Les tests non paramétriques de Mr. Wilks et leurs applications en hydrologie statistique

Mr. Wilks' non parametric tests and their applications to statistical hydrology

PAR A. BILLIET

Il est souvent nécessaire en hydrologie de juger de la possibilité d'admettre une même loi de probabilité pour deux séries statistiques données. Les tests présentés ici permettent de porter un tel jugement sans formuler aucune hypothèse sur la loi de probabilité que suivraient ces deux séries.

Ce sont par ailleurs des tests exacts, alors que le χ^2 , par exemple, nécessite de nombreuses approximations. On montre comment et dans quels cas ces tests peuvent être utilisés, et on donne divers exemples d'applications. On étudie notamment les anomalies présentées par les indices d'hydraulicité en France depuis 1919.

In hydrology it is often necessary to consider the possibility of using the same probability law for two given statistical series. The tests given in this article allow such a decision to be taken without making any assumptions as to the probability law obeyed by two such series. These are exact tests whereas the χ^2 test for example involves many approximations. It is shown how and when these tests can be used and various examples of applications are given. A particular study is made of the anomalies that have arisen in French hydrological indices since 1919.

L'une des principales difficultés de l'hydrologie statistique c'est que l'on n'y dispose généralement que de petits échantillons. Or, il faut bien le dire, la plus grande partie du calcul des probabilités dérive de l'étude du comportement à l'infini de certaines fonctions. C'est pourquoi l'hydrologie doit se méfier de certaines méthodes passe-partout, telles que le test de χ^2 , par exemple, qui ne peuvent être valablement utilisées que pour de grands échantillons. Bien entendu, lorsqu'on ne peut faire autrement, il faut bien se contenter d'approximations douteuses, mais si des méthodes plus correctes s'offrent à nous, il serait impardonnable de les négliger. C'est la raison pour laquelle je crois bon d'attirer aujourd'hui votre attention sur deux tests qui joignent à leur exactitude l'avantage d'une très grande simplicité d'application.

Il s'agit de tests d'homogénéité. Je dispose de deux séries statistiques comportant respectivement m et n observations. Ayant quelques raisons de penser que les deux variables aléatoires dont ces séries constituent des épreuves suivent peut-être la même loi, je désire tester cette hypothèse. Pour le faire, on calcule généralement

un χ^2 . Cela exige une répartition en classes des différentes observations, et si les échantillons sont petits, le résultat pourra être très différent suivant que cette répartition aura été effectuée de telle ou telle manière.

Les deux tests qui ont été imaginés par M. WILKS ont l'avantage de ne laisser place à aucun arbitraire. Voici le principe très simple dont il s'inspire. Les observations de chaque échantillon sont classées par ordre de grandeur croissante, et l'on compare les points extrêmes.

Deux cas sont possibles : ou bien tous les points de l'un des échantillons sont entre les extrémités de l'autre, ce qui tend à suggérer que celui-ci a peut-être une dispersion plus grande ; ou bien il y a une apparence de décalage de l'un des échantillons par rapport à l'autre, on a à la fois $x_1 < y_1$ et $x_n < y_m$.

Pour juger si ces apparences sont significatives ou sont le résultat du hasard, un simple dénombrement suffit.

Dans le premier cas, x_1 sera compris entre y_k et y_{k+1} , x_n entre y_{m-p-1} et y_{m-p} ; il y aura donc $r = k + p$ points à l'extérieur de l'intervalle (x_1, x_n) .

Dans le deuxième cas, x_n sera compris entre y_{m-s-1} et y_{m-s} , il y aura donc s points au-delà de x_n .

M. WILKS a montré que la probabilité que r soit égale à r_0 et celle que s soit égale à s_0 , dépendent seulement de m et n , et non pas de la loi de probabilité commune aux deux échantillons.

Ces probabilités s'expriment d'ailleurs très simplement au moyen de combinaisons :

$$P_r = (r+1) \frac{\binom{n+m-r-2}{n-2}}{\binom{n+m}{n}}$$

$$P_s = \frac{\binom{n+m-s-1}{n-1}}{\binom{n+m}{n}}$$

Sans aller chercher la démonstration rigoureuse de ces formules, on peut en donner une justification intuitive dans le second cas par exemple. On a en tout $n+m$ points. Si l'on en extrait n , le nombre de cas possibles est le nombre de combinaisons de $n+m$ objets pris n à n , soit $\binom{n+m}{n}$. Mais on veut que l'échantillon extrait ait pour plus grande valeur le point ayant pour numéro d'ordre $n+m-s-1$, les $n-1$ autres points doivent donc être choisis parmi $n+m-s-1$, le nombre des cas favorables est donc $\binom{n+m-s-1}{n-1}$. En faisant le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles, on obtient bien :

$$P_s = \frac{\binom{n+m-s-1}{n-1}}{\binom{n+m}{n}}$$

*
**

Si donc l'on veut juger si la répartition observée est bien possible ou peu probable, on a à calculer la probabilité que l'on obtienne une valeur supérieure ou égale à la valeur trouvée r_0 ,

c'est-à-dire $\sum_{r=r_0}^{r=m} P_r$. Si les nombres qui entrent

en jeu ne sont pas trop grands, le calcul n'est pas très compliqué, mais il n'y a pas lieu de le faire en général, puisque des tables ont été publiées l'année dernière, dans les *Annals of Mathematical Statistics*, par M. ROSENBAUM. Elles donnent les valeurs de r et s correspondant aux seuils de confiance de 5 et 1 %. Après un simple dénombrement, nous sommes donc en mesure

de savoir si la configuration observée a une probabilité supérieure à 5 %, comprise entre 5 et 1, ou inférieure à 1 %.

Voici maintenant à titre d'illustration deux cas où j'ai appliqué le second test.

Tout d'abord les averses de la Haute-Durance. On a sélectionné sur le bassin versant de Serre-Ponçon les fortes périodes pluvieuses, c'est-à-dire celles qui avaient donné au moins, soit 24 mm en 1 jour, soit 36 mm en 2 jours, soit 48 mm en 3 jours, etc. Elles se répartissaient ainsi (*) :

	Printemps (**)	Automne
Moins de 60 mm.....	4	6
De 60 à 69 mm.....	6	7
De 70 à 79 mm.....	4	3
De 80 à 89 mm.....	2	5
90 mm ou plus.....	0	9
	16	30

Le problème que nous nous proposons était de savoir s'il était possible d'étudier ces pluies dans leur ensemble ou si nous devions les traiter séparément. Etant donné le grand avantage qu'il y aurait eu à adopter la première solution (***), il était nécessaire de ne la rejeter qu'à un seuil de confiance assez bas, soit 1 %..

Un test de χ^2 a d'abord été effectué sur les cinq classes définies ci-dessus. On a $\chi^2 = 7,95$, ce qui, pour 4 degrés de liberté, a une probabilité d'environ 10 % d'être dépassé : si nous en étions restés là, nous aurions étudié ensemble les pluies de printemps et d'automne. Mais, du fait du petit nombre d'observations, le test de χ^2 ne donnait de la vraisemblance d'homogénéité qu'une idée très imprécise et l'opposition des valeurs 0 et 9 dans la dernière catégorie (90 mm et plus) me faisait craindre de minimiser dangereusement, par une étude en bloc, les valeurs des très fortes averses d'automne. Le test de M. ROSENBAUM s'imposait donc. En fait, la plus forte pluie observée au printemps avait donné 87 mm, et c'est dix fois que cette valeur a été dépassée en automne. C'est précisément la valeur $s=10$ que donne la table de M. ROSENBAUM pour $n=16$, $m=30$ au seuil de confiance de 1 %. Ce test exact nous permet donc de rejeter avec une beaucoup plus grande confiance l'hypothèse de l'homogénéité des deux séries.

Mon second exemple est consacré aux irrégularités récentes de l'hydraulicité française. On

(*) Compte non tenu évidemment des averses d'hiver et d'été.

(**) Précisons, pour que ces chiffres n'apparaissent pas en contradiction avec des données publiées dans d'autres notes, que nous appelons ici printemps la période 1^{er} mars-31 mai.

(***) Puisque le nombre des observations passait ainsi de 16 à 46.

sait que la France a connu, de 1942 à 1950, une période de sécheresse prolongée d'un caractère assez remarquable, ainsi que l'illustre le graphique suivant (fig. 1) représentant les coefficients d'hydraulicité naturelle de la France de 1919 à 1953.

FIG. 1.

Coefficients d'hydraulicité naturelle de la France.
1919-1953

Les 35 années en question ont été séparées en deux groupes en isolant les 9 années 1942 à 1950, nous avons ainsi deux échantillons de taille $n = 9$, $m = 26$, dont nous allons étudier l'homogénéité par la méthode de WILKS. Le maximum de la première série est 1136, et 19 valeurs de la deuxième série sont plus fortes.

Pour $n = 9$ et $m = 26$, la table de ROSENBAUM donne $s = 13$, au seuil de confiance de 1 %. Mais il serait prématuré d'en tirer une conclusion. En effet, nous avons choisi notre période de 9 années de la façon la plus avantageuse pour notre propos. Etant donné que dans une série de 35 années il y a 17 séries possibles de 9 années consécutives, la probabilité que nous devons attribuer à la valeur 19 trouvée est $q' = 1 - (1 - q)^{17}$, q étant la probabilité pour que $n = 9$, $m = 26$, on ait $s = 19$, soit :

$$q = \sum_{s=19}^{26} Q_s(9, 26) = \sum_{s=8}^{15} \frac{\binom{k}{s}}{\binom{35}{9}}$$

La valeur numérique de q est $\frac{12.444}{70.607.460}$

Par conséquent : $q' \approx 3 \%$.

Il ne faut pas trop s'hypnotiser sur la valeur d'un tel chiffre, car le fait d'élever à la puissance 17 ne suffit pas à éliminer le caractère *a posteriori* de notre démarche. C'est pourquoi

la conclusion à tirer de ce deuxième exemple est différente de celle du premier. Tout à l'heure, nous avons décidé d'adopter des lois distinctes pour les deux séries. Mais la coupure effectuée avait un caractère naturel. Dans le cas présent, nous avons le sentiment d'une hétérogénéité dans la série, mais si la commodité du calcul nous conduit à une coupure franche, nous ne nous faisons pas d'illusion sur son caractère artificiel, et même nous répugnons, jusqu'à preuve du contraire, à admettre la possibilité d'une solution de continuité et préférons penser à des « fluctuations » à caractère semi-continu. C'est pourtant dans la première hypothèse que le travail du statisticien serait le plus commode, la recherche des périodes éventuelles étant tout à fait illusoire du fait de l'existence de l'effet Slutsky.

Quoi qu'il en soit, l'attitude la plus raisonnable, tant que des travaux convaincants n'auront pas permis d'améliorer le schéma, semble de continuer à admettre pour les coefficients d'hydraulicité une loi unique stable dans le temps.

FIG. 2.

Coefficients d'hydraulicité naturelle de la France.
Polygone de fréquence

Je voudrais dire pour terminer un mot sur la forme de cette loi. Lorsque l'on construit le polygone de fréquence des coefficients d'hydraulicité, on constate qu'il présente deux maxima séparés par un creux. Ceci a conduit certains à penser qu'il y avait donc lieu d'admettre comme loi théorique une loi bimodale. Effectivement si l'on essaie une loi unimodale telle que la loi normale, le test de χ^2 fournit une probabilité très faible de l'ordre de 3 %. Mais ce chiffre est précisément celui que nous avons trouvé par la méthode de WILKS. Il est donc inhérent à l'échantillon, la forme de la loi n'y est pour rien. Je pense donc qu'il faut admettre que le creux observé est accidentel et conserver jusqu'à plus ample information une loi unimodale.

TABLES DU PREMIER TEST DE WILKS (DISPERSION)
ÉTABLIES PAR M. ROSENBAUM

Soient n et m les tailles des deux échantillons considérés, r le nombre de points de l'échantillon de taille m situés au-delà des valeurs extrêmes de l'échantillon de taille n .

Les tables donnent, pour $\alpha = 5\%$ et 1% , les valeurs de $r = r_0 + 1$ telles que :

$$\sum_{r=r_0+1}^m P_r < \alpha \leq \sum_{r=r_0}^m P_r$$

La valeur de r donnée par la table est donc la plus petite de celles qui doivent être rejetées au seuil de confiance de α .

Ces tables sont extraites des *Annals of Mathematical Statistics*, vol 24, n° 4, décembre 1953.

TABLES DU DEUXIÈME TEST DE WILKS (POSITION)
ÉTABLIES PAR M. ROSENBAUM

Soient n et m les tailles des deux échantillons considérés, s le nombre de points de l'échantillon de taille m situés à droite de la plus grande valeur (resp. à gauche de la plus petite valeur) de l'échantillon de taille n .

Les tables donnent, pour $\alpha = 5\%$ et 1% , les valeurs de $s = s_0 + 1$ telles que :

$$\sum_{s=s_0+1}^m P_s < \alpha \leq \sum_{s=s_0}^m P_s$$

Ces tables sont extraites des *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 25, n° 1, mars 1954.

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	—	—	9	10	11	12	13	14	15	16	16	17	18	19	20	21	21	22	23
4	—	—	—	—	5	6	7	8	9	9	10	11	12	12	13	14	15	15	16	17	18	18	19	20	21
5	—	—	4	5	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12	13	14	14	15	16	16	17	18	18
6	—	3	4	5	5	5	6	7	7	8	8	9	9	10	11	11	12	12	13	14	14	15	15	16	17
7	—	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	15	15
8	—	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	10	10	11	11	12	12	13	13	14
9	—	3	4	4	4	5	5	6	6	6	7	7	8	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13
10	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8	8	9	9	10	10	10	11	11	12	12
11	2	3	3	4	4	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11
12	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	10	10	10	11
13	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10
14	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10
15	2	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	9	9	9	9
16	2	3	3	3	4	3	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	9
17	2	2	3	3	4	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8
18	2	2	3	3	4	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8	8	8
19	2	2	3	3	4	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8	8
20	2	2	3	3	4	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7
21	2	2	3	3	4	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	7	7	7
22	2	2	3	3	4	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	7	7	7
23	2	2	2	3	4	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7
24	2	2	2	3	4	3	3	3	4	4	4														

confiance de 5 %

26 27 28 29 30	31 32 33 34 35	36 37 38 39 40	41 42 43 44 45	46 47 48 49 50	m n
— — — — —	— — — — —	— — — — —	— — — — —	— — — — —	1
24 25 26 27 28	29 29 30 31 32	33 34 35 35 36	41 42 43 44 45	46 47 48 49 50	2
21 22 23 24 24	25 26 27 27 28	29 30 30 31 32	37 38 39 40 41	41 42 43 44 45	3
19 20 20 21 22	22 23 24 24 25	26 26 27 28 28	33 33 34 35 36	36 37 38 39 39	4
			29 30 30 31 32	32 33 33 34 35	5
17 18 18 19 19	20 21 21 22 22	23 24 24 25 25	26 26 27 28 28	29 29 30 31 31	6
16 16 17 17 18	18 19 19 20 20	21 21 22 22 23	23 24 24 25 25	26 27 27 28 28	7
14 15 15 16 16	17 17 18 18 19	19 19 20 20 21	21 22 22 23 23	24 24 25 25 26	8
13 14 14 15 15	15 16 16 17 17	18 18 18 19 19	20 20 21 21 21	22 22 23 23 24	9
12 13 13 14 14	14 15 15 15 16	16 17 17 17 18	18 19 19 19 20	20 21 21 21 22	10
12 12 12 13 13	13 14 14 14 15	15 16 16 16 17	17 17 18 18 19	19 19 20 20 20	11
11 11 12 12 12	13 13 13 14 14	14 15 15 15 16	16 16 17 17 17	18 18 18 19 19	12
10 11 11 11 12	12 12 13 13 13	14 14 14 14 15	15 15 16 16 16	17 17 17 18 18	13
10 10 10 11 11	11 12 12 12 13	13 13 13 14 14	14 15 15 15 15	16 16 16 17 17	14
9 10 10 10 10	11 11 11 12 12	12 12 13 13 13	14 14 14 14 15	15 15 16 16 16	15
9 9 9 10 10	10 11 11 11 11	12 12 12 12 13	13 13 13 14 14	14 15 15 15 15	16
9 9 9 9 10	10 10 10 11 11	11 11 12 12 12	12 13 13 13 13	14 14 14 14 15	17
8 9 9 9 9	9 10 10 10 10	11 11 11 11 12	12 12 12 13 13	13 13 14 14 14	18
8 8 8 9 9	9 9 10 10 10	10 11 11 11 11	11 12 12 12 12	13 13 13 13 13	19
8 8 8 8 9	9 9 9 9 10	10 10 10 11 11	11 11 11 12 12	12 12 13 13 13	20
7 8 8 8 8	9 9 9 9 9	10 10 10 10 10	11 11 11 11 11	12 12 12 12 12	21
7 7 8 8 8	8 8 9 9 9	9 9 10 10 10	10 10 11 11 11	11 11 12 12 12	22
7 7 7 8 8	8 8 8 9 9	9 9 9 10 10	10 10 10 11 11	11 11 11 11 12	23
7 7 7 7 8	8 8 8 8 9	9 9 9 9 9	10 10 10 10 10	11 11 11 11 11	24
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8	8 9 9 9 9	9 10 10 10 10	10 10 11 11 11	25
7 7 7 7 7	7 8 8 8 8	8 8 9 9 9	9 9 9 10 10	10 10 10 10 11	26
6 7 7 7 7	7 7 8 8 8	8 8 8 9 9	9 9 9 9 10	10 10 10 10 10	27
6 6 7 7 7	7 7 7 7 8	8 8 8 8 8	9 9 9 9 9	9 10 10 10 10	28
6 6 6 7 7	7 7 7 7 7	8 8 8 8 8	8 9 9 9 9	9 9 10 10 10	29
6 6 6 6 7	7 7 7 7 7	7 8 8 8 8	8 8 9 9 9	9 9 9 9 10	30
6 6 6 6 6	7 7 7 7 7	7 7 8 8 8	8 8 8 8 9	9 9 9 9 9	31
6 6 6 6 6	6 7 7 7 7	7 7 7 8 8	8 8 8 8 8	9 9 9 9 9	32
6 6 6 6 6	6 6 7 7 7	7 7 7 7 8	8 8 8 8 8	8 9 9 9 9	33
5 6 6 6 6	6 6 6 7 7	7 7 7 7 7	8 8 8 8 8	8 8 8 9 9	34
5 6 6 6 6	6 6 6 6 7	7 7 7 7 7	7 8 8 8 8	8 8 8 8 9	35
5 5 6 6 6	6 6 6 6 6	7 7 7 7 7	7 7 8 8 8	8 8 8 8 8	36
5 5 5 6 6	6 6 6 6 6	6 7 7 7 7	7 7 7 7 8	8 8 8 8 8	37
5 5 5 5 6	6 6 6 6 6	6 6 7 7 7	7 7 7 7 7	8 8 8 8 8	38
5 5 5 5 6	6 6 6 6 6	6 6 7 7 7	7 7 7 7 7	7 8 8 8 8	39
5 5 5 5 5	6 6 6 6 6	6 6 6 7 7	7 7 7 7 7	7 7 8 8 8	40
5 5 5 5 5	5 6 6 6 6	6 6 6 6 7	7 7 7 7 7	7 7 7 8 8	41
5 5 5 5 5	5 6 6 6 6	6 6 6 6 6	7 7 7 7 7	7 7 7 7 8	42
5 5 5 5 5	5 5 6 6 6	6 6 6 6 6	6 7 7 7 7	7 7 7 7 7	43
5 5 5 5 5	5 5 5 6 6	6 6 6 6 6	6 6 7 7 7	7 7 7 7 7	44
5 5 5 5 5	5 5 5 5 6	6 6 6 6 6	6 6 6 7 7	7 7 7 7 7	45
5 5 5 5 5	5 5 5 5 6	6 6 6 6 6	6 6 6 6 7	7 7 7 7 7	46
5 5 5 5 5	5 5 5 5 5	6 6 6 6 6	6 6 6 6 6	7 7 7 7 7	47
4 5 5 5 5	5 5 5 5 5	5 6 6 6 6	6 6 6 6 6	6 7 7 7 7	48
4 5 5 5 5	5 5 5 5 5	5 6 6 6 6	6 6 6 6 6	6 6 7 7 7	49
4 4 5 5 5	5 5 5 5 5	5 5 6 6 6	6 6 6 6 6	6 6 6 7 7	50

le confiance de 1 %

26 27 28 29 30	31 32 33 34 35	36 37 38 39 40	41 42 43 44 45	46 47 48 49 50	m n
— — — — —	— — — — —	— — — — —	— — — — —	— — — — —	1
— — — — —	— — — — —	— — — — —	— — — — —	— — — — —	2
26 27 28 29 30	31 32 33 34 35	36 37 38 39 39	40 41 42 43 44	45 46 47 48 49	3
24 25 26 27 28	29 30 30 31 32	33 34 35 36 37	37 38 38 40 41	42 42 43 44 45	4
22 23 24 25 26	26 27 28 29 29	30 31 32 33 33	34 35 36 37 37	38 39 40 40 41	5
21 21 22 23 24	24 25 26 26 27	28 29 29 30 31	31 32 33 33 34	35 36 36 37 38	6
19 20 20 21 22	22 23 24 24 25	26 26 27 28 28	29 30 30 31 31	32 33 33 34 35	7
18 18 19 20 20	21 21 22 23 23	24 24 25 26 26	27 27 28 29 29	30 30 31 31 32	8
17 17 18 18 19	19 20 21 21 22	22 23 23 24 24	25 25 26 27 27	28 28 29 29 30	9
16 16 17 17 18	18 19 19 20 20	21 21 22 22 23	23 24 24 25 25	26 26 27 27 28	10
15 15 16 16 17	17 18 18 19 19	20 20 21 21 21	22 22 23 23 24	24 25 25 26 26	11
14 15 15 15 16	16 17 17 18 18	19 19 19 20 20	21 21 22 22 23	23 23 24 24 25	12
13 14 14 15 15	16 16 16 17 17	18 18 18 19 19	20 20 21 21 21	22 22 23 23 23	13
13 13 14 14 14	15 15 16 16 16	17 17 18 18 18	19 19 20 20 20	21 21 21 22 22	14
12 13 13 13 14	14 15 15 15 16	16 16 17 17 18	18 18 19 19 19	20 20 20 21 21	15
12 12 13 13 13	14 14 14 15 15	15 16 16 16 17	17 17 18 18 19	19 19 20 20 20	16
11 12 12 12 13	13 13 14 14 14	15 15 15 16 16	16 17 17 17 18	18 18 19 19 19	17
11 11 12 12 12	13 13 13 14 14	14 15 15 15 15	16 16 16 17 17	17 18 18 18 19	18
11 11 11 12 12	12 12 13 13 13	14 14 14 15 15	15 16 16 16 16	17 17 17 18 18	19
10 11 11 11 11	12 12 12 13 13	13 14 14 14 14	15 15 15 16 16	16 16 17 17 17	20
10 10 11 11 11	11 12 12 12 13	13 13 13 14 14	14 14 15 15 15	16 16 16 16 17	21
10 10 10 10 11	11 11 12 12 12	12 13 13 13 13	14 14 14 15 15	15 15 16 16 16	22
9 10 10 10 10	11 11 11 12 12	12 12 13 13 13	13 14 14 14 14	15 15 15 15 16	23
9 9 10 10 10	10 11 11 11 11	12 12 12 12 13	13 13 13 14 14	14 14 15 15 15	24
9 9 9 10 10	10 10 11 11 11	11 12 12 12 12	13 13 13 13 14	14 14 14 15 15	25
9 9 9 9 10	10 10 10 11 11	11 11 12 12 12	12 12 13 13 13	13 14 14 14 14	26
9 9 9 9 9	10 10 10 10 11	11 11 11 11 12	12 12 12 13 13	13 13 14 14 14	27
8 9 9 9 9	9 10 10 10 10	11 11 11 11 11	12 12 12 12 13	13 13 13 13 14	28
8 8 9 9 9	9 9 10 10 10	10 11 11 11 11	11 12 12 12 12	12 13 13 13 13	29
8 8 8 9 9	9 9 9 10 10	10 10 11 11 11	11 11 12 12 12	12 12 13 13 13	30
8 8 8 8 9	9 9 9 9 10	10 10 10 10 11	11 11 11 11 12	12 12 12 12 13	31
8 8 8 8 8	9 9 9 9 9	10 10 10 10 10	11 11 11 11 11	12 12 12 12 12	32
8 8 8 8 8	9 9 9 9 9	9 10 10 10 10	10 11 11 11 11	11 12 12 12 12	33
7 8 8 8 8	8 9 9 9 9	9 9 10 10 10	10 10 11 11 11	11 11 12 12 12	34
7 7 8 8 8	8 8 9 9 9	9 9 9 10 10	10 10 10 11 11	11 11 11 11 12	35
7 7 7 8 8	8 8 8 9 9	9 9 9 9 10	10 10 10 10 11	11 11 11 11 11	36
7 7 7 7 8	8 8 8 8 9	9 9 9 9 9	10 10 10 10 10	11 11 11 11 11	37
7 7 7 7 8	8 8 8 8 8	9 9 9 9 9	10 10 10 10 10	10 11 11 11 11	38
7 7 7 7 8	8 8 8 8 8	9 9 9 9 9	9 10 10 10 10	10 10 10 11 11	39
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8	8 9 9 9 9	9 9 10 10 10	10 10 10 10 11	40
7 7 7 7 7	7 8 8 8 8	8 8 9 9 9	9 9 9 10 10	10 10 10 10 10	41
7 7 7 7 7	7 8 8 8 8	8 8 8 9 9	9 9 9 9 10	10 10 10 10 10	42
6 7 7 7 7	7 7 8 8 8	8 8 8 8 9	9 9 9 9 9	10 10 10 10 10	43
6 7 7 7 7	7 7 7 8 8	8 8 8 8 8	9 9 9 9 9	9 10 10 10 10	44
6 6 7 7 7	7 7 7 7 8	8 8 8 8 8	9 9 9 9 9	9 9 10 10 10	45
6 6 6 7 7	7 7 7 7 8	8 8 8 8 8	8 9 9 9 9	9 9 9 10 10	46
6 6 6 7 7	7 7 7 7 7	8 8 8 8 8	8 8 9 9 9	9 9 9 9 10	47
6 6 6 7 7	7 7 7 7 7	7 8 8 8 8	8 8 8 9 9	9 9 9 9 9	48
6 6 6 6 7	7 7 7 7 7	7 8 8 8 8	8 8 8 8 9	9 9 9 9 9	49
6 6 6 6 6	7 7 7 7 7	7 7 8 8 8	8 8 8 8 8	9 9 9 9 9	50

de confiance de 5 %

26 27 28 29 30					31 32 33 34 35					36 37 38 39 40					41 42 43 44 45					46 47 48 49 50					m n	
26 27 28 29 30	31 32 33 34 35	36 37 38 39 40	41 42 43 44 45	46 47 48 49 50	1																					
22 23 23 24 25	26 26 27 28 29	30 30 31 32 33	33 34 35 36 37	37 38 39 40 40	2																					
18 19 19 20 21	21 22 23 23 24	24 25 26 26 27	28 28 29 30 30	31 31 32 33 33	3																					
15 16 17 17 18	18 19 19 20 20	21 21 22 22 23	23 24 24 25 26	26 27 27 28 28	4																					
14 14 14 15 15	16 16 17 17 18	18 18 19 19 20	20 21 21 22 22	23 23 23 24 24	5																					
12 12 13 13 14	14 14 15 15 16	16 16 17 17 18	18 18 19 19 20	20 20 21 21 21	6																					
11 11 12 12 12	13 13 13 14 14	14 15 15 15 16	16 16 17 17 18	18 18 19 19 19	7																					
10 10 11 11 11	12 12 12 12 13	13 13 14 14 14	15 15 15 16 16	16 17 17 17 17	8																					
9 9 10 10 10	11 11 11 11 12	12 12 13 13 13	13 14 14 14 15	15 15 15 16 16	9																					
9 9 9 9 10	10 10 10 11 11	11 11 12 12 12	12 13 13 13 14	14 14 14 15 15	10																					
8 8 9 9 9	9 9 10 10 10	10 11 11 11 11	12 12 12 12 13	13 13 13 14 14	11																					
8 8 8 8 8	9 9 9 9 10	10 10 10 10 11	11 11 11 12 12	12 12 12 13 13	12																					
7 7 8 8 8	8 8 9 9 9	9 9 10 10 10	10 11 11 11 11	11 12 12 12 12	13																					
7 7 7 7 8	8 8 8 8 9	9 9 9 9 10	10 10 10 10 11	11 11 11 11 12	14																					
7 7 7 7 7	7 8 8 8 8	8 9 9 9 9	9 9 10 10 10	10 10 11 11 11	15																					
6 6 7 7 7	7 7 7 8 8	8 8 8 9 9	9 9 9 9 10	10 10 10 10 10	16																					
6 6 6 7 7	7 7 7 7 8	8 8 8 8 8	8 9 9 9 9	9 9 10 10 10	17																					
6 6 6 6 6	7 7 7 7 7	7 8 8 8 8	8 8 8 9 9	9 9 9 9 10	18																					
6 6 6 6 6	6 7 7 7 7	7 7 7 8 8	8 8 8 8 8	9 9 9 9 9	19																					
5 6 6 6 6	6 6 6 7 7	7 7 7 7 7	8 8 8 8 8	8 8 9 9 9	20																					
5 5 6 6 6	6 6 6 6 6	7 7 7 7 7	7 7 8 8 8	8 8 8 8 9	21																					
5 5 5 6 6	6 6 6 6 6	6 7 7 7 7	7 7 7 7 8	8 8 8 8 8	22																					
5 5 5 5 5	6 6 6 6 6	6 6 6 7 7	7 7 7 7 7	7 8 8 8 8	23																					
5 5 5 5 5	5 6 6 6 6	6 6 6 6 7	7 7 7 7 7	7 7 7 8 8	24																					
5 5 5 5 5	5 5 6 6 6	6 6 6 6 6	6 7 7 7 7	7 7 7 7 8	25																					
5 5 5 5 5	5 5 5 6 6	6 6 6 6 6	6 6 7 7 7	7 7 7 7 7	26																					
5 5 5 5 5	5 5 5 5 6	6 6 6 6 6	6 6 6 6 7	7 7 7 7 7	27																					
4 5 5 5 5	5 5 5 5 5	5 6 6 6 6	6 6 6 6 6	7 7 7 7 7	28																					
4 4 5 5 5	5 5 5 5 5	5 5 6 6 6	6 6 6 6 6	6 6 7 7 7	29																					
4 4 4 5 5	5 5 5 5 5	5 5 5 6 6	6 6 6 6 6	6 6 6 7 7	30																					
4 4 4 4 5	5 5 5 5 5	5 5 5 5 6	6 6 6 6 6	6 6 6 6 6	31																					
4 4 4 4 4	5 5 5 5 5	5 5 5 5 5	5 6 6 6 6	6 6 6 6 6	32																					
4 4 4 4 4	4 5 5 5 5	5 5 5 5 5	5 5 6 6 6	6 6 6 6 6	33																					
4 4 4 4 4	4 4 5 5 5	5 5 5 5 5	5 5 5 6 6	6 6 6 6 6	34																					
4 4 4 4 4	4 4 5 5 5	5 5 5 5 5	5 5 5 6 6	6 6 6 6 6	35																					
4 4 4 4 4	4 4 4 5 5	5 5 5 5 5	5 5 5 5 5	6 6 6 6 6	36																					
4 4 4 4 4	4 4 4 4 5	5 5 5 5 5	5 5 5 5 5	5 5 6 6 6	37																					
4 4 4 4 4	4 4 4 4 4	5 5 5 5 5	5 5 5 5 5	5 5 5 6 6	38																					
4 4 4 4 4	4 4 4 4 4	4 5 5 5 5	5 5 5 5 5	5 5 5 5 6	39																					
4 4 4 4 4	4 4 4 4 4	4 4 5 5 5	5 5 5 5 5	5 5 5 5 5	40																					
4 4 4 4 4	4 4 4 4 4	4 4 4 5 5	5 5 5 5 5	5 5 5 5 5	41																					
4 4 4 4 4	4 4 4 4 4	4 4 4 4 5	5 5 5 5 5	5 5 5 5 5	42																					
3 4 4 4 4	4 4 4 4 4	4 4 4 4 4	5 5 5 5 5	5 5 5 5 5	43																					
3 4 4 4 4	4 4 4 4 4	4 4 4 4 4	5 5 5 5 5	5 5 5 5 5	44																					
3 3 4 4 4	4 4 4 4 4	4 4 4 4 4	4 5 5 5 5	5 5 5 5 5	45																					
3 3 3 4 4	4 4 4 4 4	4 4 4 4 4	4 4 5 5 5	5 5 5 5 5	46																					
3 3 3 4 4	4 4 4 4 4	4 4 4 4 4	4 4 4 5 5	5 5 5 5 5	47																					
3 3 3 3 4	4 4 4 4 4	4 4 4 4 4	4 4 4 4 5	5 5 5 5 5	48																					
3 3 3 3 4	4 4 4 4 4	4 4 4 4 4	4 4 4 4 4	5 5 5 5 5	49																					
3 3 3 3 3	4 4 4 4 4	4 4 4 4 4	4 4 4 4 4	4 5 5 5 5	50																					

2° TEST. — Seul

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	23	24
3	—	—	—	—	—	—	7	8	9	10	11	11	12	13	14	15	15	16	17	18	18	19	20	21	22
4	—	—	—	—	5	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12	13	14	14	15	16	16	17	18	19	19
5	—	—	—	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	11	11	12	12	13	14	14	15	15	16	17	17
6	—	—	—	4	5	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	14	14	15	15	16
7	—	—	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14
8	—	—	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	12	13	13
9	—	—	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8	8	9	9	10	10	10	11	11	12	12	12
10	—	—	3	4	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	11	11	11	12
11	—	—	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11
12	—	—	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	10
13	—	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10
14	—	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9
15	—	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	9	9	9
16	—	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9
17	—	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8
18	—	2	3	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8
19	—	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8
20	—	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8
21	—	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7
22	—	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7
23	—	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7
24	—	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7
25	—	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7
26	—	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6
27	—	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6
28	—	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
29	—	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6
30	—	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6
31	—	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6
32	—	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6
33	—	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6
34	—	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6
35	—	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5
36	—	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5
37	—	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5
38	—	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5
39	—	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5
40	—	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
41	—	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
42	—	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
43	—	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
44	—	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
45	—	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
46	—	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
47	—	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
48	—	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
49	—	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
50	—	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5

de confiance de 1 %

26 27 28 29 30					31 32 33 34 35					36 37 38 39 40					41 42 43 44 45					46 47 48 49 50					m n	
— — — — —					— — — — —					— — — — —					— — — — —					— — — — —					1 2 3 4 5	
25 26 27 28 29	30 31 32 32 33				34 35 36 37 38	39 40 41 41 42				43 44 45 46 47	1				2	3				4	5					
22 23 24 25 26	26 27 28 29 29				30 31 32 33 33	34 35 36 37 37				38 39 40 40 41	7				8	9				10	11					
20 21 21 22 23	23 24 25 25 26				27 27 28 29 30	30 31 32 32 33				34 34 35 36 36	13				14	15				16	17					
18 18 19 20 20	21 22 22 22 23				24 25 25 26 26	27 28 28 29 29				30 31 31 32 32	19				20	21				22	23					
16 17 17 18 18	19 19 20 21 21				22 22 23 23 24	24 25 25 26 26				27 28 28 29 29	25				26	27				28	29					
15 15 16 16 17	17 18 18 19 19				20 20 21 21 22	22 23 23 24 24				25 25 26 26 26	29				30	31				32	33					
14 14 15 15 16	16 16 17 17 18				18 19 19 19 20	20 21 21 22 22				23 23 23 24 24	35				36	37				38	39					
13 13 14 14 14	15 15 16 16 16				17 17 18 18 18	19 19 20 20 20				21 21 22 22 22	41				42	43				44	45					
12 12 13 13 13	14 14 15 15 15				16 16 16 17 17	18 18 18 19 19				19 20 20 21 21	47				48	49				50	51					
11 12 12 12 13	13 13 14 14 14				15 15 15 16 16	16 17 17 18 18				17 17 18 18 18	53				54	55				56	57					
11 11 11 12 12	12 13 13 13 14				14 14 15 15 15	16 16 16 17 17				17 17 18 18 18	59				60	61				62	63					
10 10 11 11 11	12 12 12 13 13				13 14 14 14 14	15 15 15 16 16				16 17 17 17 17	65				66	67				68	69					
10 10 10 11 11	11 11 12 12 12				13 13 13 13 14	14 14 15 15 15				15 16 16 16 17	71				72	73				74	75					
9 10 10 10 10	11 11 11 11 12				12 12 13 13 13	13 14 14 14 14				15 15 15 15 16	77				78	79				80	81					
9 9 9 10 10	10 10 11 11 11				11 12 12 12 13	12 12 13 13 13				13 14 14 14 14	83				84	85				86	87					
9 9 9 9 10	10 10 10 11 11				11 11 12 12 12	12 12 13 13 13				13 13 13 13 13	89				90	91				92	93					
8 9 9 9 9	9 10 10 10 10				10 10 11 11 12	11 12 12 12 13				12 13 13 14 14	95				96	97				98	99					
8 8 8 9 9	9 9 10 10 10				10 10 11 11 11	11 12 12 12 12				12 13 13 13 13	101				102	103				104	105					
8 8 8 8 9	9 9 9 9 10				10 10 10 11 11	11 11 11 12 12				12 12 12 13 13	107				108	109				110	111					
8 8 8 8 8	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	113				114	115				116	117					
7 8 8 8 8	8 9 9 9 9				9 9 10 10 10	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	119				120	121				122	123					
7 7 8 8 8	8 8 8 9 9				9 9 9 10 10	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	125				126	127				128	129					
7 7 7 8 8	8 8 8 8 9				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	131				132	133				134	135					
7 7 7 7 8	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	137				138	139				140	141					
7 7 7 7 8	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	143				144	145				146	147					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	149				150	151				152	153					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	155				156	157				158	159					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	161				162	163				164	165					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	167				168	169				170	171					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	173				174	175				176	177					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	179				180	181				182	183					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	185				186	187				188	189					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	191				192	193				194	195					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	197				198	199				200	201					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	203				204	205				206	207					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	209				210	211				212	213					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	215				216	217				218	219					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	221				222	223				224	225					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	227				228	229				230	231					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	233				234	235				236	237					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	239				240	241				242	243					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	245				246	247				248	249					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	251				252	253				254	255					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	257				258	259				260	261					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	263				264	265				266	267					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	269				270	271				272	273					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	275				276	277				278	279					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	281				282	283				284	285					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	287				288	289				290	291					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	293				294	295				296	297					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	299				300	301				302	303					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	305				306	307				308	309					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	311				312	313				314	315					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	317				318	319				320	321					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	323				324	325				326	327					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	329				330	331				332	333					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	335				336	337				338	339					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	341				342	343				344	345					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	347				348	349				350	351					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	353				354	355				356	357					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	359				360	361				362	363					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	365				366	367				368	369					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	371				372	373				374	375					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	377				378	379				380	381					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	383				384	385				386	387					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	389				390	391				392	393					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	395				396	397				398	399					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	401				402	403				404	405					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	407				408	409				410	411					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	413				414	415				416	417					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	419				420	421				422	423					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	425				426	427				428	429					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	431				432	433				434	435					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	437				438	439				440	441					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	443				444	445				446	447					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	449				450	451				452	453					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	455				456	457				458	459					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	461				462	463				464	465					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	467				468	469				470	471					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	473				474	475				476	477					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	479				480	481				482	483					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	485				486	487				488	489					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	491				492	493				494	495					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	497				498	499				500	501					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	503				504	505				506	507					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9 9 9 9	10 10 10 10 10				11 11 11 11 11	509				510	511				512	513					
7 7 7 7 7	8 8 8 8 8				9 9																					

DISCUSSION

Président : M. REMENIERAS

M. le Président remercie M. BILLIET et lui souhaite la bienvenue à l'occasion de sa première communication à la S.H.F.

M. FERRY remarque que, dans le cas où les deux séries d'observations sont à cheval l'une sur l'autre, le mode de calcul indiqué par M. BILLIET ne tient compte que du dépassement d'un seul côté : or, les deux dépassements (antérieur et postérieur) ont la même valeur indicative et sont, par ailleurs, indépendants, de telle sorte qu'un calcul qui ne prendrait en compte que l'autre dépassement donnerait un résultat différent; on perd donc ainsi une partie de l'information.

D'ailleurs ce test d'homogénéité, teste à la fois deux choses : l'homogénéité de la moyenne et l'homogénéité de la dispersion. Précisément, si on les considère indépendamment des dépassements de côté et d'autre, on met partiellement en évidence ces deux effets séparément. La dispersion ou la non homogénéité de la moyenne doit se traduire par un décalage des deux séries, c'est-à-dire par un dépassement négatif d'un côté et positif de l'autre, et la dispersion ou la non homogénéité des dispersions se traduira par un plus grand étirement d'une série que de l'autre.

M. BILLIET remarque que, dans les deux exemples qu'il a cités, le dépassement était très net d'un côté et très faible de l'autre : il pense que c'est dans de telles conditions que l'emploi du test est indiqué, celui-ci étant opéré du côté où le dépassement semble, *a priori*, significatif.

M. FERRY estime que dans ce cas on admet qu'il y a une plus grande probabilité d'avoir un dépassement important et la loi de probabilité admise pour base ne lui paraît donc plus valable.

M. MORLAT signale qu'on peut lever entièrement la dernière objection de M. FERRY (sélection du dépassement qui semble accidentellement le plus grand) en jugeant du résultat du test non pas d'après la probabilité q mais d'après la valeur de :

1 — $(1 - q)^2$ soit pratiquement $2q$ (lorsque q est petit)

Après la séance, nous avons reçu de MM. BILLIET et MORLAT les remarques suivantes :

1° M. FERRY a partiellement raison. Dans le cas où le

chevauchement des deux séries est tel que les dépassements sont du même ordre de grandeur des deux côtés, l'application du 2° test de Wilks conduirait à une perte d'informations trop importante. Il y aurait lieu dans ce cas d'appliquer un 3° test dont nous avons calculé les formules, d'ailleurs assez compliquées (notons en effet que les deux dépassements ne sont pas indépendants).

2° Dans le cas, au contraire, où l'un des dépassements est nettement plus important que l'autre, il ne semble pas y avoir d'obstacle majeur à l'application du 2° test de Wilks.

Il nous semble que les objections formulées par M. FERRY touchent à une difficulté très réelle de la théorie des tests. Il existe un hiatus entre la théorie et l'emploi des tests statistiques, puisque la théorie est faite, pour un test donné, comme si ce test devait être systématiquement employé par le statisticien dans chacun de ses travaux. C'est dans ce cas seulement que les probabilités des erreurs de première et de seconde espèce calculées par Neyman correspondraient à des fréquences d'échec à peu près égales à ces probabilités.

Mais en fait, le statisticien utilisera tel test dans telle circonstance parce qu'il a remarqué quelque anomalie, qui lui permet de soupçonner que le test peut conduire à un résultat significatif. Et qui le lui reprochera?

Ces remarques ne visent nullement à nier l'utilité d'une théorie logique telle que la théorie des tests de Neyman et Pearson. Elle constitue un excellent guide pour le raisonnement du statisticien, qui ne doit pas cependant se borner à une application mécanique.

On a souvent souligné, avec raison, qu'en matière de recherche scientifique, l'induction joue un rôle inéluctable; le caractère subjectif de certaines démarches en découle, et il vaut sans doute mieux le reconnaître et le proclamer, plutôt que de s'abuser par une prétendue objectivité totale.

Il semble d'ailleurs que les statisticiens en sont de plus en plus conscients. Nous renvoyons sur ce point au mémoire d'Etienne HALPHEN, récemment publié « La notion de vraisemblance; essai sur les fondements de calcul des probabilités et de la statistique mathématique ».