Détermination des dimensions caractéristiques d'un réservoir d'air sur une installation élevatoire

Determining the dimensions
of an air reservoir to be used on a pumping line

PAR

CH. DUBIN

ET

A. GUÉNEAU

INGÉNIEUR DES ARTS ET MANUFACTURES.

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
INGÉNIEUR CIVIL DES PONTS ET CHAUSSEES

Dans cet article, les auteurs exposent le résultat de leurs recherches sur la détermination des dimensions d'un réservoir d'air en appliquant la théorie du coup de bélier d'ondes. Cette étude nécessitait, pour y voir clair, l'exécution d'un grand nombre d'épures Bergeron. Les auteurs ont mis au point pour cela une méthode qui permet aux machines à cartes perforées de faire ce travail.

Il est à noter que depuis la rédaction de cet article, de nouvelles machines (I.B.M. type 650) ont apparues en France. Les auteurs estiment que l'épure de la figure 12 qui, il y a six mois, demandait une demi-heure, pourrait être achevée aujourd'hui en... trois minutes.

In this paper the authors state the results they have obtained concerning the determination of the size of an air vessel with the use of the theory of surges. The graphical method as applied by Mr. Bergeron required an important number of graphs to obtain a clear view of the process.

The authors have succeeded in establishing a method which allows the electronic computers with perforated cards to solve the problem.

Since this article was written a new computer (I.B.M. model 650) is available in France.

It may be estimated that the graph Fig. 12 which required half an hour six months ago could now be established in... three minutes.

La généralisation de l'emploi de l'énergie électrique, dans les usines élévatoires de distribution d'eau, a posé, avec une acuité inconnue jusqu'ici, la question des coups de bélier.

Dans les anciennes installations, pourvues de moteurs à vapeur ou de moteurs à combustion interne, on n'observait pratiquement jamais de coup de bélier consécutif à un arrêt de la pompe.

En effet, les moteurs comportaient toujours un volant assez important qui, par son inertie, empêchait tout arrêt brusque. Et, d'autre

part, le Chef d'Usine restait maître des opérations d'arrêt et pouvait les conduire de façon à minimiser le coup de bélier.

Aujourd'hui, par contre, il devient indispensable de protéger les installations contre les coups de bélier, car les groupes électro-pompes modernes n'ont qu'une très faible inertie, et, en outre, l'arrêt du courant peut se produire brusquement sans qu'aucune précaution ait pu être prise pour en temporiser l'effet.

Or, les conditions de fonctionnement des grou-

pes (hauteur-vitesse) sont telles que la protection par réservoir d'air s'impose le plus souvent.

Ce réservoir, on le sait, a deux effets différents :

Pendant la première période (l'eau continuant à s'écouler dans le sens pompe-réservoir d'extrémité, avec une vitesse positive), le réservoir d'air, en se détendant, fournit de l'eau à la canalisation et tempère la baisse de pression qui se produirait dans une installation non protégée.

Pendant la deuxième période, le sens du courant s'est inversé et le réservoir d'air reçoit de l'eau. La pression, sans atteindre la valeur de la surpression observée sur une conduite non protégée, peut néanmoins croître au-dessus de la charge limite qu'est capable de supporter l'installation.

Pour diminuer cette surpression, le remède est connu : entre la canalisation et le réservoir d'air, on place un organe (ajutage de Borda ou clapet troué) qui crée une perte de charge dissymétrique et qui présente en outre l'avantage d'amortir rapidement les oscillations de la pression autour de la charge statique; ces oscillations, en effet, peuvent se poursuivre assez longtemps, notamment dans les installations où la perte de charge dans la canalisation est trop faible pour créer, à elle seule, un amortissement appréciable (*).

L'ensemble réservoir d'air-clapet troué agit, en quelque sorte, comme l'ensemble ressort-amortisseur d'une voiture : si la roue doit passer sur une bosse, le ressort l'oblige à épouser le profil de cette bosse et l'amortisseur empêche le retour brusque du ressort et les nombreuses oscillations consécutives.

Qualitativement, l'allure du phénomène est bien connue. L'étude en est facile grâce à la méthode Bergeron, mais nécessite une épure dans chaque cas particulier.

De nombreuses études ont été poursuivies pour permettre d'obtenir une solution plus rapide du problème, notamment par MM. SLIOSBERG, VIBERT, COMBES et BOROT qui ont publié des abaques permettant de déterminer les pressions maximum et minimum dans le réservoir, en fonction du volume du réservoir et de la perte de charge introduite par le clapet.

Ces abaques ont été établis à partir de l'hypothèse simplificatrice de l'oscillation en masse. Il est exact que, dans la plupart des cas, cette hypothèse donne une valeur de la pression minimum, au droit du réservoir, très peu différente de la valeur donnée par la théorie plus précise du coup de bélier d'ondes.

Mais dans la recherche de la pression mini-

mum, en un point quelconque de la conduite, la théorie de l'oscillation en masse donne une loi linéaire de variation en fonction de la distance; or, ceci est faux, car, en réalité, la courbe des pressions minima peut présenter une concavité assez accentuée.

Le réservoir peut et doit éviter tout risque de cavitation en tout point de la canalisation. Et nous savons que, pour décider si oui ou non il y aura cavitation en un point quelconque de la conduite, il faut superposer la courbe des pressions minima et le profil en long de la conduite dessinés à la même échelle.

La sécurité exige que le profil en long soit entièrement au-dessous de la courbe des pressions minima ou du moins n'empiète pas sur elle d'une hauteur supérieure à 5 ou 6 m, au-delà de laquelle le siphonnage pourrait ne plus avoir lieu et la cavitation apparaîtrait.

FIG. 1

Or, si nous comparons les deux courbes (fig. 1), nous voyons que, dans la zone hachurée, le danger de cavitation existe (contrairement à ce qu'indique la théorie de l'oscillation en masse représentée ici par la droite joignant le point H_{min} au réservoir).

C'est pourquoi l'emploi de ces abaques doit être strictement limité aux profils en long présentant une forte concavité (courbe A de la

FIG. 2

fig. 2); il doit être proscrit pour des profils en long accidentés, du type de la courbe B.

Pour faciliter la détermination du volume du réservoir d'air, en vue de la protection complète de l'installation, nous avons étudié l'allure gé-

(*) Dans la suite de l'exposé, nous supposons cette perte de charge dans la conduite négligeable, ce qui constitue le cas le plus défavorable. Nous laissons au lecteur le soin d'extrapoler dans le cas où elle ne le serait pas.

nérale de ces courbes de pressions minima et nous donnons plus loin les résultats de cette étude.

Après avoir examiné ce qui se passe dans la première partie du phénomène (domaine des vitesses positives), voyons maintenant ce qui se passe dans la seconde partie, après l'inversion du courant, en supposant que le dispositif amortisseur soit un clapet percé.

Lorsqu'il n'y a pas de clapet du tout, la pression remonte dans la conduite et le réservoir, à une valeur $H_{\max}$ telle que :

$$H_{\max} - H_0 > H_0 - H_{\min}$$

H_0 représentant la charge statique (voir fig. 3).

Lorsqu'il existe un clapet plein, la fermeture de ce clapet stabilise à $H_{\min}$ la pression dans le

FIG. 3

réservoir et crée, dans la conduite, une surpression $H'_{\max} < H_{\max}$ telle que :

$$H'_{\max} - H_0 = H_0 - H_{\min}$$

Enfin, si l'on perce ce clapet d'un trou, on observera dans la conduite une surpression $H''_{\max}$ qui sera, pour des dimensions suffisamment petites de l'orifice, inférieure à $H'_{\max}$.

On conçoit donc qu'il y ait, pour le clapet, un étranglement optimum pour lequel la surpression dans la conduite sera minimum, et nous pensons que, pour un réservoir, comme pour une cheminée d'ailleurs, il n'y a pas d'autre définition de l'étranglement optimum.

Or, cet optimum, la théorie de l'oscillation en masse ne peut le déterminer. En effet, même si l'oscillation en masse est nettement établie en fin de la première période, la fermeture du clapet va modifier l'allure du phénomène et créer un nouveau coup de bélier d'ondes.

Les hydrauliciens qui n'ont pas l'habitude des épures Bergeron peuvent se demander par quel mystère un calculateur peut déterminer s'il a affaire à un coup de bélier d'ondes ou à une oscillation en masse. C'est extrêmement simple : il suffit de joindre par une courbe les points représentatifs des états (hauteur, vitesse) en un même

instant pour différents points de la conduite (fig. 4).

Si cette courbe est une verticale, on peut dire qu'il y a oscillation en masse. Par contre, si cette courbe est quelconque (et en réalité on sait qu'il peut s'en présenter toute une gamme avec

FIG. 4

points de rebroussement, boucles, etc.), il n'y a pas oscillation en masse.

Dans le cas qui nous intéresse, au début de l'arrêt brusque il n'y a pas oscillation en masse, mais elle s'établit assez rapidement (du moins pour un réservoir d'air assez grand) et c'est pour cette raison que les résultats donnés par les abaques sont assez voisins des résultats réels.

Mais, dès que le clapet troué se referme, un nouveau coup de bélier d'ondes apparaît, d'autant plus accentué que l'orifice est plus étroit. La théorie de l'oscillation en masse ne peut plus nous renseigner sur l'allure du phénomène et encore moins nous indiquer les dimensions optima de l'étranglement. Dès lors, il n'y a plus qu'une solution si l'on veut déterminer ces dimensions : faire de nombreuses épures.

C'est une solution pour le moins fastidieuse, exigeant une grande précision graphique, et tous ceux qui ont travaillé ce genre d'épures savent combien, dans la zone des vitesses négatives, les points successifs ont tendance à s'emmêler jusqu'à rendre l'épure inextricable.

Heureusement, il est, depuis quelques années, un instrument qui peut faire, sans se lasser, des centaines et des centaines d'épures et qui peut, sans se tromper, donner les coordonnées des points successifs à la précision relative de 10^{-7} évidemment plus que surabondante.

Cet instrument, c'est la machine à calculer à cartes perforées. Le laboratoire de calcul scientifique de la Société I.B.M. a bien voulu accepter de faire exécuter une suite d'épures Bergeron par ses machines, et c'est grâce à cela que nous pouvons donner une solution au problème de l'étranglement optimum du clapet amortisseur d'un réservoir d'air.

PREMIÈRE PARTIE

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE DE CALCUL

NOTATIONS

- H_0 : pression statique absolue;
 H_c : pression absolue dans la conduite à l'instant t ;
 H_R : pression absolue dans le réservoir à l'instant t ;
 w_0 : vitesse initiale en régime permanent;
 w : vitesse à l'instant t ;
 a : célérité des ondes dans la conduite;
 L : longueur de la conduite;
 σ : section de la conduite;
 $v_c = L\sigma$: volume de la conduite;
 v_0 : volume de l'air contenu dans le réservoir sous la pression H_0 ;
 v : le même volume sous une pression H_R ;
 αw^2 : perte de charge due au clapet dans le sens conduite-réservoir d'air.

En outre, pour avoir des équations homogènes, nous ferons à chaque instant intervenir les deux quantités :

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{a w_0}{g H_0} \\
 B &= \frac{w_0^2}{g H_0} \cdot \frac{v_c}{v_0}
 \end{aligned}$$

(la quantité B est le double de la quantité n qui intervient dans l'abaque de MM. COMBES et BOROT).

Position du problème.

Les équations du problème sont immédiatement déduites de la construction d'une épure Bergeron dans laquelle la perte de charge de la conduite est négligée.

Tout d'abord, la différence entre la charge dans la conduite et la charge dans le réservoir d'air est égale à la perte de charge du clapet :

$$H_c - H_R = \alpha w^2 \quad (1)$$

lorsque l'eau circule dans le sens conduite-réservoir (clapet fermé); cette différence est nulle lorsque l'eau circule dans l'autre sens (clapet ouvert).

La deuxième équation est obtenue en écrivant qu'un observateur met le temps :

$$\tau = \frac{2L}{a}$$

pour faire un aller et retour dans la conduite en se déplaçant sur des droites Bergeron de pentes $\pm a/g$ (dans un diagramme charge-vitesse) :

$$\left(H_c - \frac{a}{g} w \right)_t = 2 H_0 - \left(H_c + \frac{a}{g} w \right)_{t-\tau} \quad (2)$$

La troisième équation exprime la loi de variation du volume de l'air contenu dans le réservoir avec $H v =$ constante pour la loi isotherme.

En fait, l'équation (2) n'étant pas susceptible d'une intégration mathématique, nous opérerons, non pas sur des différentielles, mais sur des différences finies. Si donc la période τ est fractionnée en N parties égales, la loi caractérisant le réservoir d'air s'écrira :

$$v_t - v_{t-(\tau/N)} = \sigma \cdot \frac{w_t + w_{t-(\tau/N)}}{2} \cdot \frac{\tau}{N}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{H_{R,t}} &= \frac{1}{H_{R,t-(\tau/N)}} \\
 &= \frac{\sigma}{H_0 v_0} \cdot \frac{w_t + w_{t-(\tau/N)}}{2} \cdot \frac{\tau}{N} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Les trois équations (1), (2), (3) permettent, à tout instant, de déterminer la vitesse w , la charge H_c dans la conduite et la charge H_R dans le réservoir, en fonction de valeurs de ces mêmes variables aux instants antérieurs.

Modification de ces équations.

La construction des épures par le calcul ayant été demandée à des machines électroniques, il nous fallait établir une programmation simple

de travail; ceci nous a conduits à changer d'inconnues en les remplaçant par des quantités proportionnelles, les coefficients de proportionnalité ayant été déterminés de façon à obtenir le système suivant d'équations réduites :

$$\begin{cases} z_t - y_t = \lambda x_t^2 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} (z - x)_t = 2 z_0 - (z + x)_{t-\tau} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{y_t} - \frac{1}{y_{t-(\tau/N)}} = x_t + x_{t-(\tau/N)} \end{cases} \quad (6)$$

x, y, z étant liés aux inconnues w, H_R, H_e par les relations :

$$x = \frac{w}{w_0} \cdot x_0 \quad y = \frac{H_R}{H_0} \cdot y_0 \quad z = \frac{H_e}{H_0} \cdot z_0$$

avec :

$$x_0 = \sqrt{\frac{B}{N}} \quad y_0 = z_0 = \sqrt{\frac{B}{A^2 N}} \quad (7)$$

et :

$$\lambda = \frac{x w_0^2}{H_0} \sqrt{\frac{N}{A^2 B}} \quad (8)$$

Enfin, pour simplifier à l'extrême, nous avons également introduit les quantités suivantes :

$$S_t = 2 z_0 - (z + x)_t \quad (9)$$

$$T_t = x_t + \frac{1}{y_t} \quad (10)$$

ce qui, finalement, nous donne le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} z_t - y_t = \lambda x_t^2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} z_t - x_t = S_{t-\tau} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{y_t} - x_t = T_{t-(\tau/N)} \end{cases} \quad (13)$$

Résolution pratique des équations.

PREMIER CAS : $x > 0$ et $t < \tau$.

Pendant cette première période, les droites Bergeron (équations 2 ou 12) sont toutes confondues; le système d'équations se réduit donc à :

$$\begin{cases} z_t = y_t \\ z_t - x_t = z_0 - x_0 \\ \frac{1}{y_t} - x_t = T_{t-(\tau/N)} \end{cases}$$

dont la solution est immédiate

$$z_t = -\frac{T_{t-(\tau/N)} - (z_0 - x_0)}{2} + \sqrt{\left[\frac{T_{t-(\tau/N)} - (z_0 - x_0)}{2} \right]^2 + 1}$$

$$x_t = z_t - (z_0 - x_0)$$

DEUXIÈME CAS : $x > 0$ et $t > \tau$.

L'équation (11) se réduisant à $z_t = y_t$, la solution du système (11), (12), (13) est encore immédiate :

$$z_t = -\frac{T_{t-(\tau/N)} - S_{t-\tau}}{2} + \sqrt{\left[\frac{T_{t-(\tau/N)} - S_{t-\tau}}{2} \right]^2 + 1}$$

$$x_t = z_t - S_{t-\tau}$$

TROISIÈME CAS : $x < 0$.

Le calcul précédent doit être arrêté à la dernière valeur positive de x . Pour les valeurs suivantes ($x < 0$), il faut prendre le système complet faisant intervenir la perte de charge du clapet.

La résolution mathématique de ce système conduit à une équation du troisième degré. Plutôt que de résoudre cette équation, nous avons jugé préférable d'opérer par approximations en nous basant sur le fait que y variait d'une façon assez régulière (contrairement à x et z qui sont sujets à de brusques variations).

Pour chaque calcul, nous partons d'une valeur :

$$y^* = 2 y_{t-(\tau/N)} - y_{t-(2\tau/N)}$$

(extrapolation linéaire de y), valeur très voisine de la valeur y_t cherchée. Les équations (11) et (12) par élimination de z_t nous conduisent alors à une équation du second degré en x_t dont la solution est :

$$x' = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\lambda(S_{t-\tau} - y^*)}}{2\lambda}$$

L'équation (13) donne ensuite une nouvelle valeur de y :

$$y' = \frac{1}{T_{t-(\tau/N)} + x'}$$

Partant alors de y' nous calculons un nouveau couple de valeurs $x'' y''$, et ainsi de suite.

Connaissant ainsi x_t et y_t , z_t est donné immédiatement par l'équation (12) :

$$z_t = x_t + S_{t-\tau}$$

Pratiquement, à la seconde itération, c'est-à-dire au couple de valeurs $x''y''$, l'erreur résiduelle est négligeable et le calcul peut être arrêté là.

Graphiquement, il est facile de montrer l'excellente convergence de cette méthode. En effet, la détermination d'un point à l'instant t se ramène à l'intersection d'une parabole (parabole de perte de charge du clapet rapportée à la droite Bergeron, ici droite à 45°) et d'une hyperbole (hyperbole du réservoir passant par le symétrique par rapport à l'axe des pressions du point à l'instant $t = [\tau/N]$).

Or, en choisissant convenablement le fractionnement de la période, comme nous le verrons plus loin, l'hyperbole est très aplatie, alors que la parabole est très redressée (la pente de sa tangente est toujours supérieure à l'unité).

FIG. 5

L'itération correspond au trajet indiqué sur la figure 5, ce qui montre l'inutilité de poursuivre très loin les calculs.

Choix du fractionnement de la période.

Il serait absurde de vouloir faire, dans certains cas, des calculs très précis, en ne cherchant que les points successifs séparés par un intervalle de temps égal à une période.

Inversement, un fractionnement excessif de la période conduirait à des calculs extrêmement longs autant qu'inutiles.

Il convient donc de ne tomber ni dans un excès ni dans l'autre, mais bien au contraire de choisir une valeur judicieuse de N . Pour exposer les conditions de notre choix, il nous faut revenir en arrière.

Le premier point de l'épure (temps τ/N) est défini par :

$$\begin{cases} z = y \\ z - x = z_0 - x_0 \\ \frac{1}{y} - x = \frac{1}{z_0} + x_0 \end{cases}$$

ou :

$$\frac{1}{z} - z = \frac{1}{z_0} - z_0 + 2x_0 = \frac{1}{z_0} - z_0 + 2A z_0$$

Posons :

$$z = k z_0 \quad (k < 1)$$

Il vient :

$$z_0^2 = \frac{1-k}{k[2A-(1-k)]}$$

La formule (7) nous donne alors N :

$$N = \frac{B}{A^2} \cdot \frac{1}{z_0^2} = \frac{B}{A^2} \cdot \frac{k[2A-(1-k)]}{1-k}$$

Comme critère, nous avons imposé à z , au temps τ/N , de ne pas différer de z_0 de plus de 10 %, d'où :

$$k = 0,9$$

et par suite :

$$N = 9 \frac{B}{A^2} (2A - 0,1)$$

0,1 étant négligeable devant $2A$, nous obtenons finalement :

$$N = 18 \frac{B}{A}$$

Cette formule donne une valeur non entière de N . Il faut, bien entendu, prendre pour N un nombre entier voisin de cette valeur.

Cette loi de fractionnement est purement conventionnelle mais conduit à des résultats très satisfaisants : calculs très précis sans être exagérément longs et convergence très rapide dans les itérations du calcul.

Introduction de la perte de charge dans la conduite.

Tout ce qui vient d'être dit, ainsi que les conclusions quantitatives qui seront données plus loin, suppose une perte de charge négligeable dans la conduite.

Or, il est possible, même facile, d'introduire une perte de charge sous la forme d'un diaphragme fictif placé dans la conduite au droit de la pompe. Ceci ne représente pas fidèlement le phénomène, mais donne des résultats beaucoup plus proches de la réalité que ceux obtenus précédemment.

Soit βw^2 la perte de charge de la conduite et posons :

$$u = \frac{\beta w_0^2}{H_0} \sqrt{\frac{N}{A^2 B}}$$

les autres notations conservant la même signification.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les équations à résoudre sont maintenant les suivantes :

PREMIER CAS : $x > 0$ et $t < \tau$.

$$\begin{cases} z_t = y_t \\ z_t - \mu x_t^2 - x_t = z_0 - x_0 \\ \frac{1}{y_t} - x_t = T_{t-(\tau/N)} \end{cases}$$

DEUXIÈME CAS : $x > 0$ et $t > \tau$.

$$\begin{cases} z_t = y_t \\ z_t - \mu x_t^2 - x_t = S_{t-\tau} \\ \frac{1}{y_t} - x_t = T_{t-(\tau/N)} \end{cases}$$

TROISIÈME CAS : $x < 0$.

$$\begin{cases} z_t = y_t + \lambda x_t^2 \\ z_t + \mu x_t^2 - x_t = S_{t-\tau} \\ \frac{1}{y_t} - x_t = T_{t-(\tau/N)} \end{cases}$$

Il convient de donner à S_t l'une des deux valeurs suivantes :

$$S_t = 2z_0 - z_t + \mu x_t^2 - x_t \quad \text{pour } x_t > 0$$

$$S_t = 2z_0 - z_t - \mu x_t^2 - x_t \quad \text{pour } x_t < 0$$

Dans chaque cas, la résolution du système peut être effectuée par itération, exactement comme il a été indiqué précédemment, plutôt

que par résolution directe d'une équation du troisième degré.

Détente adiabatique.

Dans ce qui précède, comme du reste dans ce qui suit, nous avons supposé une détente isotherme dans le réservoir. Ceci constitue un cas particulier, et il n'est pas interdit de vouloir envisager le cas de l'adiabatisation. Les calculs précédents sont alors légèrement modifiés, mais conservent cependant leur simplicité.

La loi d'adiabatisation se traduit par la relation :

$$H V^\gamma = \text{constante}$$

Seule la troisième équation du système est modifiée et devient :

$$\frac{1}{y_t^{1/\gamma}} x_t = T_{t-(\tau/N)} = \frac{1}{(y_{t-(\tau/N)})^{1/\gamma}} + x_{t-(\tau/N)}$$

en prenant maintenant :

$$x_0 = A z_0$$

$$z_0 = \left(\frac{B}{A^2 N} \right)^{\gamma/(1+\gamma)} \quad \lambda = \frac{\alpha w_0^2}{H_0} \cdot \frac{z_0}{x_0^2}$$

Les calculs, par la méthode d'itération, se poursuivent d'une manière analogue à ce qui a été fait précédemment, exception faite pour les valeurs successives de y qui s'obtiennent par une expression de la forme :

$$y_t = \frac{1}{(T_{t-(\tau/N)} + x_t)^\gamma}$$

Pour l'adiabatisation, les calculs peuvent encore être confiés aux machines à cartes perforées et la perte de charge dans la canalisation peut également être introduite comme il a été indiqué dans le paragraphe précédent.

DEUXIÈME PARTIE

RÉSULTATS RELATIFS A LA DÉPRESSION

Nous avons appliqué systématiquement les calculs qui viennent d'être exposés à des couples de valeurs de A variant de 0,5 à 4 et de B variant de 0,05 à 1.

Ceci nous a permis de constater que pour de faibles valeurs du rapport B/A les résultats, en

ce qui concerne la dépression, étaient très voisins de ceux obtenus par la théorie de l'oscillation en masse.

Par contre, dès que ce rapport n'est plus petit, les résultats peuvent diverger.

Dépression minimum.

Pour la détermination de cette dépression minimum, il ne nous est pas possible de donner un abaque aussi complet que celui de MM. COMBES et BOROT, puisque nous n'avons pas pris en compte la perte de charge dans la conduite.

Dans ce cas où la perte de charge est négligée, les résultats de l'oscillation en masse sont parfaitement vérifiés, l'erreur ne dépassant pas 1 %, tant que A est supérieur à l'unité.

Mais il n'en est plus de même pour $A < 1$, et ceci se conçoit fort bien (fig. 6). En effet,

FIG. 6

$A < 1$ entraîne $x_0 < z_0$ et la pression ne peut pas tomber au-dessous de $z_0 - x_0$, d'où :

$$\frac{H}{H_0} = \frac{z}{z_0} > \frac{z_0 - x_0}{z_0} = 1 - A$$

Ceci donne le jeu de courbes représenté sur la figure 7.

FIG. 7

Ce cas constitue une exception, en matière de distribution d'eau, car, usuellement, A est supérieur à l'unité.

Courbes des pressions minima.

Le calcul donne à chaque instant la charge et la vitesse au droit du réservoir d'air. Mais le fait

que la période ait été fractionnée en N parties permet d'obtenir immédiatement, de τ/N en τ/N , les charges aux points de la conduite distants de la pompe d'un multiple quelconque de L/N .

Soit, en effet, à obtenir la charge à l'instant t au point M distant de la pompe de $n \times (L/N)$ (fig. 8).

FIG. 8

Il est facile de vérifier que le point M_t est à l'intersection des deux droites :

$$z - x = 2z_0 - (z + x)_{t - \tau + (n/2)(\tau/N)}$$

$$z + x = (z + x)_{t - (n/2)(\tau/N)}$$

d'où, par élimination de x :

$$2(z_0 - z) = (x + z)_{t - \tau + (n/2)(\tau/N)}$$

$$- (x + z)_{t - (n/2)(\tau/N)}$$

$$= S_{t - (n/2)(\tau/N)} - S_{t - \tau + (n/2)(\tau/N)}$$

et :

$$\frac{z}{z_0} = 1 - \frac{1}{2z_0} (S_{t - (n/2)(\tau/N)} - S_{t - \tau + (n/2)(\tau/N)})$$

Pour obtenir le minimum de la pression en

FIG. 9

FIG. 10

FIG. 11

chaque point M, il faut donc connaître le maximum de la différence ΔS entre les quantités S relatives à deux points P distants, dans le temps

de $[1 - (n/N)] \tau$. Ces quantités S étant connues, il est dès lors facile de situer le minimum cherché.

Les trois familles de courbes suivantes (fig. 9, 10, 11) donnent, pour $A = 0,5$ $A = 1$ $A = 2$ et pour différentes valeurs de B , la pression minimum enregistrée en chaque point de la conduite.

La théorie de l'oscillation en masse donnerait, dans chaque cas, une droite et non une courbe. En d'autres termes, la concavité de ces courbes traduit la divergence avec la théorie de l'oscillation en masse.

Pratiquement, quand $B/A < 1/10$, la courbe donnée par la théorie exacte de l'oscillation d'onde se confond avec la droite donnée par la théorie approchée de l'oscillation en masse.

TROISIÈME PARTIE

RÉSULTATS RELATIFS AUX SURPRESSIONS

Dans cette troisième partie, où nous négligeons encore la perte de charge dans la canalisation, nous nous écartons totalement des hy-

pothèses de l'oscillation en masse; l'épure (fig. 12) le montrera aisément.

Nous sommes en plein dans le domaine de l'oscillation d'ondes; en effet, la théorie de l'oscillation en masse ne permet pas d'obtenir les maxima et minima successifs observés dans la conduite. Il est possible de le démontrer mathématiquement, mais ceci nous entraînerait trop loin en sortant du cadre de cet exposé.

Le problème qui se pose est le suivant : connaissant A (quantité caractéristique de l'installation) et B (quantité définissant le volume du réservoir d'air), déterminer la perte de charge du clapet pour que la surpression dans la conduite soit minimum.

La théorie pure ne permet pas d'obtenir cet optimum, aussi faut-il opérer par tâtonnements; c'est ce que nous avons fait d'une façon systématique et ce que nous allons maintenant exposer.

Recherche de l'optimum.

Pour un couple de valeurs données de A et B , il existe une infinité d'épures correspondant chacune à une valeur donnée de α .

Examinons l'allure générale de ces épures dans la zone des vitesses négatives.

Quelle que soit la valeur de α , la charge y dans le réservoir est une fonction toujours croissante présentant un maximum M pour $\alpha = 0$. En ce point, la charge dans la conduite est d'ailleurs égale à la charge dans le réservoir. Le

FIG. 12

maximum en question croît toujours lorsque α diminue.

Pour les valeurs élevées de α , la charge dans la conduite présente un ou plusieurs maxima $N_1 N_2 N_3$ (fig. 12). Le plus important de ces

FIG. 13

maxima est toujours celui qui correspond à la vitesse la plus élevée en valeur absolue.

Lorsque α diminue, le maximum N_1 diminue et finit même par disparaître.

L'optimum a lieu lorsque le maximum M est égal au maximum N_1 . On obtient alors une charge au-dessous de laquelle il est impossible de descendre (*).

La détermination de ce minimum paraît inaccessible à la théorie pure. Nous avons donc effec-

(*) Pour les fortes valeurs du rapport B/A ($B/A > 0,5$ approximativement), la courbe lieu du point N_1 peut cesser d'être constamment croissante. L'optimum cherché correspond alors au minimum de cette courbe.

tué (à la machine) de nombreuses épures qui nous donnaient les valeurs respectives de M et de N_1 en fonction de α . L'intersection des lieux de M et de N_1 donne le α optimum et la valeur correspondante de H/H_0 (fig. 13).

L'abaque (fig. 14) réunit les différents résultats que nous avons obtenus.

Pour les amateurs de mathématiques, nous pouvons signaler quelques formules que nous avons établies à partir de ces résultats numériques :

Courbes $A = \text{constante}$:

$$\frac{\alpha W_0^2}{H_0} \left(2 - \frac{H}{H_0} \right)^3 = \left(\frac{4A}{3} \right)^{3/2}$$

Courbes $B = \text{constante}$:

$$\frac{\alpha W_0^2}{H_0} \left(\frac{H}{H_0} - 1 \right) = \frac{B}{2}$$

La première de ces formules est très bien vérifiée pour $A > 1$. Elle donne encore de bons résultats jusqu'à $A = 0,5$ à condition que H/H_0 soit inférieur à 1,25.

La seconde formule est très bien vérifiée pour H/H_0 inférieur à 1,10. Elle donne encore un bon ordre de grandeur jusqu'à 1,15. Il faut toutefois se garder de l'employer pour les très faibles valeurs de la perte de charge, car elle perd alors toute signification.

FIG. 14

QUATRIÈME PARTIE

UTILISATION PRATIQUE DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS

Généralement, le problème de la protection des installations élévatoires se présente aux ingénieurs de la façon suivante :

On connaît :

- la charge statique absolue H_0 ,
- la vitesse en régime permanent w_0 ,
- la célérité des ondes a .

Ces trois données déterminent la quantité :

$$A = \frac{a w_0}{g H_0}$$

On connaît en outre le profil en long de l'installation :

1° Si le profil en long présente une concavité accentuée (courbe A de la fig. 2), il n'y a aucun risque de cavitation le long de la conduite et le volume du réservoir d'air peut être déterminé par l'une des courbes de la figure 7 (la courbe $A \geq 1$ étant identique à celle donnée par MM. COMBES et BOROT, au changement de notation près, pour le cas où la perte de charge est négligée);

2° Si le profil en long présente des points hauts où peut se produire la cavitation (courbe B de la fig. 2), il convient alors de superposer ce profil en long à celle des figures 9, 10 ou 11 qui correspond au cas étudié. Le volume du réservoir qu'il faut adopter sera déterminé par la valeur de :

$$B = \frac{w_0^2}{g H_0} \cdot \frac{v_c}{v_0}$$

indiquée sur la première des courbes qui ne coupe pas le profil en long.

Si cependant toutes ces courbes étaient coupées par le profil en long, la protection complète de l'installation, à partir de la station de pompage, nécessiterait un réservoir d'air de très grand volume, qu'il y aurait sans doute intérêt à remplacer par une protection localisée au point haut. Ceci étant un cas d'espèce, il ne nous est pas possible de donner une règle générale;

3° Dans ces conditions, la canalisation est protégée contre les risques de cavitation par le réservoir d'air dont le volume est fixé par la valeur de B précédemment trouvée.

Pour limiter la surpression qui se manifeste dans la deuxième phase du phénomène, il faut placer entre le réservoir d'air et la conduite un organe dissymétrique générateur de perte de

charge dans le sens conduite-réservoir d'air.

L'abaque de la figure 14 donne les conditions optima de fonctionnement, c'est-à-dire la surpression minimum H/H_0 et la perte de charge $\alpha w_0^2/H_0$ de l'organe dissymétrique, en fonction des constantes A et B. Il suffit pour cela de lire les coordonnées du point d'intersection de la courbe $A = c^te$ et de la courbe $B = c^te$ correspondant à l'installation.

Si cet organe dissymétrique est un clapet percé, le diamètre d du trou, rapporté au diamètre D de la canalisation principale, sera donné, en fonction du coefficient α de perte de charge, par la relation :

$$\alpha = \frac{1}{2g} \left[\frac{D^2}{0,6 d^2} - 1 \right]^2$$

4° Enfin, il se peut que, dans certains cas, le problème soit à prendre en sens inverse, la principale limitation imposée étant celle de la surpression à une valeur donnée H/H_0 . Il suffit alors, sur l'abaque de la figure 14, de prendre l'intersection de l'horizontale H/H_0 avec la courbe $A = c^te$. Ce point se trouve sur une courbe $B = c^te$ qui fixe le volume minimum du réservoir compatible avec les conditions imposées. D'autre part, l'abscisse de ce point donnera la perte de charge du clapet et donc le diamètre d du trou.

A titre de contrôle, il faudra vérifier que, pour cette même valeur de B, la courbe des pressions minima est toujours au-dessus du profil en long. Si cette condition n'était pas vérifiée, il faudrait alors prendre un réservoir de volume supérieur.

Dans tous les cas, l'abaque précédent donnera la solution optimum :

- A volume égal du réservoir, détermination de la surpression minimum;
- A surpression égale, détermination du volume minimum du réservoir d'air.

5° Nous signalerons, pour terminer, qu'il est possible d'avoir directement, et sans aucun calcul, le diamètre d de l'orifice percé dans le clapet. Si nous nous reportons en effet à l'abaque de la figure 14, nous constatons que la perte de charge relative est sensiblement proportionnelle à A :

$$\frac{\alpha w_0^2}{H_0} = k A = k \cdot \frac{a w_0}{g H_0}$$

k étant un coefficient compris usuellement entre 2 et 3,5.

Par suite, nous obtenons :

$$\alpha = k \frac{a}{g} \cdot \frac{1}{w_0}$$

Or, α , pour un rapport des diamètres D/d suffisamment grand, a pour valeur :

$$\alpha = \frac{1}{2g} \left[\frac{1}{0,6} \left(\frac{D}{d} \right)^2 \right]^2 = \frac{1}{0,72g} \left(\frac{D}{d} \right)^4$$

d'où nous déduisons immédiatement :

$$\frac{D}{d} = \sqrt[4]{0,72k} \cdot \frac{a}{w_0} = k' \sqrt[4]{\frac{a}{w_0}}$$

$k' = \sqrt[4]{0,72k}$ variant entre les valeurs 1,10 et 1,25.

En valeur moyenne, nous pouvons adopter la formule :

$$\frac{D}{d} = 1,2 \sqrt[4]{\frac{a}{w_0}}$$

Dans le cas fréquent où $a = 1.000$ m/s et $w_0 = 1$ m/s, nous trouvons :

$$\frac{D}{d} = 6,7$$

ce qui donne l'ordre de grandeur du diamètre optimum de l'orifice.

EXEMPLE NUMÉRIQUE :

$$\begin{array}{ll} H_0 = 60 \text{ m} & a = 1.200 \text{ m/s} \\ w_0 = 1 \text{ m/s} & g = 10 \text{ m/s}^2 \end{array}$$

soit : $A = 2$,

et supposons que la nature du profil en long conduise, conformément à la figure 11, à adopter un réservoir tel que $B = 0,4$. Son volume serait par suite donné par :

$$v_0 = \frac{v_e}{240}$$

Dans ces conditions, l'abaque de la figure 14 détermine le fonctionnement optimum :

$$\frac{\alpha w_0^2}{H_0} = 4,95 \quad \frac{H}{H_0} = 1,04$$

d'où :

$$\alpha w_0^2 = 297 \quad H = 62,40$$

et :

$$\frac{d}{D} = \frac{1}{6,85}$$

Cet exemple montre que, par un choix judicieux de l'évidement du clapet, la surpression peut être limitée à une très faible valeur, ici 2,40 mètres.

Notons que si nous avions pris un clapet plein, la surpression aurait été de 36 mètres. Sans clapet, elle aurait été de 60 mètres. La surpression devient le double de la valeur minimum si l'on prend un rapport des diamètres égal, soit à 1/6, soit à 1/8 environ, ce qui montre la rapidité de variation de la surpression en fonction du diamètre de l'évidement.

Conclusion

La méthode de calcul des épures Bergeron, au moyen des machines à cartes perforées, que nous venons d'exposer (sans toutefois entrer dans le détail de la programmation, qui ne peut intéresser que les spécialistes du calcul électronique) peut être féconde pour résoudre les problèmes qui exigeraient un grand nombre d'épures avant d'obtenir la meilleure solution.

Alors que le projeteur peut être découragé par ce nombre d'épures, la machine les exécute en se jouant.

A titre d'exemple, l'épure de la figure 12, comportant la détermination de 92 points successifs, a été achevée par la machine en une demi-heure; chaque point nécessite un passage de 36 cartes effectué en 20 secondes.

Si l'on veut bien examiner cette épure en détail, et nous n'employons ce mot ici que par routine puisque nous n'avons plus qu'une traduction graphique des résultats donnés par la machine, on constatera que la précision graphique, qu'elle aurait exigée d'un dessinateur employant la méthode classique, paraît hors de portée, sinon par une exécution à très grande échelle, d'ailleurs inhabituelle.

Dans le domaine des distributions d'eau, il semble que l'usage des machines électroniques ne soit pas limité aux calculs de coups de bélier : nous leur avons demandé notamment de résoudre les problèmes de réseaux maillés. Elles le font avec une rapidité qui paraît devoir surpasser, non seulement le calcul à la main, mais également le calcul par modèle.