

Étude d'une singularité dans les écoulements plans des liquides pesants en milieux poreux

Study of singularity in two dimensional flows of ponderable fluids in porous media

PAR

J. KRAVTCHENKO,

G. SAUVAGE DE SAINT-MARC,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE

DIRECTEUR ADJOINT
DU LABORATOIRE DAUPHINOIS D'HYDRAULIQUE

ET M. BORELI

INGÉNIEUR-DOCTEUR
INSTITUT HYDROTECHNIQUE, BELGRADE

Dans un travail antérieur, les auteurs ont donné une méthode générale de discussion des singularités que peut présenter en un point frontière de son domaine de définition un écoulement plan des eaux souterraines pesantes. L'emploi de cette méthode est illustré ici sur un nouvel exemple, particulièrement typique, traité à fond : celui du point commun à une surface libre et à une paroi imperméable.

Les auteurs présentent une série de remarques propres à abrégier la discussion dans les cas concrets susceptibles d'intéresser l'ingénieur.

In an earlier article, the authors have already shown a general method of discussing the singularities which a two-dimensional flow of ponderable ground water can present at a point on its boundary. The use of this method is now illustrated on a new and particularly typical example that is fully treated: this is the case of a point common to a free surface and to an impermeable wall.

The authors present observations which aim to shorten the discussion in concrete cases of interest to engineers.

CHAPITRE I

INTRODUCTION. — RAPPEL DES NOTATIONS

1. — Dans un mémoire antérieur [1] (*), nous avons décrit une méthode générale et rigoureuse de discussion des singularités que peut présenter un écoulement plan, permanent, d'un liquide parfait en un milieu poreux, homogène et isotrope, dont la constante de Darcy sera notée k . Nous avons cru devoir illustrer ce premier exposé par un nouvel exemple d'application; voici pourquoi.

L'article [1] a été rédigé d'une manière volontairement abstraite. Nous y avons, avant tout, cherché à mettre en lumière la généralité de notre méthode analytique. Nous avons ensuite appliqué celle-ci à la discussion de deux types de singu-

larité; et, pour rendre uniforme la marche des calculs, nous nous sommes interdit tout recours à des artifices simplificateurs particuliers. Au surplus, de tels artifices ne sont légitimes que si on connaît à l'avance la nature du résultat et notre méthode apporte, précisément, les justifications à priori à des procédés plus rapides.

D'un autre côté, dans [1], nous avons abrégé les discussions, un peu longues, de toutes les éventualités possibles, en supposant connu, à priori, le voisinage de la singularité dans le plan de la vitesse complexe. En fait, il n'en est pas ainsi. On sait seulement, à priori, que l'image de la singularité, dans le plan en question, se trouve en l'un des deux points communs à un cercle et à une droite, donnés à l'avance. Il y a, dès lors, une double indétermination à lever :

(*) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie, placée à la fin de l'article.

faire, d'abord, le choix entre les deux points ci-dessus; définir, ensuite, le voisinage de la singularité, limité par un arc de cercle et un segment de droite précédents.

Nous avons pensé qu'il y avait intérêt à discuter sur un cas nouveau toutes ces éventualités, théoriquement toutes possibles et dont on connaît, par ailleurs, des exemples concrets de réalisation.

Pour faire cette discussion approfondie, nous avons choisi un type de point singulier, spécialement important dans l'art de l'ingénieur: le point commun à une paroi imperméable et à une surface libre. Pour simplifier, nous avons supposé plane la paroi imperméable.

Il se trouve que la singularité étudiée peut présenter trois formes distinctes; le choix entre celles-ci ne peut être fait qu'en fonction des caractéristiques globales du régime. Une fois acquis les résultats généraux ci-dessus, nous faisons voir comment l'emploi des artifices appropriés permet de retrouver d'une manière élémentaire l'ensemble de nos conclusions. Mais, encore une fois, cette méthode directe n'est légitime que pour autant que l'on dispose d'un moyen d'en justifier autrement, et en toute rigueur, l'emploi.

Dans toute la suite, nous reprenons les notations de [1]; les références à ce travail seront suivies de l'indication du paragraphe ou de la formule à utiliser.

Il est juste de rappeler que nos raisonnements ne sont qu'une variante, complétée par quelques remarques originales, des résultats de POLOUBARINOVA-KOTCHINA [2]. Le lecteur, familier avec la langue anglaise, pourra se reporter au grand traité de MUSKAT [3], pour l'établissement des lois générales de l'écoulement en milieu poreux. Enfin, on trouvera dans la thèse de BORELI [4] une partie des résultats de ce travail, obtenus par de tout autres moyens.

2. — Le plan (vertical) du mouvement est, comme dans [1], rapporté au système d'axes Oxy (Oy étant la verticale ascendante); on pose encore $z = x + iy$. Supposons que la paroi imperméable C_1 soit un segment porté par la droite d'équation :

$$x \sin \pi \alpha - y \cos \pi \alpha = 0,$$

où $0 \leq \alpha \leq 1$; $\pi \alpha$ est l'inclinaison sur l'horizontale Ox de la paroi orientée positivement de telle sorte qu'un observateur, se déplaçant dans le sens positif le long d'elle, ait à sa gauche le domaine D du liquide en mouvement — que nous supposons simplement connexe.

Dans le plan z , la position et la forme de la ligne libre C_4 ne sont pas connues a priori; il en résulte que la position sur C_1 du point z_{14} , commun à C_4 et à C_1 , n'est pas donnée à l'avance.

Mais, sans restreindre la généralité, on peut admettre que $z_{14} = 0$; il suffira, en effet, d'un simple changement d'axes pour se ramener à ce cas particulier.

Introduisons encore, comme dans [1], § 1, le potentiel et la vitesse complexes f et Ω :

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y);$$

$$\Omega(z) = \frac{df}{dz} = u(x, y) - iv(x, y).$$

On sait que l'ensemble des lignes C_1 et C_4 constitue une même ligne de courant; il s'ensuit que, dans le plan f , les images Γ_1 et Γ_4 de C_1 et de C_4 seront des segments d'une droite $\psi = C^te$, admettant pour point commun $f_{14} = f(z_{14}) = f(0)$. Sans restreindre la généralité, on peut encore prendre $\psi = 0$ pour équation commune du support de Γ_1 et de Γ_4 et poser $f_{14} = 0$. Supposons que l'on sache a priori que l'on rencontre dans cet ordre les éléments C_1 et C_4 lorsqu'on décrit dans le sens direct la frontière C de D ; alors nous aurons dans le plan z une configuration du type représenté sur la figure 1 (encore que nous

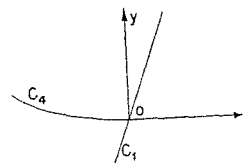


FIG. 1

ne puissions rien dire, pour le moment, de l'allure de la ligne C_4 dans le voisinage de l'origine). L'image Δ de D par $f = f(z)$ sera limitée par les segments rectilignes Γ_1 ($\psi = 0$; $0 \leq \varphi \leq \varphi_2$) et Γ_2 ($\psi = 0$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq 0$) et, dans le voisinage de ces éléments frontières, au moins, se trouvera dans le domaine $\psi \leq 0$ (cf. fig. 2).

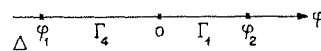


FIG. 2

Dans le plan Ω de la vitesse complexe, l'image γ_4 de C_4 sera un arc du cercle :

$$u^2 + v^2 - kv = 0, \quad (1)$$

et l'image γ_1 de C_1 sera un segment de la droite :

$$u \sin \pi \alpha + v \cos \pi \alpha = 0. \quad (2)$$

Le domaine δ , image de D par $\Omega(z)$, sera limité par la frontière γ contenant les deux éléments γ_1 et γ_4 , dont on vient de définir les supports. Comme nous nous limitons à l'étude des régimes physiquement acceptables, il est légitime de supposer que le vecteur vitesse est bien déterminé

en chaque point du domaine $D + C$. Cela entraîne que γ est constitué par un contour continu; il existe donc un point $\Omega_{14} = \Omega(z_{14}) = \Omega(0)$, commun à γ_1 et à γ_4 . D'après (1) et (2), on ne peut avoir que l'une des deux éventualités :

$$\Omega_{14} = 0; \tag{3}$$

$$\Omega_{14} = -k \sin \pi \alpha e^{-i \pi \alpha}. \tag{3'}$$

Nous verrons que ces deux éventualités sont également possibles; nous constaterons que, de plus, le voisinage de Ω_{14} , appartenant à δ et limité par les courbes (1) et (2), n'est pas déterminé, à priori, dans le cas (3'). Nous reviendrons au n° 15 sur ces indéterminations bien connues des techniciens et particulièrement spectaculaires dans le cas de la singularité étudiée.

3. — Représentons conformément les domaines D , Δ et δ sur le demi plan supérieur Σ de la variable complexe auxiliaire $\zeta = \xi + i \eta$.

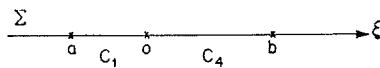


FIG. 3

On peut, sans restreindre la généralité, supposer que la fonction $z = z(\zeta)$, réalisant l'application conforme de Σ sur D , fait correspondre $z_{14} = 0$ et $\zeta = 0$: $z_{14} = z(0) = 0$. Alors, les images de

C_4 et de C_1 dans Σ seront les segments $\eta = 0$, $a \leq \xi \leq 0$, $0 \leq \xi \leq b$, où a et b sont des constantes réelles convenables. Posons :

$$\left. \begin{aligned} F(\zeta) &= \frac{df}{d\zeta} \\ Z(\zeta) &= \frac{dz}{d\zeta} \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Comme on l'a montré dans [1], chapitre II, tout revient à préciser les singularités de F et de Z à l'origine.

4. — Voici maintenant le plan de notre mémoire.

Nous ferons connaître tous les types des singularités que peuvent présenter les fonctions inconnues au point z_{14} . Dans cette phase de l'étude nous ne ferons intervenir que les données locales, à savoir : la définition de z_{14} commun à C_1 et à C_4 (que par hypothèse on rencontre dans cet ordre en décrivant C dans le sens direct) et l'équation de C_1 . Nous insisterons sur les indéterminations qui s'introduisent nécessairement dans un problème de cette nature chaque fois que l'on se borne à exploiter les conditions locales seules.

Au chapitre III, nous indiquons les procédés propres à simplifier la mise en œuvre de la théorie générale et nous présentons une série de remarques utiles au technicien.

CHAPITRE II

ETUDE ANALYTIQUE DE LA SINGULARITÉ z_{14}

5. -- En utilisant les notations du § 2 de [1], on voit que les fonctions $F(\zeta)$ et $Z(\zeta)$, définies par (4), vérifient les conditions frontières ci-après :

$$\begin{cases} I_m(F) = 0, \\ I_m(Ze^{-i\pi\alpha}) = 0; \end{cases} \text{ pour } \eta = 0; a \leq \xi \leq 0; \tag{5}$$

et :

$$\begin{aligned} I_m(iF + kZ) &= 0; \\ I_m(F) &= 0; \end{aligned} \text{ pour } \eta = 0; 0 \leq \xi \leq b. \tag{6}$$

Le symbole $I_m(F)$ désigne encore la partie imaginaire d'une fonction complexe F . D'après [1], chapitre II, ces relations entraînent que, dans le voisinage de l'origine, les fonctions F et Z sont nécessairement de la forme :

$$F(\zeta) = K_1 U_1(\zeta) + K_2 U_2(\zeta); \tag{7}$$

$$Z(\zeta) = K_3 U_1(\zeta) + K_4 U_2(\zeta),$$

où K_j ($j = 1, 2, 3, 4$) sont des constantes complexes, à priori inconnues :

$$K_j = K'_j + i K''_j, \tag{8}$$

et l'on a posé :

$$U_1(\zeta) = \zeta^{\lambda_1} u_1(\zeta); \quad U_2(\zeta) = \zeta^{\lambda_2} u_2(\zeta). \tag{9}$$

Rappelons que $u_1(\zeta)$ et $u_2(\zeta)$ sont des fonctions holomorphes à l'origine, telles que :

$$u_1(0) = u_2(0) = 1;$$

λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles, à priori in-

connues, dont la différence est supposée distincte d'un entier. Si $\lambda_1 - \lambda_2 = r$, r étant entier, les formules (9) sont à remplacer par les suivantes :

$$U_1(\zeta) = \zeta^{\lambda_1} u_1(\zeta); \quad U_2(\zeta) = \zeta^{\lambda_1} u_2(\zeta) \log \zeta \quad (9')$$

Nous nous proposons tout d'abord d'appliquer la méthode exposée au chapitre II de [1] pour déterminer λ_1 et λ_2 et exprimer les K_j au moyen de deux constantes réelles seulement.

6. — En comparant les formules (11) de [1] aux relations (5) et (6) ci-dessus, on voit qu'il convient de prendre ici $n = 1$, $m = 4$. On a donc le tableau des coefficients ci-après (cf. [1], chap. II) :

$$\begin{matrix} m = 4 \\ n = 1 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{ll} Q_{41} = 1; P_{41} = 0; N_{41} = 0; & M_{41} = 0; \\ Q_{42} = 0; P_{42} = 1; N_{42} = k; & M_{42} = 0; \\ Q_{11} = 1; P_{11} = 0; N_{11} = 0; & M_{11} = 0; \\ Q_{12} = 0; P_{12} = 0; N_{12} = \cos \pi \alpha; & M_{12} = -\sin \pi \alpha. \end{array} \right.$$

Il en résulte que l'équation aux exposants caractéristiques λ_1 et λ_2 s'écrit ici (cf. l'équation (17) de [1]) :

$$\begin{vmatrix} \cos \pi \lambda & \sin \pi \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos [\pi(\lambda - \alpha)] & \sin [\pi(\lambda - \alpha)] \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Après développement, cela donne :

$$k \sin \pi \lambda \sin [\pi(\lambda - \alpha)] = 0.$$

On voit donc que :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = \alpha + r_1; \\ \lambda_2 = r_2, \end{array} \right\} \quad (10)$$

où r_1 et r_2 sont des entiers inconnus a priori. Il s'ensuit que nous sommes dans le cas régulier (9) si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$; les cas singuliers seront examinés à part.

7. — Les équations (18), (18'), (19), (19') de [1] permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned} K_1 = 0; \quad K_3 = R_3; \quad K_2 = -R_4 k \sin \pi \alpha; \\ K_4 = R_4 e^{i\pi \alpha}, \end{aligned} \quad (11)$$

où R_3 et R_4 sont des constantes réelles arbitraires. Portant ceci dans (7), il vient [cf. (9), (10) et (11)] :

$$\left. \begin{array}{l} F(\zeta) = -R_4 k \sin \pi \alpha \zeta^{r_2} u_2(\zeta); \\ Z(\zeta) = R_3 \zeta^{\alpha+r_1} u_1(\zeta) + R_4 e^{i\pi \alpha} \zeta^{r_2} u_2(\zeta). \end{array} \right\} \quad (12)$$

Compte tenu de (4), on en tire, en se rappelant que $f(0) = f_{14} = 0$ et $z(0) = z_{14} = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} f(\zeta) = -\frac{R_4}{r_2 + 1} k \sin \pi \alpha \zeta^{r_2+1} v_2(\zeta); \\ z(\zeta) = \frac{R_3}{\alpha + r_1 + 1} \zeta^{\alpha+r_1+1} v_1(\zeta) \\ \quad + \frac{R_4}{r_2 + 1} e^{i\pi \alpha} \zeta^{r_2+1} v_2(\zeta), \end{array} \right\} \quad (13)$$

où $v_1(\zeta)$ et $v_2(\zeta)$ sont encore des fonctions holomorphes à l'origine telles que $v_1(0) = v_2(0) = 1$.

Telles sont les seules conclusions que nous pouvons tirer des conditions aux limites (5) et (6).

8. — Pour aller plus loin, nous sommes, comme toujours, obligés d'utiliser les données locales a priori dont nous disposons au sujet des domaines D , Δ et δ . L'examen des figures 2 et 3 montre aussitôt que la fonction $f = f(\zeta)$ fait correspondre au segment $\eta=0$, $a \leq \xi \leq b$, le segment $\psi=0$; $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1$, comprenant l'origine; il s'ensuit que la correspondance entre Σ et Δ est conforme au point $\zeta=0$. D'après cela : $r_2 + 1 = 1$, d'où $r_2 = 0$. Les formules (13) s'écrivent donc :

$$\left. \begin{array}{l} f(\zeta) = -R_4 k \sin \pi \alpha \zeta v_2(\zeta); \\ z(\zeta) = \frac{R_3}{\alpha + r_1 + 1} \zeta^{\alpha+r_1+1} v_1(\zeta) + R_4 e^{i\pi \alpha} \zeta v_2(\zeta). \end{array} \right\} \quad (14)$$

De plus, on lit sur les figures 2 et 3 que l'expression $\xi f(\xi) = \xi \varphi(\xi)$ doit être négative pour $a \leq \xi \leq b$, puisque $\varphi(\xi)$ est négatif pour $0 \leq \xi \leq b$. Comme $v_2(0) = 1$, (14₁) montre que $R_4 > 0$, le cas limite $R_4 = 0$ étant exclu.

On voit du même coup que $R_3 \neq 0$. Si, en effet, on avait $R_3 = 0$, $\Omega(\zeta) = [f'(\zeta)/z'(\zeta)]$ serait holomorphe à l'origine; il s'ensuivrait que le domaine δ ne présenterait pas de singularité au point $\Omega_{14} = \Omega(0)$. Or, les formules (1), (2), (3) et (3') prouvent bien que δ possède en ce point un point anguleux.

Enfin, nous avons admis que $z_{14} = z(0) = 0$; (14₂) entraîne alors :

$$\alpha + r_1 + 1 > 0, \quad (15)$$

le cas de l'égalité étant exclu, puisque $0 < \alpha < 1$.

9. — Pour poursuivre notre discussion, examinons le plan Ω et cherchons à fixer la valeur de r_1 et à préciser le signe de R_3 . Il nous faut, conformément aux indications de [1], passer en revue tous les voisinages possibles de δ , attendant au point Ω_{14} [donné soit par (3), soit par (3')], à préciser dans chaque cas la discontinuité subie

par l'argument du vecteur $\Omega(\zeta) - \Omega_{14}$ lorsque $\zeta = \xi$ traverse l'origine et à comparer le résultat avec la formule déduite de (4) et de (14) :

$$\Omega(\zeta) = \frac{F(\zeta)}{Z(\zeta)} = \frac{-R_4 k \sin \pi \alpha u_2(\zeta)}{R_3 \zeta^{\alpha+r_1} u_1(\zeta) + R_4 e^{i\pi\alpha} u_2(\zeta)} \tag{16}$$

Il semble commode de conduire cette discussion comme il suit. Posons d'abord :

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{R_3}{R_4} ; \\ w(\zeta) &= \frac{u_1(\zeta)}{u_2(\zeta)}. \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

D'après sa définition même, $w(\zeta)$ est holomorphe à l'origine et on a : $w(0) = 1$. Cherchons si on peut prendre pour Ω_{14} le point défini par (3'). D'après (16), la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi s'écrit :

$$\alpha + r_1 > 0 \tag{18}$$

Comme $0 < \alpha < 1$, cela exige que :

$$r_1 \geq 0. \tag{19}$$

Moyennant (17) et (18), on déduit de (16) le développement limité :

$$\begin{aligned} \Omega(\zeta) - \Omega_{14} &= \Omega(\zeta) + k \sin \pi \alpha e^{-i\pi\alpha} \\ &= c k \sin \pi \alpha e^{-2\pi\alpha i} \zeta^{\alpha+r_1} + O(|\zeta|^{r_1+\alpha+1}), \end{aligned} \tag{20}$$

où, suivant l'usage, le symbole $O(|\zeta|)$ désigne une expression d'ordre infinitésimal $|\zeta|$ pour $|\zeta|$ petit. On déduit de (20) que le vecteur $\Omega(\zeta) - \Omega_{14}$, d'origine Ω_{14} , tourne dans le sens négatif d'un angle valant $-\pi(\alpha + r_1)$ lorsque le point ζ décrit la demi-circonférence $L : \zeta = |\zeta| e^{i\theta}$ ($|\zeta| = C^{te}$) de petit rayon, θ décroissant de π à 0 . L'angle $\pi(\alpha + r_1)$, d'après (18), doit être inférieur à 2π ; sinon, le domaine δ se recouvrirait dans le voisinage de Ω_{14} , ce qui est impossible. Cela exige : $\alpha + r_1 < 2$; eu égard à (19), on en conclut que les seules valeurs possibles de l'entier r_1 sont :

$$r_1 = 0 \quad r_1 = 1 \tag{21}$$

Le vecteur $\Omega(\zeta) - \Omega_{14}$, d'origine Ω_{14} , balaie l'intérieur du voisinage de δ attenant à Ω_{14} lorsque ζ décrit la demi-circonférence L ci-dessus; le développement limité (20) montre alors que si c change de signe, le voisinage angulaire en cause se change en son opposé par rapport au sommet Ω_{14} . Il nous suffira donc de prendre $c > 0$ dans (20); la remarque précédente nous permettra d'étendre aisément notre discussion au cas : $c < 0$. Supposons donc $c > 0$; comme $k \sin \pi \alpha > 0$, on tire de (20) :

$$\left. \begin{aligned} \arg [\Omega(\xi) - \Omega_{14}] &= (r_1 - \alpha) \pi + 2q\pi, & \text{pour } \xi < 0; \\ \arg [\Omega(\xi) - \Omega_{14}] &= -2\pi\alpha + 2q\pi + \dots & \text{pour } \xi > 0, \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

où q est un entier quelconque et où le symbole \dots désigne une fonction tendant vers zéro avec ξ . Deux cas sont alors à considérer :

$$1) \quad \alpha - \frac{1}{2} > 0$$

Dans le plan Ω , on a, d'après (21) et (22), les dispositions des figures 4₁ (pour $r_1 = 0$) et 4₂ (pour $r_1 = 1$) :

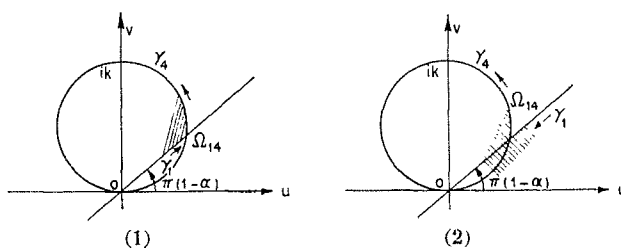


FIG. 4

Le voisinage de δ attenant à Ω_{14} a été, sur chaque figure, couvert de hachures : les flèches indiquent le sens de parcours de γ correspondant au sens de parcours de $\eta = 0$; $a \leq \xi \leq b$ dans le sens des ξ croissants.

$$2) \quad \alpha - \frac{1}{2} < 0$$

Les configurations du plan Ω , correspondant au choix de $r_1 = 0$ et $r_1 = 1$, respectivement, sont représentées sur les figures 5₁ et 5₂; on a adopté

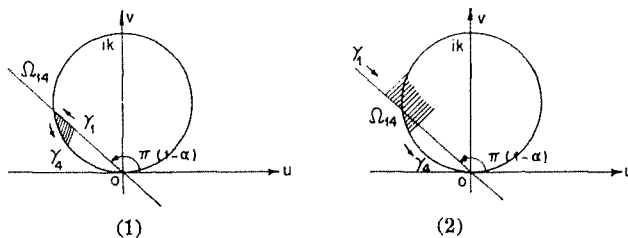


FIG. 5

les conventions ci-dessus pour noter les voisinages de δ attenant au point Ω_{14} .

10. — Cherchons maintenant s'il peut arriver que $\Omega_{14} = 0$ [cf. (3)]. D'après (16), cela exige : $\alpha + r_1 < 0$, donc, eu égard à (15), $r_1 = -1$. La formule (16), compte tenu de (17), donne le développement limité suivant, valable dans le voisinage de l'origine :

$$\Omega(\zeta) = -\frac{k \sin \pi \alpha}{c} \zeta^{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{c} e^{i\pi\alpha} \zeta^{1-\alpha} \right) + \varepsilon(\zeta) \tag{23}$$

où $\varepsilon(\zeta)$ est de la forme $O[|\zeta|^{2-\alpha}]$ pour $\alpha < (1/2)$ et $O[|\zeta|^{3(1-\alpha)}]$ pour $\alpha > (1/2)$. D'après (23), le vecteur $\Omega(\zeta)$, lié à l'origine $\Omega_{14} = 0$, ou même le vecteur :

$$-\frac{k \sin \pi \alpha}{c} \zeta^{1-\alpha}$$

balaie le voisinage de δ attenant à Ω_{14} lorsque le point ζ décrit la demi-circonférence L , introduite au paragraphe 9. Comme $k \sin \pi \alpha > 0$, on vérifie immédiatement que pour $c > 0$, on a, dans le plan Ω , la disposition de la figure 6₁; la figure 6₂ concerne le cas $c < 0$. On a encore couvert de hâchures le voisinage de δ attenant à l'origine.

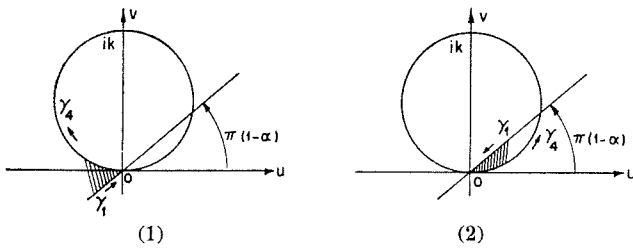


FIG. 6

Il est à remarquer que ces conclusions sont indépendantes du signe de $\alpha - (1/2)$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier a priori que le point $\Omega_1(\zeta)$ [cf. (23)] :

$$\Omega_1(\zeta) = -\frac{k \sin \pi \alpha}{c} \left(1 - \frac{e^{i\pi\alpha}}{c} \xi^{1-\alpha}\right) \xi^{1-\alpha}, \xi > 0$$

décrit un arc de parabole osculatrice au cercle (1) à l'origine.

On peut dégager de la discussion qui précède une conclusion fort importante : la donnée a priori de Ω_{14} et du voisinage de δ attenant à ce point permet de déterminer sans ambiguïté la valeur de l'entier r_1 et le signe de la constante c ; or, comme $R_4 > 0$, d'après les résultats du paragraphe 8, on conclut de là [cf. (17)] que le signe de R_3 serait alors connu.

11. — De tout ce qui précède, il résulte qu'on a, dans tous les cas [cf. (14₁)] :

$$f(\zeta) = -R_4 k \sin \pi \alpha \zeta v_2(\zeta); \quad R_4 > 0 \quad (24)$$

Quant à $z(\zeta)$, les discussions des paragraphes 9 et 10 permettent seulement de réduire à trois les hypothèses à discuter [cf. (14₂)] :

$$z(\zeta) = \frac{R_3}{\alpha + 1} \zeta^{\alpha+1} v_1(\zeta) + R_4 e^{i\pi\alpha} \zeta v_2(\zeta); \quad \left. \begin{aligned} \Omega_{14} &= -k \sin \pi \alpha e^{-i\pi\alpha}; \end{aligned} \right\} (25)$$

$$z(\zeta) = \frac{R_3}{\alpha + 2} \zeta^{\alpha+2} v_1(\zeta) + R_4 e^{i\pi\alpha} \zeta v_2(\zeta); \quad \left. \begin{aligned} \Omega_{14} &= -k \sin \pi \alpha e^{-i\pi\alpha}; \end{aligned} \right\} (26)$$

$$z(\zeta) = \frac{R_3}{\alpha} \zeta^\alpha v_1(\zeta) + R_4 e^{i\pi\alpha} \zeta v_2(\zeta); \quad \left. \begin{aligned} \Omega_{14} &= 0. \end{aligned} \right\} (27)$$

Rappelons que dans les relations précédentes α est une constante donnée : $0 < \alpha < 1$; R_3 est une constante réelle dont le signe est inconnu. Nous allons montrer comment l'étude locale dans le plan z permet d'éliminer quelques-unes des éventualités précédentes.

12. — Etudions le voisinage de la singularité dans le plan du mouvement en utilisant les formules (25). Les équations paramétriques approchées de la ligne libre C_4 sont données par les développements limités, obtenus en séparant le réel et l'imaginaire dans (25) :

$$\left. \begin{aligned} x(\xi) &= R_4 \xi \cos \pi \alpha + \frac{R_3}{\alpha + 1} \xi^{\alpha+1} + O(\xi^2); \\ y(\xi) &= R_4 \xi \sin \pi \alpha + O(\xi^2); \end{aligned} \right\} \xi > 0 \quad (28)$$

Rappelons que $z_{14} = z(0) = 0$. On voit de suite que : $y > 0$ près de z_{14} sur C_4 ; cela est conforme à ce fait, bien connu, que l'ordonnée d'une C_4 ne peut que décroître quand on la décrit dans le sens du mouvement. On peut donc former l'équation cartésienne approchée de C_4 :

$$x = y \cotg \pi \alpha + \frac{R_3 y^{\alpha+1}}{(\alpha + 1) (R_4 \sin \pi \alpha)^{\alpha+1}} + O(y^2), \quad y > 0 \quad (28')$$

A partir de (28) — ou de (28') — on peut vérifier immédiatement les propriétés suivantes : dans le voisinage de z_{14} , C_4 possède une tangente continue; C_4 touche C_1 au point z_{14} , dans le voisinage de z_{14} , la courbure $\rho(y)$ de C_4 est de la forme :

$$\rho(y) = \frac{R_3 \alpha (\sin \pi \alpha)^{2-\alpha}}{R_4^{1+\alpha}} y^{\alpha-1} + O(1);$$

le rayon de courbure de C_4 est donc nul en z_{14} .

Il nous reste à préciser les conditions propres à écarter tout danger de recoupement de C_4 avec C_1 . Nous avons admis qu'en décrivant C dans le sens direct, on rencontre, dans cet ordre, les éléments C_1, z_{14}, C_4 . Or, C_1 est une portion de paroi imperméable qui se prolonge au-delà de z_{14} . D'après cela, C_4 doit se trouver à gauche de C_1 , lorsqu'on décrit ce segment dans le sens ascendant (cf. fig. 1). Il en résulte que $x(\xi)$ et $y(\xi)$, donnée par (28), doivent, pour de petites valeurs de $\xi > 0$, vérifier l'inégalité :

$$x(\xi) \sin \pi \alpha - y(\xi) \cos \pi \alpha < 0. \quad (29)$$

Compte tenu de (28), cela entraîne :

$$R_3 < 0 \tag{30}$$

Ainsi, ici $c < 0$ [cf. (17)]. On voit donc que dans l'éventualité (25) le voisinage de δ appartenant à Ω_{14} [défini alors nécessairement par (3')] est déterminé; cela réduit de moitié le nombre de cas possibles.

13. — La discussion de l'éventualité (26) se fait d'une manière toute semblable. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les propriétés ci-après, qui se lisent sur (26) : C_1 présente, dans le voisinage de z_{14} , une courbure finie et continue, nulle en z_{14} [on se rappellera que $f(\zeta)$ étant réel pour ζ réel, il en sera de même de $v_2(\zeta)$, en vertu de (24)]; C_1 touche C_4 en z_{14} et l'ordre du contact est $2 + \alpha$; la condition locale (29), de non-recoupement de C_4 avec C_1 , est assurée moyennant l'inégalité (30).

14. — Abordons maintenant l'étude de l'éventualité (27). Les équations paramétriques de C_4 s'écrivent ici :

$$\begin{cases} x(\xi) = \frac{R_3}{z} \xi^\alpha + R_4 \xi \cos \pi \alpha + O(\xi^{\alpha+1}); \\ y(\xi) = R_4 \xi \sin \pi \alpha + O(\xi^{\alpha+1}); \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \xi > 0 \end{array} \right. \tag{31}$$

ou, sous forme cartésienne :

$$x = \frac{R_3 y^\alpha}{z (R_4 \sin \pi \alpha)^\alpha} + y \cotg \pi \alpha + O(y^{1+\alpha}); \quad y > 0 \tag{31'}$$

On conclut de là que C_4 possède encore, dans le voisinage de la singularité, une tangente continue; mais cette fois, la tangente à C_4 au point z_{14} est horizontale. La courbure $\rho(y)$ de C_4 est de la forme :

$$|\rho(y)| \sim \frac{(1 - \alpha) (R_4 \sin \pi \alpha)^{2\alpha}}{R_3^2} y^{1-2\alpha}.$$

On voit que pour $y \geq 0$, $\rho(y)$ est finie et continue si $\alpha \leq (1/2)$; au contraire, si $\alpha > (1/2)$, $\rho(y)$ présente pour $y = 0$ un infini d'ordre $y^{1-2\alpha}$. Les équations paramétriques (31) prouvent que la condition (29) de non-recoupement de C_1 et C_4 entraîne encore l'inégalité (30); donc le paramètre c est négatif [cf. (17)].

15. — Nous pouvons maintenant conclure. Les conditions (5) et (6) permettent de définir les exposants caractéristiques λ_1 et λ_2 [cf. (10)] à des entiers additifs près et d'exprimer les constantes complexes K_j ($j = 1, 2, 3, 4$) au moyen de deux paramètres réels arbitraires R_3 et R_4 [cf. (8)]. L'examen des plans f, Ω, z — où nous n'utilisons qu'une seule hypothèse, à savoir qu'on rencontre

C_1 et C_4 dans cet ordre lorsqu'on décrit C dans le sens direct, fournit les précisions suivantes : $R_4 > 0$; $R_3 < 0$; l'entier additif r_1 de (10₁) ne peut prendre que les valeurs : $-1, 0, 1$. Il subsiste donc une certaine part d'indétermination dans la nature de la singularité au point z_{14} ; en particulier, on ne sait déterminer, à partir des données locales seules, la vitesse complexe $\Omega_{14} = \Omega(z_{14})$, qui peut être donnée soit par (3), soit par (3'); l'allure de la fonction $z(\zeta)$, à l'origine, peut prendre l'une des formes (25), (26), (27), entre lesquelles les conditions locales ne permettent pas de faire un choix a priori.

Il devient donc indispensable de faire appel aux conditions globales caractérisant l'écoulement pour déterminer la nature de la singularité z_{14} . On trouvera dans [4] et [5] l'étude détaillée, poussée jusqu'aux applications numériques, d'un régime réalisant les deux éventualités (25) et (27). Dans les exemples précités de BORELI, le cas (27) apparaît comme général. La configuration (25) ne peut avoir lieu que comme cas limite du cas général; alors, les paramètres indépendants caractérisant l'écoulement doivent vérifier une relation, formée par BORELI. Nous ne connaissons pas d'exemple d'écoulement réalisant l'éventualité (26); il semble qu'elle ne puisse avoir lieu que dans des circonstances tout à fait exceptionnelles que nous chercherons à préciser dans un travail ultérieur.

16. — Pour achever, il nous reste à traiter les cas exceptionnels où $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$; les relations (10) montrent qu'alors $\lambda_1 - \lambda_2$ se réduit à un entier et la théorie précédente est à reprendre. Nous nous bornerons à l'examen du cas $\alpha = 0$; l'étude de l'éventualité $\alpha = 1$ est absolument analogue.

Supposons donc $\alpha = 0$. Les résultats du n° 11 de [1] prouvent que les constantes K_2 et K_4 des formules (7) et (9') du présent mémoire s'obtiennent encore à partir de (11), où on ferait simplement : $\alpha = 0$. On trouve ainsi :

$$K_2 = 0; \quad K_4 = R_4.$$

Par contre, K_1 et K_3 sont solutions du système (18') et (20) de [1]; on trouve immédiatement :

$$K_1 = k \pi R_4; \quad K_3 = R_3 - \pi R_4 i.$$

Les formules (7) et (9') permettent alors d'écrire :

$$\begin{cases} F(\zeta) = k \pi R_4 u_1(\zeta); \\ Z(\zeta) = (R_3 - \pi i R_4) u_1(\zeta) + R_4 u_2(\zeta) \log \zeta. \end{cases} \tag{32}$$

Car, d'après ce qu'on a vu au § 8, $r_2 = 0$.

On en tire, par simple intégration, dans l'hypothèse $z(0) = f(0) = 0$:

$$\left. \begin{aligned} f(\zeta) &= k \pi R_4 \zeta v_1(\zeta); \\ z(\zeta) &= (R_3 - \pi i R_4) \zeta v_1(\zeta) \\ &\quad + R_4 \zeta [v_2(\zeta) \log \zeta - v_3(\zeta)], \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

où $v_1(\zeta)$, $v_2(\zeta)$ et $v_3(\zeta)$ sont encore des fonctions holomorphes à l'origine, se réduisant à 1 pour $\zeta = 0$.

Le raisonnement du paragraphe 8 s'applique encore et prouve que $R_4 < 0$. Les équations paramétriques approchées de C_4 dans le voisinage de l'origine s'écrivent, d'après (33₂) :

$$\begin{aligned} x(\xi) &= R_4 \xi \log \xi + (R_3 - R_4) \xi + O(\xi^2 \log \xi); \\ y(\xi) &= -\pi R_4 \xi + O(\xi^2 \log \xi); \end{aligned} \quad \xi > 0$$

ou, encore, sous forme cartésienne :

$$x(y) = -\frac{y}{\pi} \log y + \frac{y}{\pi} \left[\log(-\pi R_4) + 1 - \frac{R_3}{R_4} \right]$$

On déduit de là que C_4 possède une tangente continue pour $y \geq 0$, C_1 et C_4 sont tangents en z_{14} ; le rayon de courbure de C_4 s'annule pour $y = 0$ comme $\pi^{-2} y (\log y)^2$.

CHAPITRE III

REMARQUES FINALES. — MÉTHODES RAPIDES DE DISCUSSION

17. — La théorie qui précède a été construite à partir de l'hypothèse que voici : on rencontre C_1 et C_4 dans cet ordre lorsqu'on décrit C dans le sens direct. On peut se demander ce qui arrive lorsque cet ordre est inversé; nous nous proposons de répondre rapidement à cette question, qui revient à étudier la singularité de z_{41} — au lieu de z_{14} .

Nous laissons au lecteur le soin de reprendre les calculs du paragraphe 6 et de vérifier que l'équation aux exposants caractéristiques s'écrit ici :

$$k \sin \pi \lambda \sin [\pi (\lambda + \alpha)] = 0,$$

en sorte qu'on a, r_1 et r_2 étant deux entiers :

$$\lambda_1 = -\alpha + r_1;$$

$$\lambda_2 = r_2.$$

Les méthodes du § 7 donneraient ici, si $0 < \alpha < 1$:

$$K_1 = 0; \quad K_2 = -R_4 k \sin \pi \alpha; \quad K_3 = R_3 e^{i\pi \alpha};$$

$$K_4 = R_4 e^{i\pi \alpha}.$$

On en tire, compte tenu de (7) et de (9) et des raisonnements du § 8 :

$$F(\zeta) = -R_4 k \sin \pi \alpha u_2(\zeta);$$

$$Z(\zeta) = e^{i\pi \alpha} [R_3 \zeta^{1-\alpha} u_1(\zeta) + R_4 u_2(\zeta)];$$

$$R_4 < 0$$

Comme les formules (1) et (2) demeurent toujours valables, le point Ω_{41} sera donné soit par (3), soit par (3').

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que si Ω_{41} est donné par (3'), l'entier r_1 ne peut pren-

dre que les valeurs 1 ou 2. Si $\Omega_{41} = 0$, on a : $r_1 = 0$. Il suffira, à cet effet, d'appliquer les raisonnements des paragraphes 9 et 10; on verrait, en particulier, que les voisinages de δ attenants à Ω_{41} se déduisent de ceux des figures 4, 5 et 6 au moyen d'une règle très simple : au cas représenté sur la figure 4₁, par exemple, correspondra le voisinage complémentaire, hachuré sur la figure 7 :

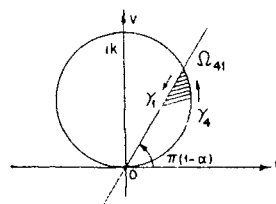


FIG. 7

le paramètre R_3/R_4 est supposé encore positif. Cette règle de complémentarité est générale. Elle s'applique toutes les fois que l'on passe du point Ω_{nm} au point Ω_{mn} ($n, m = 1, 2, 3, 4$; consulter, pour les notations, le chapitre I de [1]).

18. — Il nous reste, pour en finir avec l'étude locale, à expliquer comment un technicien, soucieux de se rendre compte de la nature d'une singularité z_{nm} pourra, dans beaucoup de cas, retrouver rapidement l'essentiel de la discussion analytique qui précède, sans passer par les formules générales, données au chapitre II de [1].

On partira des résultats de la théorie générale : on sait a priori que les fonctions $F(\zeta)$ et $Z(\zeta)$, holomorphes dans le demi-plan Σ , vérifiant à la frontière les conditions (5) et (6), présentent à l'origine une singularité du type (7) et (9). Le problème consiste donc à déterminer aussi simplement et aussi directement que possible les va-

leurs des exposants caractéristiques λ_1 et λ_2 et les expressions des constantes complexes K_j [cf. (8)].

L'examen de figures 2 et 3 montre que la fonction $f(\zeta)$, liée à $F(\zeta)$ par (4), réalise l'application conforme du demi-plan supérieur Σ sur le domaine Δ du plan f , dont la frontière comprend le segment $\psi = 0, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \varphi_1 < 0, \varphi_2 > 0$. De plus, $f(0) = 0$. Les propriétés élémentaires de la représentation conforme permettent alors d'affirmer que $f(\zeta)$ est holomorphe et réelle pour ζ réel dans le voisinage de l'origine et y présente un zéro simple. On peut donc écrire, dans le voisinage de $\zeta = 0$:

$$f(\zeta) = -A \zeta v_2(\zeta),$$

où $v_2(\zeta)$ est une fonction holomorphe pour $\zeta = 0$, réelle pour $\zeta = \xi$, telle, enfin, que $v_2(0) = 1$; A est une constante réelle, inconnue a priori, mais nécessairement non négative, car aux ξ croissants correspondent, d'après les figures 2 et 3, les $\varphi(\xi)$ décroissants. Il suit de là que :

$$\frac{df}{d\zeta} = F(\zeta) = -A u_2(\zeta) \tag{34}$$

où $u_2(\zeta)$ est holomorphe à l'origine, telle que $u_2(0) = 1$. La comparaison de la formule précédente avec (7) prouve que :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 = 0; \quad K_1 = 0; \quad K_2 = -A; \\ Z(\zeta) = K_3 \zeta^{\lambda_1} u_1(\zeta) + K_4 u_2(\zeta). \end{aligned} \right\} \tag{34'}$$

La théorie générale nous apprend, ensuite, que la correspondance :

$$\Omega(\zeta) = \frac{F(\zeta)}{Z(\zeta)},$$

qui transforme le voisinage de $\zeta = 0$ du domaine Σ en un voisinage du point $\Omega_{14} = \Omega(0)$ du domaine δ , est telle que ce dernier voisinage est limité par les courbes (1) et (2), se coupant au point Ω_{14} , donné soit par (3), soit par (3'). On sait, d'ailleurs, que, suivant les déterminations choisies de λ_1 , on devra retrouver l'une ou l'autre de ces deux dernières formules.

Ceci étant, l'ensemble des formules (34) et (34') permet d'écrire :

$$\Omega(\zeta) = -\frac{A}{K_4} \frac{1}{B \zeta^{\lambda_1} w_1(\zeta) + 1} \tag{35}$$

où on a posé (β — réel — n'étant défini qu'à un entier additif près) :

$$\left. \begin{aligned} B = \frac{K_3}{K_4} = c e^{i\pi\beta}; \\ w_1(\zeta) = \frac{u_1(\zeta)}{u_2(\zeta)}. \end{aligned} \right\} \tag{36}$$

Comme toujours, $w_1(\zeta)$ est holomorphe à l'origine, telle que $w_1(0) = 1$.

D'après (35), il est clair que $\Omega(0)$ se réduit à $-A/K_4$ pour $\lambda_1 > 0$ et à 0 pour $\lambda_1 < 0$. On doit donc avoir pour $\lambda_1 > 0$:

$$\Omega_{14} = -\frac{A}{K_4} = -k \sin \pi \alpha e^{-i\pi\alpha}$$

Posons, R_4 étant une constante réelle positive quelconque [cf. (11) et (34')] :

$$A = R_4 k \sin \pi \alpha = -K_2. \tag{37}$$

Les deux dernières relations donnent :

$$K_4 = R_4 e^{i\pi\alpha} \tag{38}$$

Supposons toujours $\lambda_1 > 0$; on tire de (35) le développement limité [cf. (36)] :

$$\Omega(\zeta) - \Omega_{14} = c k \sin \pi \alpha e^{i\pi(\beta-\alpha)} \zeta^{\lambda_1} + \dots$$

Par suite, en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur et en supposant $c > 0$:

$$\left. \begin{aligned} \arg [\Omega(\xi) - \Omega_{14}] = \pi(\beta - \alpha + \lambda_1), \quad \text{pour } \xi < 0; \\ \arg [\Omega(\xi) - \Omega_{14}] = \pi(\beta - \alpha), \quad \text{pour } \xi > 0; \end{aligned} \right\} \tag{39}$$

On ajoutera π aux seconds membres si $c < 0$.

Mais le point $\Omega(\xi)$ doit se trouver sur la droite (2) si $\xi < 0$ et sur le cercle (1) si $\xi > 0$; on en déduit que les premiers membres de (39) doivent se réduire respectivement à :

$$\left. \begin{aligned} \pi(1 - \alpha + p); \quad \text{pour } \xi < 0; \\ \pi(1 - 2\alpha + p'); \quad \text{pour } \xi > 0; \end{aligned} \right\}$$

où p et p' valent 0 ou 1. En égalant les deux valeurs des seconds membres de (39) ainsi obtenues, on forme deux équations pour déterminer λ_1 et β . Ces équations résolues donnent :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 = \alpha + r_1 \\ \beta = -\alpha + p'' \end{aligned} \right\} \tag{40}$$

où r_1 et p'' sont des entiers. D'après (36), on peut donc écrire, compte tenu de (17) :

$$\frac{K_3}{K_4} = \frac{R_3}{R_4} e^{-i\pi\alpha} \tag{41}$$

où R_3 est une constante réelle arbitraire, de signe quelconque pour l'instant. En comparant avec (38), on retrouve pour K_3 la valeur donnée par (11). Les formules (34), (37), (38), (40) et (41) sont donc équivalentes aux formules (12); pour pré-

ciser les valeurs des entiers r_1 et p'' , il faut faire appel aux conditions globales, conformément aux indications du paragraphe n° 15. Nous laissons au lecteur le soin de retrouver les résultats de la discussion du cas singulier du paragraphe 16 au moyen des méthodes directes analogues.

19. — Il est bon de préciser les conditions moyennant lesquelles le procédé ci-dessus peut être adapté à la détermination d'autres types de singularités z_{nm} (cf., pour les notations, le chapitre I de [1]). Supposons encore que le domaine D du liquide en mouvement dans le milieu poreux soit limité par des surfaces libres ou des segments de droite. L'image Ω_{nm} de z_{nm} dans le plan de la vitesse complexe sera alors déterminée par l'intersection d'une droite et d'un cercle ou d'une autre droite, donnée a priori; le voisinage de δ , appartenant à la singularité Ω_{nm} , sera alors connu à l'avance, aux indéterminations près dont les paragraphes 8 et 9 fournissent des exemples typiques. Il suffit alors, pour garantir l'efficacité du procédé n° 18, de connaître soit la frontière Γ de Δ dans le voisinage de f_{nm} , soit la frontière C de D dans le voisinage de z_{nm} .

Dans le cas z_{14} , auquel est consacré ce travail, le voisinage de Γ en f_{14} est constitué par une portion de l'axe réel $\psi = 0$. Dans l'exemple z_{42} , étudié au chapitre III de [1], le voisinage de f_{42} est défini par les inégalités :

$$\psi \leq 0; \quad \varphi \geq 0.$$

Rappelons qu'il s'agit là d'un point commun à une ligne libre et à une paroi perméable d'équation :

$$x \sin \pi \alpha - y \cos \pi \alpha = 0.$$

Compte tenu de l'ordre de succession de ces éléments de frontière, on voit immédiatement que la fonction $f(\zeta)$, qui réalise la représentation conforme de Δ sur le demi-plan supérieur Σ de la variable ζ , est de la forme :

$$F(\zeta) = -i A \zeta^{-1/2} u_1(\zeta),$$

où A est une constante réelle positive et $u_1(\zeta)$ est une fonction holomorphe à l'origine, valant 1 en ce point. En posant :

$$A = k \cos \pi \alpha R_3$$

où R_3 est une nouvelle constante réelle arbitraire, on retrouve la formule (25) de [1]. On conclut de là :

$$\lambda_1 = \dots 1/2; \quad K_1 = -i k \cos \pi \alpha R_3; \quad K_2 = 0.$$

On achèvera la discussion en suivant la marche du paragraphe 18. Rappelons que pour étudier les singularités z_{14} et z_{42} , BORELI a utilisé une méthode mixte qui conduit à des calculs un peu plus longs (cf. [4]).

De ce qui précède, il résulte que le point z_{34} , commun à une ligne libre et à une surface de suintement, échappe aux méthodes directes de BORELI et du présent travail. Seule la méthode générale de [1] semble permettre une étude complète de cette singularité, pour laquelle nous renverrons à [1] et à [4].

- [1] J. KRAVTCHEKHO, G. SAUVAGE DE SAINT-MARC, M. BORELI. — « Sur les singularités des écoulements plans et permanents des nappes souterraines pesantes. » *La Houille Blanche*, 1955, n° 1, pp. 47 à 62.
- [2] POLOUBORINOVA-KOTCHINA. — « Théorie des mouvements des eaux souterraines », en russe, Moscou, 1952; cf., spécialement, le chap. VII.
- [3] MUSKAT. — « Flow of homogeneous fluids through a porous media. » McGraw-Hill Book Co, New-York & London, 1937.
- [4] M. BORELI. — « Contribution à l'étude des milieux poreux. » Thèse d'ingénieur-docteur, Grenoble, 1954. Sous presse dans la collection scientifique et technique du Ministère de l'Air.
- [5] M. BORELI. — « Sur une solution rigoureuse d'un problème d'écoulement plan des nappes souterraines. » *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1953, t. 237, pp. 132-135.

