce changement d'état, mais elles seront simplifiées

(*) Cf. *la Houille Blanche*, n° 4, 1954, pp. 466-480; n° 1, 1955, pp. 63-85; n° 2, 1955, pp. 150-166.

pour tenir compte de l'ordre d'infinitude postulé des déplacements et des vitesses.

2. EQUATIONS INDÉFINIES DE LA CONSOLIDATION.

La *phase solide* est assujettie à une transformation (T) définie par le vecteur $\overline{u}\,(u_i)$, par laquelle la particule macroscopique de masse spécifique, module des vides et coefficients d'élasticité $\rho_0$, $m_0$, $\lambda_{ij,kl}$, occupant primitivement le voisinage du point $(x_1\, x_2\, x_3)$, passe à l'instant $t$ de la consolidation au point $(X_1\, X_2\, X_3)$ :

$$X_i = x_i + u_i\,(x_1\, x_2\, x_3\, t),$$

avec la vitesse $\overline{v}\,(v_1\, v_2\, v_3)$ :

$$\overline{v} = \dot{\overline{u}}$$

La déformation de cette phase est en outre définie par la partie principale $\overline{\overline{e}}\,(e_{ij})$ du tenseur de déformation pure :

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

et l'état de tension réversible est représenté par le tenseur symétrique $\overline{\overline{T}}\,(T_{ij})$ initialement égal à $\overline{\overline{T^0}}\,(T^0_{ij})$.

*La phase liquide* de poids spécifique $\varpi = \rho_1 g$ filtre à travers la première de perméabilité $\overline{\overline{K}}\,(K_{ij})$ avec la vitesse brute $\overline{V}\,(V_1\, V_2\, V_3)$, et la *vitesse relative* des deux phases en présence est liée à la charge hydraulique actuelle $\Phi\,(x_1\, x_2\, x_3\, t)$ par la loi de DARCY généralisée :

$$\overline{V} - \overline{v} = - \overline{\overline{K}}\; \overline{\mathrm{grad}\,\Phi}.$$

Nous nous proposons de déterminer à chaque instant de la consolidation la position qu'occupe la phase solide par rapport à sa situation initiale, c'est-à-dire le vecteur $\overline{u}$ et accessoirement la charge hydraulique $\Phi$ en tout point.

A cet effet, nous remarquons que l'équation de continuité, déduite de (3, I, 25) pour tenir compte des hypothèses actuelles :

$$\mathrm{div}\,(\overline{v} + \overline{V}) = 0$$

par la loi d'écoulement rappelée ci-dessus, s'écrit :

$$\mathrm{div}\,(2\,\overline{v} - \overline{\overline{K}}\;\overline{\mathrm{grad}\,\Phi}) = 0 \qquad (1)$$

et que l'équation indéfinie du mouvement de la phase solide (3, I, 53) dans laquelle sont négligées forces d'inertie et de viscosité :

$$\mathrm{div}\,\overline{\overline{T}} + \overline{f} = 0,$$

par l'expression des forces de volume (3, I, 30) débarrassée des forces d'inertie négligeables pour l'évolution lente envisagée, s'écrit :

$$\overline{f} = -\varpi\,\overline{\mathrm{grad}\,\Phi} - (1 - m_0)\,(D - \varpi)\,\overline{\mathrm{grad}\,x_2}$$

et celle du tenseur tension en fonction de la déformation pure (3, I, 57) :

$$T_{kl} = T^0_{kl} + \lambda_{kl,ij}\, e_{ij},$$

donne :

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,(T^0_{kl} + \lambda_{kl,ij}\, e_{ij}) - \varpi\,\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} - (1 - m_0)\,(D - \varpi)\,\frac{\partial x_2}{\partial x_l} = 0$$

Et comme, dans l'état initial d'équilibre :

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,(T^0_{kl}) - (1 - m_0)\,(D - \varpi)\,\frac{\partial x_2}{\partial x_l} = 0$$

il vient, par différence :

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,(\lambda_{kl,ij}\, e_{ij}) - \varpi\,\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} = 0 \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) sont les *équations indéfinies de la consolidation*.

Si la phase solide est initialement *homogène et isotrope*, ces propriétés élastiques sont définies par les deux seuls coefficients d'élasticité $\lambda$ et $\mu$, et le tenseur de perméabilité se réduit au coefficient de perméabilité K. Sous cette hypothèse, les équations (1) et (2) deviennent, par quelques transformations classiques :

$$K\,\Delta_2\,\Phi = 2\,\mathrm{div}\,\dot{\overline{u}} \qquad (3)$$

$$(\lambda + \mu)\,\overline{\mathrm{grad\,div}\,\overline{u}} + \mu\,\Delta_2\,u = \varpi\,\overline{\mathrm{grad}\,\Phi} \qquad (4)$$

Avec les conditions initiales et les conditions aux limites, les équations (1) et (2), et plus particulièrement les équations (3) et (4), définissent la fonction scalaire $\Phi$ et la fonction vectorielle $\overline{u}$, régissant le phénomène envisagé.

3. PETITS MOUVEMENTS ET DÉPLACEMENT DE L'ÉQUILIBRE DES MASSIFS TOTALEMENT CONSOLIDÉS.

Nous examinons maintenant l'évolution d'un massif réduit à sa phase solide (grains et eau fixée) ne s'accompagnant plus à l'échelle macroscopique de variation volumétrique sensible. C'est bien là, par exemple, le cas d'un matériau à structure lamellaire dont toutes les particules enrobées d'eau fixée sont parallèles à un plan.

Les équations indéfinies se déduisent aisément de celles établies en toute généralité en [3, I, 7]. Dans l'hypothèse d'une phase solide initialement homogène et isotrope, par introduction d'un scalaire $p$ et réduction de $\overline{f}$ aux actions de pesanteur, il vient :

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{div} \overline{u} = 0 \\ \overline{\operatorname{grad}}\,(T^0 - p) + \mu\,\Delta_2\,\overline{u} + \rho_0\,g = \rho_0\,\ddot{\overline{u}} \end{array}\right.$$

pour déterminer les fonctions inconnues $p$ et $\overline{u}$.

S'il s'agit de la recherche des déplacements d'équilibre à partir de l'état initial par le seul jeu des sollicitations superficielles, ce qui correspond à maints problèmes pratiques, tel celui de la stabilité des fondations; à cet égard, compte tenu de l'équilibre dans l'état initial, par suppression des termes de vitesse et d'accélération, les équations précédentes deviennent :

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{div} \overline{u} = 0 \\ -\overline{\operatorname{grad}\,p} + \mu\,\Delta_2\,\overline{u} = 0 \end{array}\right.$$

Elles régissent tout déplacement d'équilibre des massifs de l'espèce. On ne manquera pas de noter leur identité formelle aux équations de STOKES (*) de la dynamique des fluides visqueux incompressibles en mouvement stationnaire.

(*) A cela près que le déplacement $\overline{u}$ est remplacé par la vitesse $\overline{v}$.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

BOUSSINESQ. — « Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources, et compléments ». *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. X, 1904.

CAQUOT et KÉRISEL. — *Traité de Mécanique des sols.* Gauthier-Villars, 1949.

MANDEL. — *Equilibre par tranches planes des solides à la limite d'écoulement.* Louis Jean, Aix-en-Provence, 1942.

— *Consolidation des sols (études mathématiques).* Comité Français de la Mécanique des sols, 1950.

MAYER. — *Les terrains perméables.* Dunod, 1947.

RAVIZÉ. — *Poussée des terres, études des équations de l'équilibre limite.* Dunod, 1945.

ROY. — *Mécanique des milieux continus déformables* (Cours de l'Ecole Polytechnique). Gauthier-Villars, 1950.

TERZAGHI et FRÖLICH. — *Théorie du tassement des couches argileuses.* Dunod, 1939.