Le vortex permanent dans un fluide réel

Steady vortex flow in a real fluid

PAR

HANS ALBERT EINSTEIN

PROFESSOR OF HYDRAULIC ENGINEERING,
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY

ET

HUON LI

ASSISTANT RESEARCH ENGINEER,
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY

Les équations (2,2) et (2,3) auxquelles on parvient donnent la distribution des vitesses de rotation dans un vortex élémentaire en fluide réel. L'équation (2,2) correspond à la portion d'écoulement située à l'intérieur du cylindre d'axe z défini par l'orifice de vidange, alors que l'équation (2,3) correspond à la portion de l'écoulement extérieur à ce cylindre. La constante A apparaissant dans ces équations prend la forme de l'équation (37) dans le cas général d'une combinaison du frottement turbulent et visqueux. Quelques mesures réalisées dans un bac tournant spécial font l'objet d'une présentation et confirment la validité de ces équations. La matière de cet article a été empruntée à une thèse de M. HUON LI ayant le même titre. Les travaux expérimentaux sont dus à l'initiative et à l'appui de la Yosemite Chemical Company de San Francisco, et tout particulièrement de M. FLEISCHHACKER.

Equations (2,2) and (2,3) as derived give the distribution of rotating velocities for a single vortex in real fluids. Eq. (2,2) describes the part of the flow at distances from the z-axis smaller than the radius of the drain opening while Eq. (2,3) gives the outside part of the flow. The constant A in these equations takes the form of Eq. (37) in the general case of combined turbulent and viscous friction. A limited number of measurements made in a special rotating tank are shown and confirm the applicability of these equations.

The material content of this paper is taken from the Masters Thesis with the same title of Mr. HUON LI. The experimental work was suggested and supported by the Yosemite Chemical Company of San Francisco, in particular by Mr. FLEISCHHACKER.

INTRODUCTION

Cette étude a été provoquée par un problème pratique : la Yosemite Chemical Company de San Francisco avait mis au point une substance huileuse destinée à servir de couche protectrice pour les parois intérieures en acier des réservoirs d'eau subissant des variations de niveau assez considérables. Cette substance est répandue sur la surface de l'eau qu'elle recouvre d'une couche continue d'environ 15 mm d'épaisseur. Au fur et à mesure que le niveau du plan d'eau varie, la substance recouvre toutes les surfaces métalliques avec lesquelles elle se trouve en contact, ce qui rend inutile la peinture intérieure des réservoirs.

Dans la mise en œuvre de ce procédé, l'action protectrice de la substance s'avéra satisfaisante même en eau de mer, mais la couche demeurant sur l'eau se trouvait perdue toutes les fois que l'on procédait à une manœuvre de vidange un peu rapide. L'observation de l'écoulement à l'intérieur des réservoirs révéla que des vortex prenaient naissance, qui aspiraient directement vers

INTRODUCTION

This study was prompted by a practical problem : The Yosemite Chemical Company of San Francisco has developed an oily substance to be used as a protective cover for the steel surfaces on the inside of water tanks with widely varying water surfaces. This substance is poured on the water surface, which it covers as a continuous layer of about ½ inch thickness. As the water surface changes, the substance coats the metal surfaces wherever it comes in contact with it, making inside painting of the tanks unnecessary.

In the operation of this system the protective action of the substance was satisfactory even in sea water, but the remaining layer on the water was lost whenever the water was discharged rapidly. Observation of the flow inside the tanks revealed that vortices developed which piped the specifically lighter substance directly into the drain. As the oil-water interface is even more sensitive to pressure differences than the free water surface, this problem is even more

la conduite de vidange la substance naturellement plus légère. Etant donné que l'interface huile-eau est évidemment plus sensible aux variations de pression que la surface libre de l'eau pure, ce problème est naturellement plus difficile à résoudre que celui de l'élimination de l'air dans les conduites d'aspiration de pompes plongeant dans des bassins peu profonds. C'est alors que l'on décida que les auteurs de cet article tenteraient d'étudier le fondement théorique de ces vortex, afin de trouver un moyen d'éviter leur apparition.

La théorie du vortex élémentaire en fluide parfait est connue depuis longtemps, et est basée sur la conservation du moment cinétique au fur et à mesure que le fluide se rapproche de l'orifice de vidange. Même dans le cas d'une circulation initiale extrêmement petite, cette théorie conduit à des vitesses de circulation infinies au centre du vortex, et ne fournit aucune indication quant à la manière d'éviter de tels vortex, si ce n'est l'élimination du moindre indice de circulation dans le réservoir. Ceci est cependant impossible dans des réservoirs de forme tout à fait irrégulière, même si l'eau est absolument calme au commencement de la manœuvre de vidange. Tous les réservoirs en cause développant une certaine circulation lorsqu'ils sont en vidange, il convient, pour parvenir à la solution recherchée, de se servir d'une théorie plus complète de ce type d'écoulement.

Une étude générale du problème montra que seul le frottement était à même d'éviter l'apparition des grandes vitesses de rotation au voisinage du centre, dans le cas où le fluide présentait à l'origine une certaine circulation. La présente étude montrera la solution du vortex en fluide réel, et comparera cette solution avec quelques mesures réalisées sur un réservoir expérimental, réservoir qui donnait naissance à des vortex de ce type ayant un moment cinétique initial connu.

MISE EN ÉQUATION DU PROBLÈME

Afin de résoudre le problème à trois dimensions, en réalité très complexe, les hypothèses simplificatrices suivantes seront adoptées :

1° L'axe du vortex est supposé coïncider avec l'axe des z d'un système de coordonnées cartésien;

2° Le réseau d'écoulement est supposé symétrique par rapport à l'axe des z ;

3° Les composantes de la vitesse moyenne selon l'axe des z sont supposées négligeables.

Compte tenu de ces hypothèses, et plus particulièrement de la deuxième, l'écoulement peut, très facilement et très commodément, être rap-

porté à la solution de la question de l'exclusion de l'air des conduites d'aspiration de pompes en shallow suction chambers. Il fut ainsi décidé que les auteurs de ce papier devraient étudier le fondement théorique de ces vortex en vue de trouver quelque moyen d'éviter leur création.

La théorie du vortex simple dans un fluide sans frottement a longtemps été connue et est basée sur la conservation du moment de la quantité de mouvement quand le fluide s'approche de l'orifice. Cette théorie conduit même avec une circulation initiale extrêmement petite à des vitesses de circulation infinies au centre du vortex et ne donne aucune indication de la manière d'éviter de tels vortex, si ce n'est l'élimination de la dernière partie de la circulation dans le réservoir. Ceci est cependant impossible, même si l'eau est absolument calme au commencement de la manœuvre de vidange. Tous les réservoirs en question développent une certaine quantité de circulation quand ils sont vidés, une théorie plus complète de ce phénomène de circulation doit être utilisée pour trouver la solution désirée.

Une analyse générale du problème de l'écoulement a montré que seule la friction est capable d'empêcher le développement de grandes vitesses de rotation près du centre si une circulation initiale est présente dans le fluide. Cette étude montrera la solution du vortex dans un fluide réel et comparera celle-ci avec quelques mesures effectuées sur un réservoir expérimental qui produisait de tels vortex avec un moment cinétique initial connu.

MATHEMATICAL FORMULATION OF THE PROBLEM

In order to solve the basically very complicated three-dimensional problem, the following simplifying assumptions were made :

1. The vortex axis was assumed to coincide with the z -axis of a Cartesian system of coordinates.

2. The flow pattern is assumed to be symmetric to the z -axis.

3. Average velocity components in the z -direction are assumed to be negligible.

Under these assumptions, especially assump-

porté à un système de coordonnées cylindriques, système que sera utilisé tout au long de l'article. Les coordonnées sont les suivantes : z , distance parallèlement à l'axe du vortex; r , distance depuis l'axe du vortex, et θ l'angle de rotation autour de l'axe des z . Dans ce système de coordonnées, les composantes de la vitesse sont les suivantes : u , selon la direction r ; v , la vitesse de rotation autour de l'axe des z ; w , la vitesse dans la direction z . Avec ces notations, les équations de NAVIER et STOKES s'écrivent :

$$\frac{D'u}{Dt} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (p + \gamma h) + \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (1)$$

$$\frac{D'v}{Dt} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (p + \gamma h) + \nu \left(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{D'w}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (p + \gamma h) + \nu (\nabla^2 w) \quad (3)$$

Ces équations définissent l'écoulement si on leur joint l'équation de continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

Ces équations correspondent au cas des fluides incompressibles, et mettent en jeu les opérateurs suivants :

$$\frac{D'}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (5)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6)$$

ainsi que les symboles :

ν : viscosité cinématique,
 ρ : masse spécifique du fluide,
 γ : poids spécifique du fluide,
 p : pression du fluide.

Dans les calculs qui suivent, ces quatre équations seront résolues pour diverses combinaisons d'hypothèses et de conditions aux limites. Dans chaque cas, la distribution du paramètre (vr) sera donnée en fonction de r , cette distribution caractérisant le mieux la diminution du moment cinétique. L'allure de la relation finale obtenue sera donnée sous forme d'un abaque, et les courbes théoriques seront comparées avec les distributions observées expérimentalement.

En ce qui concerne u , composante radiale de la vitesse, l'hypothèse supplémentaire suivante sera admise :

4° La variation de profondeur consécutive à

tion 2, the flow could easiest and most appropriately be described in cylinder coordinates, which are used throughout the paper. The coordinates are : z , the distance in direction of the vortex axis, r the distance from the vortex axis and θ the angle around the z -axis. In these coordinates the velocity components are : u in direction r , v the velocity of rotation around the z -axis and w the velocity in the z -direction. With this nomenclature the Navier-Stokes equations are :

which describe the flow together with the continuity equation :

These equations are given for application to an incompressible fluid, using the operators :

and the following symbols :

ν : the kinematic viscosity,
 ρ : the fluid density,
 γ : the specific weight of the fluid,
 p : the fluid pressure.

In the following derivations these four equations are solved for different sets of assumptions and boundary conditions. For each case the distribution of the parameter (vr) will be given in terms of r as its distribution best characterizes the decay of the moment of momentum. The shape of the derived relationship will be given in the form of a graph and theoretical curves are compared with observed distributions.

With respect to the radial velocity component u the following additional assumption was made:

4. The change of the water depth due to

l'abaissement de la surface libre, lorsque r décroît, est petite vis-à-vis de la profondeur totale, et peut donc être négligée dans le calcul de la composante u ;

5° Toutes les surfaces cylindriques, dont le diamètre est plus grand que celui de l'orifice de vidange, sont traversées par un débit total Q constant;

6° Si l'on considère un cylindre ayant même axe que l'orifice de vidange, et un rayon r plus petit que le rayon r_0 de cet orifice, le débit radial total qui le traverse est réduit à une valeur $Q_0 (r/r_0)^2$; ceci suppose une répartition régulière de l'écoulement dans l'orifice. Q_0 est le débit passant à travers la surface cylindrique du rayon r_0 .

Cette sixième et dernière hypothèse semble en contradiction avec l'hypothèse n° 3, puisqu'elle fait appel à des vitesses de vidange dans la direction z , alors que l'hypothèse n° 3 consistait à les négliger. On verra cependant que la validité des solutions obtenues se trouve justifiée par la forme des profils de la surface libre. Ces profils (z en fonction de r) dépendent essentiellement de la distribution des pressions sur les couches superficielles, couches pour lesquelles les deux hypothèses ne sont pas contradictoires.

PREMIER CAS : VORTEX ÉLÉMENTAIRE EN FLUIDE PARFAIT :

Ce cas est caractérisé par :

$$\left\{ \begin{array}{l} v = 0 \\ w = 0 \\ u \text{ et } v \text{ fonctions de } r \text{ seulement} \end{array} \right. \quad (7)$$

L'équation 1 prend la forme (1,1) si toutes les dérivées par rapport à t , θ , et z , sont nulles, ce qui correspond à un écoulement permanent défini par les hypothèses 1 à 6.

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (p + \gamma h) \quad (1,1)$$

L'équation 2 devient :

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} = 0 \quad (8)$$

qui peut être intégrée en donnant :

$$vr = \text{const.} \quad (2,1)$$

L'équation 3 devient identiquement nulle, et l'équation 4 prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) = 0 \quad (9)$$

lowering of the water surface at decreasing r is small compared to the total water depth, may thus be neglected in the calculation of the velocity component u .

5. The total flow discharge Q , through all cylinder surfaces with a diameter larger than the drain diameter is constant.

6. The total radial flow discharge through a concentric cylinder with a radius r smaller than that of the drain r_0 is reduced to a value $Q_0 (r/r_0)^2$ assuming even flow distribution in the drain, with Q_0 the discharge through the cylinder surface with the radius r_0 .

This last assumption 6. seems to be in contradiction with assumption 3., since 6. calls for drain velocities in the z direction, while 3. neglects them. It will be seen, however, that the validity of the derived solutions are tested by the shape of the water surface profiles. These profiles of z against r depend mainly on the pressure distribution of the surface layers for which both assumptions are compatible.

CASE 1 : SINGLE VORTEX IN AN IDEAL FLUID.

This case is characterized by :

$$\left\{ \begin{array}{l} v = 0 \\ w = 0 \\ u \text{ and } v \text{ functions of } r \text{ only} \end{array} \right. \quad (7)$$

Equation 1 takes the form of (1,1) if all derivatives with respect to t , θ and z are zero corresponding to a steady flow based on assumptions 1 to 6 :

Eq. 2 becomes :

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} = 0 \quad (8)$$

which may be integrated into :

$$vr = \text{const.} \quad (2,1)$$

Eq. 3 becomes identically zero and Eq. 4 takes the form :

qui peut être intégrée en donnant :

$$ru = \text{const.} \quad (4,1')$$

Cette équation coïncide avec l'hypothèse d'un débit constant à travers toutes les surfaces cylindriques concentriques.

Les trois équations (1,1), (2,1) et (4,1) permettent le calcul des conditions d'écoulement dans n'importe quel cas pratique. L'équation (4,1) montre que la totalité du débit radial passe à travers toutes les surfaces cylindriques concentriques successives. Ceci est correct dans toute la zone qui se trouve en dehors de l'orifice de vidange. A l'intérieur de la zone limitée par l'orifice de vidange, une partie du débit se dirige vers la vidange, ce qui réduit le débit au fur et à mesure qu'on approche du centre.

Dans tous les cas où $u \neq 0$, l'équation (2,1) fournit les vitesses de rotation v en fonction de r , et l'équation (1,1) peut servir à prévoir la forme de la surface libre. $\partial/\partial r (p + \gamma h)$ est la pente de la surface libre en direction de r .

Dans l'interprétation des résultats expérimentaux, le processus des opérations a été inversé : la pente de la surface libre était mesurée à partir des photographies. La distribution de la vitesse de rotation v était alors calculée à partir de l'équation (1,1) et comparée avec les vitesses déduites de l'équation (2,1). Il s'avéra commode de faire cette comparaison sous forme de graphique donnant (vr) en fonction de (r) . Pour faciliter cette comparaison, ce graphique fut transformé sous une forme sans dimension en divisant respectivement vr et r par $(v_0 r_0)$ et (r_0) , l'indice 0 indiquant qu'il s'agit d'une quantité prise à la distance $r = r_0$ de l'axe de l'orifice de vidange. $2 r_0$ est ainsi le diamètre de l'orifice de vidange et v_0 la vitesse de circulation à cette distance de l'axe.

Dans la partie du champ d'écoulement correspondant à $r < r_0$, autrement dit à l'intérieur de la zone de vidange, les équations (1,1) et (2,1) demeurent inchangées. L'équation (4,1) prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{Q_0}{\pi l r_0^2} r = 0 \quad (10)$$

où l est la longueur du vortex et Q_0 le débit à travers la surface cylindrique de longueur l et de rayon $r \geq r_0$.

Cette équation peut être intégrée et donne :

$$(ru) + \frac{Q_0}{2 \pi l} \frac{r^2}{r_0^2} + C = 0 \quad (11)$$

Si l'on tient compte que $-2 \pi l r u = Q_0$ pour $r = r_0$, on obtient $C = 0$:

which may be integrated into :

and is identical with the assumption of a constant discharge through all concentric cylinder surfaces.

These three equations (1,1) (2,1) and (4,1) permit the evaluation of flow conditions in any practical application. Equation (4,1) indicates that the entire radial discharge is transmitted through all concentric cylinder surfaces. This is correct in the area outside of the actual drain opening. Inside the drain diameter part of the discharge is diverted into the drain, reducing the discharge towards the center.

For all cases with $u \neq 0$ equation (2,1) gives the rotating velocities v as a function of r and equation (1,1) may be used to predict the shape of the water surface. $\partial/\partial r (p + \gamma h)$ is the water-surface slope in direction of r .

In the interpretation of experimental results, the opposite sequence of operation was used : The slope of the water surface was measured from photographs. By means of equation (1,1) the distribution of the rotating velocity v was determined and compared with the velocities as predicted by equation (2,1). It proved to be convenient to make this comparison in the form of a graph of (vr) against (r) . For reasons of comparison this graph was transformed into a dimensionless form by division through $(v_0 r_0)$ and (r_0) , respectively, whereby the index 0 indicates the location at the edge of the drain opening. $2 r_0$ is thus the diameter of the drain opening and v_0 the circulating velocity at its edge.

For the part of the flow field $r < r_0$, i.e. inside the drain area, the equations (1,1) and (2,1) are the same as outside the drain area. Eq (4,1) assumes the form :

This equation may be integrated :

Introducing that $-2 \pi l r u = Q_0$ for $r = r_0$, gives $C = 0$

et si l'on introduit $Q_r = -2\pi l r u$, on obtient : and introducing $Q_r = -2\pi l r u$ one obtains :

$$Q_r = Q_0 \frac{r^2}{r_0^2} \quad (12)$$

ainsi que nous l'avions admis dans l'hypothèse n° 6. as postulated in assumption 6.

DEUXIÈME CAS. — VORTEX ÉLÉMENTAIRE EN FLUIDE VISQUEUX; ÉCOULEMENT À L'INTÉRIEUR DU CYLINDRE LIMITÉ PAR L'ORIFICE DE VIDANGE ($r < r_0$).

CASE 2 : SINGLE VORTEX IN A VISCOUS FLUID, PART INSIDE THE DRAIN OPENING ($r < r_0$).

This case is characterized by :

Ce cas est caractérisé par :

$$\nu > 0$$

Aucun frottement dans tous les plans normaux à l'axe des z . no friction in any plane normal to the z -Axes.
 u and v functions of r only;

u et v sont fonction de r seulement :

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 r^2/r_0^2 \\ u^2 &\leq v^2 \\ w^2 &\leq v^2 \end{aligned} \quad (13)$$

Si l'on néglige toutes les dérivées par rapport à t , θ et z , l'équation (1) prend la forme suivante :

If all derivatives with respect to t , θ and z are neglected, eq. 1 takes the form :

$$u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r}(p + \gamma h) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r}(p + \gamma h) + \nu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ur)}{\partial r} \right) \quad (14)$$

si l'on tient compte de :

with :

$$u = -\frac{Q_r}{2\pi r l} = -\frac{Q_0 r}{2\pi r_0^2 l} \quad (15)$$

le dernier terme devient :

the last term becomes :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ur)}{\partial r} = -\frac{Q_0}{\pi r_0^2 l} = \text{const.}$$

Sa dérivée est nulle, par conséquent l'équation (1) correspondant au cas 2, c'est-à-dire l'équation (1, 2) est identique à l'équation (1, 1).

Its derivative is zero, therefore, Eq. (1) for case 2, Eq. (1, 2) is thus identical with (1, 1).

L'équation (2) prend la forme :

Eq (2) takes the form :

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (16)$$

Si l'on introduit u tel qu'il apparaît dans l'équation (15) et la constante :

introducing u from Eq. (15) and the constant :

$$A = \frac{Q_0}{2\pi l \nu} \quad (17)$$

on obtient :

one obtains :

$$r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r \left(1 + A \frac{r^2}{r_0^2} \right) \frac{\partial v}{\partial r} + \left(A \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) v = 0 \quad (18)$$

Cette équation admet la solution générale :

$$v = C_1 r^{-1} e^{-(\Lambda/2) (r/r_0)^2} + C_2 r^{-1} \quad (19)$$

A ce stade de notre raisonnement, afin de rendre les formules non dimensionnelles, il devient commode d'introduire une vitesse de référence $v = V$, vitesse à la distance $r = R$ de l'axe des z . Désignons par :

$$v_s = \frac{v}{V} ; \quad r_s = \frac{r}{R} ; \quad C_{1s} = \frac{C_1}{RV} ; \quad C_{2s} = \frac{C_2}{VR} \quad (20)$$

et écrivons à nouveau l'équation (19) :

$$v_s r_s = C_{1s} e^{-(\Lambda/2) (r_s/r_{0s})^2} + C_{2s} \quad (21)$$

Les deux constantes C_{1s} et C_{2s} peuvent être déterminées d'après les deux conditions aux limites suivantes; d'abord pour $r = r_0$ la vitesse est $v = v_0$; ensuite, pour $r = 0$, le produit rv devient nul puisque le frottement existe toujours alors que le transport de quantité de mouvement est devenu nul. Conformément à l'équation (13), l'équation (21) devient alors :

$$v_s r_s = v_{0s} r_{0s} \frac{1 - e^{-(\Lambda/2) (r_s/r_{0s})^2}}{1 - e^{-\Lambda/2}} \quad (22)$$

La viscosité ν du fluide intervient dans l'équation (22) par l'intermédiaire de A (voir équation 17). L'équation (22) peut donc être contrôlée pour les deux cas limites correspondant, l'un à $\nu = 0$ et l'autre à $\nu = \infty$. Dans le premier cas, l'équation (22) devient identique à l'équation (2,1) (c'est-à-dire pour $A = \infty$), tandis que, dans le second cas, on obtient, comme le lecteur peut le vérifier facilement, la rotation d'un cylindre solide.

L'équation (3) devient :

$$0 = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial z} \left[(p + \tau h) + \frac{w^2}{2} \varphi \right] \quad (3,2)$$

révélant une distribution statique des pressions le long de la verticale.

Là encore, l'équation (1,2) peut servir à déterminer des valeurs locales du produit (vr) — d'après les profils de surface libre observés, valeurs qui peuvent être confrontées avec les distributions théoriques données par l'équation (22). La figure 2 donne un ensemble de telles courbes de distribution correspondant à $r_{0s} = 0,0587$; elle donne également quelques résultats de mesures correspondants.

TROISIÈME CAS : VORTEX ÉLÉMENTAIRE EN FLUIDE VISQUEUX; ÉCOULEMENT À L'EXTÉRIEUR DU CYLINDRE LIMITÉ PAR L'ORIFICE DE VIDANGE ($r > r_0$).

Ce cas est caractérisé par les conditions suivantes :

This equation has the general solution :

At this place it becomes desirable to introduce a reference velocity $v = V$ at a distance $r = R$ from the z axis to make the formulas dimensionless. Let's designate :

and rewrite Eq. (19) :

The two constants C_{1s} and C_{2s} may be determined from the following two boundary conditions : first, at $r = r_0$ the velocity is $v = v_0$, second, at $r = 0$ the product rv becomes zero since friction exists there with the momentum transport becoming zero. According to Eq. (13), Eq. (21) then becomes :

The viscosity ν of the fluid enters this equation (22) through A (see Eq. 17). Eq (22) may thus be tested for the two limiting cases of $\nu = 0$ and $\nu = \infty$. In the first case Eq. (22) becomes identical with Eq. (2,1) (i.e. for $A = \infty$) while the rotation of a solid plug is obtained, as the reader may easily verify, in the second case.

Eq. (3) becomes :

indicating static pressure distribution in the vertical.

Again, Eq. (1,2) may be used to determine local (vr) —values from observed surface profiles, which values may be checked against the theoretical distributions of Eq. (22). Fig. 2 gives a set of such distribution curves for $r_{0s} = 0.0587$ and some corresponding measured values.

CASE 3 : SINGLE VORTEX IN A VISCOUS FLUID, PART OUTSIDE THE DRAIN OPENING ($r > r_0$).

This case is characterized by :

$$v > 0$$

$$v > 0$$

aucun frottement dans tout plan perpendiculaire à l'axe des z .

no friction in any plane normal to the z -axes :

$$w = 0$$

$$w = 0$$

u et v sont fonction de r seulement

u and v functions of r only

$$Q = Q_0 = \text{const.}$$

$$Q = Q_0 = \text{const.}$$

$$u^2 \ll v^2$$

$$u^2 \ll v^2$$

(23)

Une fois de plus, toutes les dérivées par rapport à t , θ et z sont nulles. L'équation (1) prend la même forme que dans le deuxième cas [équation (14)]. Par définition :

Again, all derivatives with respect to t , θ and z become zero. Eq. (1) takes the same form as in case 2 (eq. 14). By definition :

$$Q = Q_0 = 2 \pi r u l = \text{const.} \quad (24)$$

le produit (ru) est donc constant, et, comme dans le cas précédent, le dernier terme de l'équation (14) devient nul, et l'équation (1,3) qui en résulte est identique à l'équation (1,1). Comme dans le cas précédent l'équation (2) prend la forme de l'équation (16), mais u doit être remplacé par sa valeur déduite de l'équation (24), ce qui donne :

which makes (ru) constant, and again the last term of (14) becomes zero and the resulting Eq. (1,3) is identical with Eq. (1,1). Again, Eq. (2) takes the form Eq. (16), but u must be substituted from Eq. (24), resulting in :

$$\frac{r^2}{\partial r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + (A + 1) r \frac{\partial v}{\partial r} + (A - 1) v = 0 \quad (25)$$

équation qui possède les deux solutions suivantes sous forme non dimensionnelle, ainsi que nous l'avons précisé plus haut.

which has the two following solutions in dimensionless form, as defined previously :

$$\left. \begin{aligned} r_* v_* &= C_{1*} + C_{2*} r_*^{-(A-2)} & \text{pour } A \neq 2 \\ & \text{(for)} & \\ r_* v_* &= C_{1*} + C_{2*} \text{Log}(r_*) & \text{pour } A = 2 \\ & \text{(for)} & \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Les deux constantes dans chacune de ces équations peuvent être déterminées d'après les conditions limites suivantes :

1° Pour $r = R$, les variables r_* et v_* prennent respectivement pour valeur $r_* = 1$ et $v_* = 1$. La seconde des conditions aux limites correspond à r_0 pour lequel v_{0*} doit prendre la même valeur que celle qui se trouve déduite de la partie de l'écoulement intérieur au cylindre considéré, suivant l'équation (22). Ainsi l'équation (26) devient :

The two constants in each equation may be determined from the following boundary conditions : first, at $r = R$ the variables r_* and v_* become $r_* = 1$ and $v_* = 1$, respectively. The second boundary is at r_0 where v_{0*} must equal that as derived from the inside part, Eq. (22). Then Eq. (26) becomes :

$$\left. \begin{aligned} r_* v_* &= \left[\frac{r_{0*} v_{0*} - r_{0*}^{-(A-2)}}{1 - r_{0*}^{-(A-2)}} \right] 1 - r_*^{-(A-2)} + r_*^{-(A-2)} & \text{pour } A \neq 2 \\ & \text{(for)} & \\ r_* v_* &= 1 + (v_{0*} r_{0*} - 1) \frac{\text{Log } r_*}{\text{Log } r_{0*}} & \text{pour } A = 2 \\ & \text{(for)} & \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

La dernière condition qui permet de calculer v_{0*} pour les équations (22) et (27) exprime que

The last condition which permits the determination of v_{0*} for Eq (22) and (27) postulates

la force de frottement pour r_0 doit être la même dans les deux régions considérées. Plus exactement, cette condition exige des valeurs égales de $\partial/\partial r (v/r)$ pour les deux régions. Après des calculs algébriques assez fastidieux, cette considération conduit aux expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} v_{0*} &= \frac{1}{r_{0*}} \left[\frac{(A-2)(1-e^{-A/2})}{A(1-e^{-A/2} r_{0*}^{A-2}) - 2(1-e^{-A/2})} \right] & \text{pour } A \neq 2 \\ v_{0*} &= \frac{1}{r_{0*}} \left[\frac{1-e^{-1}}{1-e^{-1}-2e^{-1} \text{Log } r_{0*}} \right] & \text{pour } A = 2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Physiquement parlant, la valeur 2 pour le paramètre A est rare et ne doit pas entrer en ligne de compte. Pour l'autre valeur, l'équation (2) des cas 2 et 3 peut être écrite de la manière suivante comme solution finale :

With A a physical parameter, the value 2 is rare and may not further be considered. For the other value the equation (2) of cases 2 and 3 may be written down as the final solution :

FIG. 1. — Bac expérimental pour la réalisation de vortex dans un fluide réel.

Experimental tank for the generation of single vortices in a real fluid.

FIG. 2. — Variation du moment de quantité de mouvement vr/v_0r_0 en fonction de la distance r à l'axe (mesurée en diamètre $2r_0$ de l'orifice de vidange), dans des vortex en fluide réel.

Bac expérimental.
Experimental tank.

Variation of the moment of the momentum vr/v_0r_0 for vortices in real fluids in terms of the distance r from the center measured in diameters $2r_0$ of the drain opening.

$N = 4.0$ RPM $A = 13.3$ $r_{0*} = 0.0587$

$N = 8.0$ RPM $A = 12.3$ $r_{0*} = 0.0587$

$N = 4.0$ RPM $A = 21.1$ $r_{0*} = 0.0587$

$N = 8.5$ RPM $A = 15.1$ $r_{0*} = 0.0587$

$N = 8.0$ RPM $A = 17.1$ $r_{0*} = 0.0587$

$N = 4.0$ RPM $A = 25.3$ $r_{0*} = 0.0587$

Quelques-uns des profils de surface libre photographiés.

Some of the water surface profiles photographed.

$$r_* v_* = \frac{(A-2)(1-e^{-A/2}(r_*/r_0)^2)}{A(1-e^{-A/2}r_0^{(A-2)})-2(1-e^{-A/2})} \quad \text{pour } A=2 \quad (2,2)$$

$$r_* v_* = \frac{[A-2(1-e^{-A/2})](1-r_*^{-(A-2)})}{A(1-e^{-A/2}r_0^{(A-2)})-2(1-e^{-A/2})} + r_*^{-(A-2)} \quad \text{pour } A \neq 2 \quad (2,3)$$

Ces deux équations constituent la solution définitive du problème du vortex en écoulement laminaire. Le paramètre A , tel qu'il est défini dans l'équation (17), est ici le paramètre qui fait intervenir à la fois le débit Q_0 et la viscosité. Les formes géométriques sont définies par le paramètre r_0 . Les courbes caractéristiques donnant $v_* r_*/v_0 r_0$ en fonction de r_*/r_0 telles qu'elles sont données sur la figure 2 changeront selon les valeurs de r_0 .

Le déroulement des essais

Un réservoir cylindrique expérimental en verre fut construit de telle sorte que les deux cylindres (fig. 1) puissent être entraînés simultanément à la même vitesse angulaire. Le débit Q était alors introduit entre les deux cylindres, où des palettes entraînaient l'eau à tourner à la même vitesse. Une conduite de vidange munie d'un robinet de réglage évacuait le débit Q depuis le réservoir jusqu'à un déversoir de mesure de débit. La vitesse de rotation variait de 2 à 80 tours par minute et était mesurée par un chronomètre. Les profils de la surface libre étaient photographiés, puis relevés avec précision d'après les photographies.

Le principal résultat de ces essais fut que pour toutes les expériences où n'intervenaient pas d'effets parasites (tel que le frottement additionnel du fond), la forme de la surface libre était celle indiquée par les équations (2,2) et (2,3), mais que les valeurs calculées A étaient plusieurs fois supérieures à celles données par les courbes théoriques correspondant aux courbes observées. Ce fait, joint à plusieurs autres observations, conduit à supposer que les échanges turbulents de quantité de mouvement peuvent être responsables de cet apparent accroissement de la viscosité. L'étude théorique de cette possibilité fait l'objet du cas 4.

QUATRIÈME CAS : LE VORTEX ÉLÉMENTAIRE EN ÉCOULEMENT TURBULENT.

On introduit la turbulence comme une fluctuation des variables autour de leur valeur moyenne. Pour toutes les variables, telles que par exemple la composante de vitesse $u = \bar{u} + u'$, les lettres barrées ($\bar{u}$) signifient qu'il s'agit de valeurs moyennes, tandis que les lettres (u') représentent les fluctuations dont la valeur moyenne dans le temps est nulle. Afin de réduire le nombre excessif des termes des équations, ils sont tous considérés comme des moyennes dans le temps,

These two equations represent the final solution of the vortex problem as a laminar flow problem. The parameter A as defined in Eq (17) is herein the parameter which includes both the flow Q_0 and the viscosity. The geometry is defined by r_0 . Characteristic curves of $v_* r_*/v_0 r_0$ against r_*/r_0 as given in Fig. 2 will change with r_0 .

The Experimental Procedure

An experimental cylindrical tank was constructed out of glass such that both cylinders (see Fig. 1) could be rotated simultaneously at the same angular velocity. The flow Q was then introduced between the two cylinders. Between the two a set of baffles forced the water to rotate at the same velocity as the cylinders. A drain opening with throttle-valve discharged Q out of the tank into a measuring weir. The speed of rotation was varied from 2 to 80 rpm, as determined by stop watch. The water surface profiles were photographed and measured from the photographs.

The basic result of these tests was that for all experiments without interference (such as additional bottom roughness) the shape of the water surface was that of the Eq. (2,2) and (2,3) but that the calculated A -values were several times larger than those of the theoretical curves which coincided with the observed curves. This fact and several other observations made it probable that turbulent momentum transfer may be responsible for this apparent increase of the viscosity. This possibility is investigated theoretically as case 4, therefore.

CASE 4 : SINGLE VORTEX IN TURBULENT FLUID.

Turbulence is introduced as a fluctuation of the variables around the average. For all variables such as for instance the velocity component $u = \bar{u} + u'$, the bar signifies average while ' represents the fluctuation which has a zero time-average. In order to reduce the excessive number of terms in the equations, they are all averaged over time and the well known assumption is made that not only the averages of all fluctua-

et l'on admet l'hypothèse, bien connue, selon laquelle non seulement les valeurs moyennes des termes fluctuants des variables, mais aussi les moyennes de leurs dérivées, peuvent être négligées devant les valeurs moyennes des produits entre elles de ces variables fluctuantes.

L'équation (2), par exemple, prend la forme suivante si, de plus, les dérivées par rapport à t , θ et z , des composantes moyennes, sont supposées nulles :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\bar{u} \bar{v}}{r} = \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{r^2} \right] - \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial r}} - \frac{\bar{v'}}{r} \frac{\partial \bar{v'}}{\partial \theta} - \overline{w' \frac{\partial v'}{\partial z}} - \frac{\bar{u' v'}}{r} \quad (29)$$

L'équation de continuité (4) s'écrit en coordonnées cylindriques et dans le cas de l'écoulement turbulent :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{u}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{u}') + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z} = 0 \quad (30)$$

Suivant nos hypothèses, les trois premiers termes à eux seuls sont égaux à zéro, puisque l'écoulement est permanent. Par conséquent, la somme des trois derniers termes doit aussi être nulle, et ceci à chaque instant et pas seulement en moyenne. Si cette somme des trois derniers termes est multipliée par v' , elle est encore nulle :

$$0 = \frac{v'}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{u}') + \frac{v'}{r} \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \theta} + v' \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z} \quad (31)$$

Si cette équation (31) est retranchée de l'équation (29), les termes fluctuants du membre de droite peuvent être combinés comme suit :

$$\begin{aligned} & -\overline{u' \frac{\partial v'}{\partial r}} - \frac{\bar{v'}}{r} \frac{\partial \bar{v}'}{\partial \theta} - \overline{w' \frac{\partial v'}{\partial z}} - \frac{\bar{u' v'}}{r} - \frac{\bar{u' v'}}{r} - \frac{\bar{v' \partial u'}}{\partial r} - \frac{\bar{v' \partial v'}}{r \partial \theta} - \frac{\bar{v' \partial w'}}{\partial z} \\ & = -\overline{u' \frac{\partial v'}{\partial r}} - \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial r}} - 2 \frac{\bar{u' v'}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v'^2}}{\partial \theta} - \frac{\partial (\bar{v' w'})}{\partial z} \end{aligned} \quad (32)$$

Dans l'équation (32), les deux derniers termes deviennent nuls en tant que dérivées de valeur moyenne par rapport à θ et à z . L'équation (29) se lit maintenant :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\bar{u} \bar{v}}{r} = \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{r^2} \right] - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{u' v'}) - 2 \frac{\bar{u' v'}}{r} \quad (33)$$

Nous reconnaissons maintenant l'expression $-\overline{(u' v')}$ correspondant au flux de quantité de mouvement turbulent traversant une surface cylindrique, expression qui peut être remplacée par le rapport τ_t/ρ , τ_t étant la force de frottement turbulent et ρ la masse spécifique. La force de frottement laminaire τ_l/ρ a pour valeur :

$$\tau_l/\rho = \nu r \frac{\partial}{\partial r} (\bar{v}/r) \quad (34)$$

tuation terms of the variables but also those of their derivatives may be neglected against averages of products of such fluctuating variables.

Eq. (2), for instance, takes the following form if again the derivatives with respect to t , θ and z of the average components are assumed to be zero :

The continuity equation, Eq. (4), reads for turbulent flow in cylinder coordinates :

According to our assumptions, the first three terms alone equal to zero, since the flow is steady. Therefore, the sum of the last three terms must also be zero, and that at every instant, not only as an average. If this sum of the last three terms is multiplied with v' , it is still zero :

If this Eq. (31) is subtracted from Eq. (29) the fluctuating terms on the right side may be combined as follows :

In Eq (32) the two last terms became zero as derivatives of averages with respect to θ and z . Eq. (29) now reads :

Now we recognize $-\overline{(u' v')}$ as the turbulent momentum transfer term through a cylinder surface which may be replaced by τ_t/ρ , the turbulent shear divided by the density. The laminar shear τ_l/ρ is :

et les termes laminaires peuvent être écrits en fonction de τ_l/ρ comme suit :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\bar{u} \bar{v}}{r} = \frac{\partial}{\partial r} (\tau_l/\rho) + \frac{2}{r} (\tau_l/\rho) + \frac{\partial}{\partial r} (\tau_l/\rho) + \frac{2}{r} (\tau_l/\rho) \quad (35)$$

A partir de cette équation on peut conclure que la turbulence a un effet équivalent à celui de la viscosité si elle varie proportionnellement au mouvement tangentiel, ou aussi longtemps que dans l'équation :

$$\varepsilon r \frac{\partial}{\partial r} (v/r) = -\overline{(u' v')} \quad (36)$$

ε reste constant. Ceci semble avoir été vérifié dans la plupart des cas mesurés. On peut alors calculer une valeur effective de la constante A, soit A_e , qui a la forme suivante :

$$A_e = \frac{Q_0}{2 \pi l (\varepsilon + \nu)} \quad (37)$$

Discussion des résultats

Les solutions de ces quatre cas sont données par les équations (3,2), (2,2), (2,3) et (37). L'équation (3,2) signifie que dans tous les cas on a affaire à une répartition hydrostatique des pressions le long des verticales. En réalité, ceci n'est correct que dans la mesure où l'hypothèse des petites valeurs de la composante verticale des vitesses est elle-même correcte. Ceci est toujours vérifié à l'intérieur d'une couche voisine de la surface libre si $Q_0/\pi r_0^2$ est petit, et dans la masse du fluide correspondant à $r > r_0$. Près de l'axe des z , les composantes verticales de vitesse sont généralement appréciables, en particulier pour les petites valeurs de r_0 . Il faut donc s'attendre, au voisinage de l'axe, dans les zones plus profondes, à relever des écarts plus ou moins appréciables entre la répartition effective des pressions et la distribution hydrostatique.

Les équations (2,2) et (2,3) donnent respectivement les répartitions de la vitesse tangentielle à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre correspondant à l'orifice de vidange, dans le cas où le paramètre A est défini par l'équation (37) de manière à tenir compte de l'influence de toute la turbulence possible dans le fluide. La figure 2 montre graphiquement l'allure de ces relations pour quelques valeurs caractéristiques de A. On voit que pour les grandes valeurs de A, c'est-à-dire pour des débits Q_0 importants et (ou) de faibles viscosités, c'est le classique vortex en fluide parfait qui se trouve presque réalisé (cas 1) avec les premiers écarts au voisinage de l'axe. Dans le cas des petites valeurs de A, on se rapproche du cas de la rotation en masse avec vitesse angu-

and the laminar terms may be written in terms of τ_l/ρ as follows :

From this equation one may conclude that turbulence has an equal effect as viscosity if it varies proportionally with the shear motion or as long as ε in the equation :

is constant. This seems to have been the case in all available measurements. An effective constant A_e may thus be developed which has the form :

Discussion of the Results

The solutions of all four cases are given by equations (3.2), (2.2), (2.3), and (37). Equation (3.2) indicates that in all cases static pressure distribution exists in the verticals. This is actually correct only as long as the assumption of small vertical velocity components is correct. This is always fulfilled in a layer near the free surface if $Q_0/\pi r_0^2$ is small and in the bulk of the flow at $r > r_0$. Near the z -axis the vertical velocity components are usually significant, particularly for small r_0 . More or less significant deviations of the pressure distribution from static must, therefore, be expected near the axis in larger depths.

Equations (2.2) and (2.3) give the distributions of the tangential velocity inside and outside the drain diameter, respectively, if the parameter A is defined by equation (37) to include the effect of any possible turbulence in the fluid. Fig. 2 demonstrates graphically the character of these relationships for some key-values of A. It is seen that for large values of A, i.e., for large discharges Q_0 and/or small viscosity the flow commonly known as the frictionless vortex (Case 1) is approximated with the first deviations near the axis. With small A-values the condition of solid rotation with constant angular velocity is approached. From this graph may easily be read that everywhere $d\omega/dr$, the change of the angular velocity ω with r is negative. Its negative value increases with increasing discharge Q_0 .

laire ω constante. Ce graphique montre clairement que dans tous les cas $d\omega/dr$, variation relative de la vitesse angulaire par rapport à r , est négatif. Cette valeur croît avec le débit Q_0 .

En se basant sur ces équations on peut étudier la stabilité du vortex. Supposons que deux tranches horizontales successives présentent des débits Q_0 différents par unité de hauteur. Il en résulte, pour $d\omega/dr$, une valeur négative plus grande dans la tranche à débit Q plus élevé. Pour chaque valeur de la distance r à l'axe, il existe une répartition hydrostatique de la pression selon la verticale. Pour les grandes valeurs de r , les vitesses dans les deux tranches sont, par définition, petites et égales. Les vitesses tangentielles doivent donc être plus grandes dans la tranche à débit Q plus élevé, ce qui se traduit par des accélérations centrifuges plus élevées dans cette tranche. Ces accélérations tendront à freiner l'écoulement radial dans cette tranche et (ou) à accélérer l'écoulement radial dans la tranche à débit plus faible, jusqu'à ce que les deux débits soient égaux, ce qui démontre la stabilité du mouvement.

Cette stabilité, bien connue dans le cas du vortex en fluide parfait, entraîne plusieurs conséquences pratiques :

1° Un tel vortex ne peut pas s'éteindre à l'intérieur du fluide, mais ira en s'amplifiant jusqu'à ce qu'il atteigne une paroi;

2° Si, grâce à des palettes ou à de quelconques obstructions, le moment cinétique est diminué dans une portion du fluide, un certain moment cinétique (et un certain débit Q) est automatiquement prélevé sur l'ensemble du vortex en faveur de cette portion. Par conséquent, le freinage obtenu dans une portion réduira effectivement l'intensité du vortex tout entier. Cette dernière conséquence est extrêmement importante dans les problèmes techniques où il convient d'éviter la naissance des vortex, par exemple dans les crépines de pompe situées dans des bassins d'aspiration peu profonds.

On the basis of these equations it is possible to study the stability of the vortex flow. Let us assume that two consecutive horizontal layers have different discharges Q_0 per unit of height. The resulting $d\omega/dr$ has then a larger negative value in the layer with the larger Q . At all distances r from the axis there exist static pressure distributions in the verticals. At large radii r the velocities in the two layers are small and equal by definition. The tangential flow velocities must thus be larger in the layer with the higher discharge Q , resulting in higher centrifugal accelerations in that layer. These will decelerate radially the flow in that layer and/or accelerate the radial flow in the layer with the smaller Q until the flows in both layers are equal, thus proving the stability of the vortex motion.

This stability, which is well known for the frictionless vortex, has many practical consequences :

1) Such a vortex can not end in the interior of the fluid, but will always grow in length until it reaches a boundary of the fluid.

2) If the momentum is reduced in one section by baffles or other obstructions, momentum (and discharge Q) is automatically diverted from the remaining vortex to this section. Frictional effects in one section will effectively reduce the strength of the entire vortex, therefore. This last effect is very important in engineering problems where the generation of vortices must be prevented, such as at the suction bells of pumps in shallow suction chambers.