Modèles analogiques électriques à trois dimensions pour l'étude des écoulements de filtration à surface libre

Three dimensional electrical analogy models
used to study percolation flow systems with free surfaces

PAR P. HUARD DE LA MARRE

ATTACHÉ DE RECHERCHES AU C.N.R.S.

Si théoriquement les analogies électriques s'appliquent aussi bien aux problèmes de filtration tri-dimensionnels qu'aux problèmes plans, la réalisation des modèles analogiques à trois dimensions et leur utilisation posent quelques difficultés, principalement en ce qui concerne la représentation de la surface libre, inconnue a priori, et que l'on doit déterminer par approximations successives. Le procédé de la cuve reste toujours possible, mais devient long et onéreux (cuve entièrement fermée, difficultés d'exploration du champ à l'intérieur du modèle, changement d'une partie de la cuve à chaque approximation de la surface libre). C'est pourquoi l'auteur a été amené à mettre au point deux procédés, de précision moindre, mais plus rapides, l'un basé sur l'emploi des modèles analogiques solides en plâtre, l'autre sur l'utilisation de réseaux de conductances.

Although electrical analogies are in theory just as easily applied to three dimensional percolation problems, as to two dimensional problems, difficulties arise in constructing and using three dimensional analogy models. The main problem is to represent the free surface which, a priori, is unknown and has to be determined by successive approximations. It is still possible to use the tank method which becomes both lengthy and onerous (the tank is completely closed, difficulty is encountered in investigating the field inside the model, a part of the tank has to be changed for each approximation to the free surface). This is why the author has developed two methods, which although less precise, are more rapid. In one, solid analogical plaster models are used and the other uses networks of conductances.

I. — RAPPEL DES PROCÉDÉS D'ANALOGIES RHÉOÉLECTRIQUES RELATIFS AUX PROBLÈMES D'INFILTRATION LEUR EXTENSION AUX PROBLÈMES A TROIS DIMENSIONS

A) Milieux homogènes et isotropes.

On sait que les écoulements de filtration à deux dimensions en milieu homogène et isotrope dérivent, sous couvert de la loi de Darcy, d'un potentiel harmonique $\varphi = p(x, z) / \varpi + z$ (p étant la pression du fluide et ϖ son poids spécifique). Ces écoulements peuvent donc être résolus par les méthodes bien connues d'analogies rhéoelectriques. Le problème de la détermination de la surface libre, inconnue a priori, ainsi que la

précision demandée, conduisent à utiliser pratiquement des modèles analogiques en papier spécial conducteur faciles à confectionner (réf. 1). La précision obtenue à l'aide de cette technique sur la détermination de la position de la surface libre des valeurs du potentiel et sur les mesures de débit est de l'ordre de quelques pour cent. L'utilisation de la cuve, plus longue et plus onéreuse, est généralement réservée à des problèmes nécessitant une meilleure précision. Signalons néanmoins un procédé dû à Mladen BORELI permettant d'ajuster rapidement à la cuve la

surface libre : celle-ci est matérialisée par une bande de caoutchouc mousse collée à l'aide de vaseline (réf. 2).

Pour les problèmes à trois dimensions, le papier n'est plus utilisable. Il nous faut alors construire le modèle analogue à l'aide d'un matériau conducteur, possédant un ensemble de qualités tant mécaniques qu'électriques que l'on trouve rarement réunies dans les produits courants. Ces qualités peuvent être résumées ainsi :

- Facilement moulable;
- Facile à travailler (pour l'ajustage de la surface libre);
- Résistivité électrique comprise entre $10^2 \omega\text{-cm}$ et $10^6 \omega\text{-cm}$ (pour fixer les idées);
- Homogénéité, isotropie et stabilité de la résistivité.

Un tel matériau solide ne permet pas un relevé continu du potentiel à l'intérieur du modèle analogue. Il faut disposer à l'avance, avant la coulée du modèle, un grand nombre de sondes électriques ponctuelles reliées à des bornes extérieures par des fils fins isolés. Le potentiel n'est connu qu'en un certain nombre de points choisis, comme dans un réseau à trois dimensions.

Nous verrons plus loin (chapitre II) qu'un matériau bien connu, le plâtre, permet de réaliser pratiquement, moyennant certaines précautions, de tels modèles analogiques à trois dimensions.

Signalons, pour terminer ce paragraphe relatif aux milieux homogènes, le procédé ingénieux

de J. CAILLE et C. HABIB qui consiste à utiliser la partie mouillée d'un modèle hydraulique en sable avec surface libre, comme modèle analogue électrique (réf. 3).

B) Milieux hétérogènes et anisotropes.

On sait que, dans le cas de problèmes plans, les écoulements en milieux hétérogènes et anisotropes peuvent être étudiés à l'aide de réseaux de conductances, ces dernières étant calculées proportionnellement à la valeur de la perméabilité (réf. 1 et 4). Si l'on dispose d'un grand nombre de mailles, on peut représenter la surface libre de l'écoulement, ainsi que les autres frontières imperméables, à une maille près (réf. 1). Dans le cas où les mailles ne sont plus très petites (faible nombre de mailles), les frontières lignes de courant peuvent alors être représentées soit à l'aide d'injections (cas de la surface libre par exemple), soit en utilisant des mailles rectangulaires inégales disposées de telle façon que la frontière ne passe que par des nœuds (cas d'une frontière imperméable donnée) (réf. 4).

Mis à part le procédé consistant à utiliser des mailles de petites dimensions pour déterminer la surface libre, à une maille près, qui conduirait à un nombre excessif de conductances, ces propriétés de réseaux s'appliquent sans aucune difficulté aux problèmes tri-dimensionnels.

L'étude des réseaux à trois dimensions fait l'objet du chapitre III.

II. — TECHNIQUE DES MODÈLES EN PLÂTRE

A) Caractéristiques du plâtre.

Le plâtre gâché à l'eau et encore frais est très bon conducteur de l'électricité. Les qualités de ce matériau pour le moulage (rapidité de prise, gonflement), sa rigidité une fois pris tout en restant facile à travailler, ainsi que son bas prix de revient, m'ont conduit à l'utiliser pour la confection de modèles analogiques.

Des essais systématiques sur des échantillons de 25 cm de long et de 25 cm² de section, en utilisant du courant alternatif, ont permis d'établir les résultats suivants :

1. HOMOGÉNÉITÉ.

Les variations relatives de la résistivité étaient de l'ordre de 0,5 %.

2. RÉSISTANCE DE CONTACT DES ÉLECTRODES.

Négligeable en employant de la toile en fil de laiton.

3. RÉSISTANCE DE CONTACT PLÂTRE-PLÂTRE.

Il peut être intéressant de couler un modèle en plusieurs fois. Les surfaces de raccordement des différentes coulées présentent alors des chutes de potentiel dues à des résistances de contact plâtre-plâtre. Des essais sur raccords de barreaux ont donné des résistances de contact correspondant à des épaisseurs de plâtre de 6 mm. On peut donc utiliser le coulage en plusieurs fois si le modèle est de dimensions suffisantes.

4. VARIATION DE LA RÉSISTIVITÉ EN FONCTION DU TEMPS.

La résistivité du plâtre varie beaucoup avec son degré d'humidité. Par suite, la résistance d'un barreau de plâtre frais, possédant une grande surface d'évaporation, augmente très rapidement dans les quelques jours qui suivent sa coulée. Par contre, des essais sur barreaux vernis ont donné une variation de la résistivité de 2.000 à 2.900 ω -cm seulement pour une durée de neuf jours, avec une variation sensiblement linéaire de 100 ω -cm par jour : la résistivité variait dans ce cas de moins de 1 % en cinq heures.

Il résulte de ces essais qu'on ne peut prévoir la résistivité d'un modèle analogique en plâtre, la valeur de celle-ci dépendant essentiellement du temps écoulé depuis la prise du plâtre. Néanmoins, avec un modèle suffisamment protégé contre l'évaporation, la résistivité reste suffisamment stable durant l'expérience. C'est le cas des modèles coulés dans un moule imperméable, seule la surface libre reste à découvert au cours de sa détermination par grattage. Nous verrons plus loin que l'humidité reste bien répartie dans un tel modèle. Nous verrons également comment mesurer la résistivité du modèle au cours de l'expérience.

B) Les modèles analogiques.

1. COULÉE DU MODÈLE.

Avant d'être coulé, le plâtre doit être bien liquide et très homogène, sans grumeaux. Le procédé classique consiste à le verser en pluie fine sur toute la surface de l'eau, en totalité, puis à brasser le liquide dans toute sa masse. La proportion de 1 kg de plâtre pour 750 cm³ d'eau donne de bons résultats (plâtre bien liquide avant la prise et suffisamment consistant après), avec de larges tolérances.

Le moule doit évidemment être isolant (bois vernis, matière plastique renforcée de fibre de verre, ou même moule en plâtre préalablement séché et soigneusement verni).

2. LES ÉLECTRODES.

Le moule est au préalable tapissé de toile métallique en laiton sur les parties équipotentiellles (parement amont d'un barrage par exemple, drains, etc.). Ces électrodes doivent pouvoir être alimentées électriquement de l'extérieur du moule.

Des essais sont en cours pour utiliser des électrodes peintes directement sur le moule, à l'aide d'une peinture d'argent spéciale.

3. LES SONDES PONCTUELLES.

Afin de connaître la répartition du potentiel à l'intérieur du plâtre, des fils fins isolés sont répartis dans le moule. Leurs extrémités sont seules dénudées et portent une gouttelette de soudure, ou mieux une perle de laiton soudée (diamètre 2 à 3 mm) pour assurer un bon contact avec le plâtre. Ces fils doivent être très fins pour ne pas perturber le champ électrique : leur diamètre, isolant compris, ne dépasse pas 1 mm. On peut ainsi répartir un grand nombre de sondes ponctuelles dans tout le modèle (à titre d'exemple le modèle représenté sur la photo 2 en comporte 60). Les extrémités des fils ressortant à l'extérieur sont repérées et permettent ainsi la mesure du potentiel aux points correspondants.

4. DÉTERMINATION DE LA SURFACE LIBRE.

Le procédé est analogue à celui utilisé pour les problèmes plans, avec le papier conducteur : il s'agit ici de surface au lieu de lignes.

On se donne arbitrairement une surface libre, nettement au-dessus de la solution, et l'on cherche à déterminer la surface lieu des points où l'on a $\varphi - z = 0$, z étant la cote du point considéré. Cette surface se trouve à l'intérieur du modèle et on la détermine en interpolant le potentiel entre les valeurs relevées sur la surface du modèle et celles des sondes noyées à l'intérieur (on interpole linéairement pour les premières approximations). La surface médiane entre la surface du modèle et la surface $\varphi - z = 0$ trouvée nous donne l'approximation suivante que l'on réalise en grattant le plâtre.

Lorsque l'on approche de la solution, la simple valeur de $\varphi - z$ relevée sur la surface du modèle suffit pour conduire l'ajustage de cette surface.

On peut également utiliser une petite fraise verticale montée sur double chariot, pouvant se déplacer dans deux directions rectangulaires horizontales, ainsi que dans le sens vertical à l'aide d'une crémaillère (système porte-sonde des cuves rhéométriques à trois dimensions (réf. 5)). On peut ainsi tracer des lignes de niveau de cote z sur la surface du modèle, mesurer la valeur de $\varphi - z$ en différents points, puis percer dans le plâtre des puits fins et verticaux en ces points. La profondeur des puits est déterminée de façon que le potentiel φ_1 relevé au fonds du puits (de cote z_1), soit tel que $\varphi_1 - z_1 = (\varphi_0 - z_0)/2$, φ_0 et z_0 étant respectivement le potentiel et la cote de l'orifice du puits. En supposant que φ varie linéairement, le fond du puits est situé au milieu de l'orifice et de la surface $\varphi - z = 0$.

On utilise de nouveau la fraise pour abaisser la surface du plâtre, jusqu'à ce que les traces des puits disparaissent. On recommence alors à partir de cette nouvelle itération.

PHOTO 1

PHOTO 2

5. MESURE DU DÉBIT.

La mesure du débit traversant un modèle analogue se fait de la même façon à trois dimensions qu'à deux : il nous faut connaître la résistance électrique R du modèle et la résistivité ρ du milieu conducteur. On écrit alors :

$$\frac{Q}{KH^2} = \frac{\rho}{RH}$$

Q étant le débit de l'écoulement d'infiltration, K la perméabilité du milieu poreux et H la hauteur de charge. Nous supposons les potentiels électriques égaux numériquement aux potentiels hydrauliques.

Comme dans les expériences avec papier conducteur, la mesure de ρ revient à mesurer la résistance d'un échantillon de dimensions géométriques connues.

Pour cela, on peut noyer dans le modèle deux disques en clinquant de laiton, d'aires s , collés chacun sur une plaquette isolante, et se faisant vis-à-vis, à une distance connue e (cf. fig. 1).

FIG. 1

Autour des disques, ainsi que sur les faces extérieures des plaquettes, est également collé du clinquant formant électrodes de garde. Les dis-

ques sont reliés par des fils isolés aux bornes extérieures A et A' et les électrodes de garde aux bornes B et B' .

L'ensemble est disposé dans une région du modèle où le champ est sensiblement uniforme et de direction connue, de telle façon que les deux plaquettes soient parallèles aux surfaces équipotentielles.

Au cours de l'expérience portant sur le modèle analogue, les bornes A et B d'une part et A' et B' d'autre part sont court-circuitées entre elles sans être alimentées; le dispositif ainsi noyé dans le plâtre ne perturbe pas beaucoup l'écoulement, car il ne fait que matérialiser deux portions de surfaces équipotentielles.

Pour la mesure de ρ , on cesse d'alimenter le modèle analogue et l'on déconnecte les bornes A' et B' . A et B sont portées à 0 et B' à 50. La borne A' est reliée à 100 par l'intermédiaire d'une résistance r réglable à décades, et l'on ajuste r pour amener A' à 50. On a alors :

$$\rho = \frac{e}{s} \cdot r$$

l'écoulement électrique entre les deux disques étant uniforme grâce aux électrodes de garde.

C) Précision de la méthode.

1. ESSAIS A DEUX DIMENSIONS.

J'ai tout d'abord utilisé le plâtre pour des modèles simples à deux dimensions. La photographie 1 représente un exemple de modèle en plâtre relatif à un barrage perméable isotrope reposant sur un sous-sol de même perméabilité. Les dimensions extrêmes sont de 66×24 cm et l'épaisseur de 5 cm. Les résultats obtenus (posi-

FIG. 2

$Q/kh = 0,70$ (modèle au réseau)

$Q/kh = 0,70$ (modèle en papier)

$Q/kh = 0,72$ (modèle à la cuve)

tion de la surface libre et des équipotentielles) sont comparées sur la figure 2 aux résultats de la cuve, du papier et des réseaux. Les erreurs maximums sur les potentiels mesurés sont de l'ordre de 1 à 2 % par rapport à la cuve. La position de la surface libre obtenue au plâtre est excellente (écart maximum de l'ordre de 3 % de la hauteur de charge).

2. ESSAIS A TROIS DIMENSIONS.

A titre d'exemple, la photo 2 représente un modèle de barrage en terre, isotrope, placé en

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

travers d'une vallée en forme de dièdre rectangle. Cette vallée a des pentes supposées imperméables et son fond est rempli d'alluvions de même perméabilité que le barrage. La hauteur du bassin retenu est égale à l'épaisseur d'alluvions. Un tapis drainant horizontal est placé au pied aval du barrage, au niveau du sol.

Le modèle a 66 cm de long et 24 cm de hauteur. Il est réduit à la moitié du barrage par raison de symétrie.

Le relevé du potentiel à l'intérieur du plâtre se fait grâce à 60 sondes noyées.

L'ajustement de la surface libre a été arrêté lorsque la valeur de $\varphi - z$ était inférieure à 1 (échelle 0—100 de potentiel et des cotes) en tous points de la surface, les quantités de plâtre à retirer devenant trop minimes.

Les résultats obtenus avec ce modèle sont comparés aux résultats de la cuve à trois dimensions sur les figures 3 à 6. On voit qu'il sont très satisfaisants. Les écarts maximums sur la position de la surface libre se produisent principalement au voisinage du drain aval. En cette région, il est toujours délicat (quelle que soit la méthode employée, cuve ou plâtre) de situer exactement cette surface par suite du fort gradient de l'écoulement (l'électrode représentant le drain débite un courant électrique très dense et la moindre résistance de contact entre l'électrode et le conducteur crée une chute de potentiel appréciable, déplaçant les équipotentielles).

Les mesures de débit ont donné :

$$\frac{q}{RH} = 0,60$$

au lieu de 0,69 à la cuve, soit un écart de 13 %. La valeur prise pour q est la moyenne des résultats donnés par deux cellules noyées dans le modèle, de 4,5 cm² de section et de 5 cm de long. Les deux valeurs trouvées pour q s'écartent de ± 6 % par rapport à la valeur moyenne. Cette dispersion est due en partie aux faibles dimen-

sions des cellules, qui doivent être petites pour ne pas perturber l'écoulement électrique dans le modèle.

On peut se demander si le fait qu'une partie du modèle soit à découvert (en l'occurrence la surface libre) et le reste protégé par le moule contre l'évaporation, n'entraîne pas une différence de teneur en eau dans les différentes régions du plâtre et par suite des différences de résistivité. Il n'en est rien, la capillarité répartissant assez rapidement l'humidité à travers le modèle. En prenant le potentiel d'un point situé à deux centimètres de la surface libre (sonde noyée), le fait d'imbiber copieusement, à l'aide d'une éponge, la surface libre fait varier rapidement ce potentiel (déviations de l'ordre de quelques millièmes de l'échelle totale) qui reprend sa valeur initiale au bout de quelques secondes.

D'autre part, les valeurs du potentiel relevées dans le modèle n'avaient sensiblement pas varié une semaine après l'expérience.

D) Possibilités d'améliorations.

L'utilisation du plâtre dans la confection des modèles analogiques à trois dimensions peut être d'un grand intérêt pour le dégrossissage rapide des problèmes, étant donné sa facilité d'emploi et les résultats qu'il permet d'obtenir. Si sa précision est limitée, elle semble devoir satisfaire les exigences des problèmes pratiques d'infiltrations.

Il serait intéressant néanmoins de pouvoir stabiliser la résistivité du plâtre et de pouvoir agir sur sa valeur (par incorporation de graphite ou de poudre isolante par exemple). On pourrait alors étudier des massifs possédant des zones de différentes perméabilités, les zones étant moulées séparément les unes sur les autres. Des essais sont en cours dans ce sens. Nous verrons plus loin qu'actuellement ces problèmes se résolvent à l'aide des réseaux.

III. — UTILISATION DES RÉSEAUX TRI-DIMENSIONNELS

A) Réseaux à mailles rectangulaires inégales.

Soit λ , μ et ν les valeurs des perméabilités principales d'un milieu poreux, que nous supposons dirigées suivant les directions $\bar{x}$, $\bar{y}$ et $\bar{z}$ des axes de coordonnées. La filtration dans un tel milieu obéit à l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0 \quad (1)$$

λ , μ et ν peuvent être fonctions de x , y et z .

Soit par ailleurs un réseau de conductances tri-dimensionnel dont les nœuds sont alignés suivant les trois directions $\bar{x}$, $\bar{y}$ et $\bar{z}$. Les mailles forment les arêtes de parallélépipèdes rectangles, qui peuvent être inégaux et imposés à l'avance. On mon-

tre aisément, en substituant des différences finies aux dérivées de l'équation (1), qu'il existe une analogie entre les écoulements de filtration dans le milieu perméable considéré et les écoulements électriques dans le réseau, sous réserve de choisir convenablement les valeurs des conductances (réf. 4). Ces valeurs sont données par les équations (2) :

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= C \cdot \frac{(\beta + \beta') (\gamma + \gamma')}{2 \alpha} \cdot \lambda_{0,1} \\ C_2 &= C \cdot \frac{(\gamma + \gamma') (\alpha + \alpha')}{2 \beta} \cdot \mu_{0,2} \\ C_3 &= C \cdot \frac{(\beta + \beta') (\gamma + \gamma')}{2 \alpha'} \cdot \lambda_{0,3} \\ C_4 &= C \cdot \frac{(\gamma + \gamma') (\alpha + \alpha')}{2 \beta'} \cdot \mu_{0,4} \\ C_5 &= C \cdot \frac{(\alpha + \alpha') (\beta + \beta')}{2 \gamma'} \cdot \nu_{0,5} \\ C_6 &= C \cdot \frac{(\alpha + \alpha') (\beta + \beta')}{2 \gamma} \cdot \nu_{0,6} \end{aligned} \right\} (2)$$

où $\lambda_{0,i}$, $\mu_{0,i}$ et $\nu_{0,i}$ sont les valeurs respectives de λ , μ et ν aux milieux des segments (o, i) , et C_i les valeurs des conductances joignant les nœuds o et i (fig. 7). C'est une constante commune à tous les nœuds du réseau (dans ce qui suit, nous

FIG. 7

la prendrons égale à 1).

A l'intérieur du réseau, les conductances calculées à l'aide des équations (2) ne sont déterminées que d'une façon unique, bien qu'elles aboutissent à deux croix différentes et qu'elles doivent par suite satisfaire à deux systèmes (2) différents. Il n'en est pas de même au voisinage de la frontière du domaine quand celle-ci est une surface quelconque coupant les mailles. De plus, la réalisation des conditions aux limites présente quelques difficultés, ainsi que dans les problèmes plans.

B) Conditions aux limites.

1. FRONTIÈRES OÙ LE POTENTIEL EST CONNU.

Il s'agit d'une condition du type de Dirichlet : c'est le cas par exemple du parement amont d'un

barrage, d'une surface de suintement, d'un drain, etc.

Les potentiels connus étant imposés sur la frontière aux extrémités des conductances y aboutissant, le calcul des conductances C_1 , C_2 , C_3 et C_4 , joignant respectivement le nœud 0 aux nœuds 1, 2, 3 et 4 (fig. 8), donne des valeurs

FIG. 8

différentes suivant que l'on écrit les équations (2) en 0 ou aux points 1, 2, 3 ou 4, du fait que les brins coupés issus de 1, 2, 3 et 4 ne sont pas égaux à γ_0 (longueur 06).

On peut tourner la difficulté en calculant les conductances telles que C_1 , C_2 , C_3 et C_4 en supposant tous les brins coupés parallèles égaux à une longueur commune γ . L'hypothèse nécessaire pour justifier cette méthode est que les dérivées secondes de φ le long des brins coupés sont négligeables. Les erreurs ainsi apportées sont faibles. Aussi, ce procédé est-il communément utilisé.

2. FRONTIÈRES LIGNES DE COURANT.

a) Frontière imperméable connue.

Le vecteur vitesse $\bar{V}$, de composantes $\lambda \varphi'_x$, $\mu \varphi'_y$ et $\nu \varphi'_z$ est tangent à la frontière (F), ce qui s'écrit :

$$\bar{V} \cdot \bar{n} = 0 \quad (3)$$

$\bar{n}$ étant un vecteur normal à (F) au point considéré.

Considérons un réseau coupé par une telle surface (F), comme l'indique la figure 9. Les

FIG. 9

lignes de nœuds du réseau étant orientées suivant $\bar{x}$, $\bar{y}$ et $\bar{z}$, appelons $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ les directions portées par les tangentes en 0 à (F) et contenues dans les plans $(\bar{x}, \bar{z})$ et $(\bar{y}, \bar{z})$, avec :

$$\theta_x = (\bar{x}, \bar{X}) \text{ et } \theta_y = (\bar{y}, \bar{Y})$$

La conductance C reliant 1 à 0 est parcourue par une intensité :

$$I = (\varphi_0 - \varphi_1) \cdot C$$

Cherchons à déterminer I pour alimenter la conductance C.

La valeur de C, pour satisfaire aux équations (2) écrites au nœud 1, doit être prise égale à :

$$v_{0,1} (\alpha + \alpha') (\beta + \beta') / 4 \gamma_0.$$

Par suite :

$$I = \frac{(\alpha + \alpha') (\beta + \beta')}{4} \cdot v_{0,1} \cdot \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{\gamma_0} \\ \cong \frac{(\alpha + \alpha') (\beta + \beta')}{4} \cdot v_{0,1} \cdot \varphi'_z \quad (4)$$

Or, on vérifie facilement que la condition (3) s'écrit :

$$v_0 \varphi'_z = \lambda_0 \cdot \text{tg } \theta_x \cdot \varphi'_x + \mu_0 \cdot \text{tg } \theta_y \cdot \varphi'_y \quad (5)$$

Compte tenu de ce que :

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_x &\cong (\varphi_2 - \varphi_4) / 4,2 \cong (\varphi_2 - \varphi_4) \cos \theta_x / (\alpha + \alpha') \\ \varphi'_y &\cong (\varphi_3 - \varphi_5) / 5,3 \cong (\varphi_3 - \varphi_5) \cos \theta_y / (\beta + \beta') \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

on a enfin :

$$I \cong \frac{v_{0,1}}{4 (\lambda_0 \text{tg}^2 \theta_x + \mu_0 \text{tg}^2 \theta_y + v_0)} \\ \left[\lambda_0 \text{tg } \theta_x (\beta + \beta') (\varphi_2 - \varphi_4) + \mu_0 \text{tg } \theta_y (\alpha + \alpha') (\varphi_3 - \varphi_5) \right] \quad (7)$$

Dans l'expression (7), les valeurs des φ_i ne sont pas connues a priori, mais on peut régler les intensités I à injecter par itérations : on se donne arbitrairement les valeurs des I que l'on injecte, et on relève sur le réseau les potentiels φ_i qui en résultent. On porte ces valeurs φ_i dans les équations (7), ce qui détermine de nouvelles valeurs d'injections. Et l'on recommence.

Pratiquement, si la frontière imperméable (F) a une géométrie assez simple, on cherche à éviter ces injections en disposant les mailles inégales du réseau de telle façon que (F) ne passe que par des nœuds (cas de la figure 10). Il n'y a plus, dans ce cas, de brins coupés. L'intensité I à injecter en un nœud tel que 0 (notations de

FIG. 10

la figure 10), pour alimenter les trois conductances C_1 , C_2 , C_3 issues de ce nœud, a pour valeur :

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= C_1 (\varphi_0 - \varphi_1) \cong \frac{(\alpha + \alpha') (\beta + \beta')}{4} v_{0,1} \cdot \varphi'_z \\ I_2 &= C_2 (\varphi_0 - \varphi_2) \cong - \frac{(\beta + \beta') (\gamma + \gamma')}{4} \lambda_{0,2} \cdot \varphi'_x \\ I_3 &= C_3 (\varphi_0 - \varphi_3) \cong - \frac{(\gamma + \gamma') (\alpha + \alpha')}{4} \mu_{0,3} \cdot \varphi'_y \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Par ailleurs, compte tenu de ce que :

$$\text{tg } \theta_x \cong \frac{\gamma + \gamma'}{\alpha + \alpha'} \quad \text{et} \quad \text{tg } \theta_y \cong \frac{\gamma + \gamma'}{\beta + \beta'}$$

l'égalité (5) permet d'écrire :

$$\lambda_0 (\gamma + \gamma') (\beta + \beta') \varphi'_x + \mu_0 (\gamma + \gamma') (\alpha + \alpha') \varphi'_y \\ - v_0 (\alpha + \alpha') (\beta + \beta') \varphi'_z = 0 \quad (5')$$

On a donc :

$$I \cong 0 \quad (8')$$

Il n'est plus besoin d'injecter sur une telle frontière imperméable.

b) Surface libre.

La surface libre d'un écoulement est inconnue a priori et déterminée par approximations successives. Chacune de ces approximations est une surface imperméable connue, et, par suite, peut être représentée par l'une ou l'autre des deux méthodes précédentes. Néanmoins, la seconde méthode, consistant à disposer judicieusement

les mailles inégales du réseau, demande un remaniement complet du réseau à chaque approximation de la surface libre : cette méthode est trop longue pratiquement. Par contre, la méthode par injections devient très intéressante si l'on remarque que, sur la surface libre, les dérivées φ'_x , φ'_y et φ'_z sont connues et ne dépendent que de son inclinaison, c'est-à-dire de θ_x et θ_y . Par exemple, en milieu isotrope, on a :

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_x &= \operatorname{tg} \theta_x / (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_x + \operatorname{tg}^2 \theta_y) \\ \varphi'_y &= \operatorname{tg} \theta_y / (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_x + \operatorname{tg}^2 \theta_y) \\ \varphi'_z &= (\operatorname{tg}^2 \theta_x + \operatorname{tg}^2 \theta_y) / (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_x + \operatorname{tg}^2 \theta_y) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

z étant supposée parallèle à la direction verticale.

L'intensité I à injecter dans un brin coupé, dont la conductance est C et la longueur l , est alors calculable et égale à $C.l.\varphi'_x$, $C.l.\varphi'_y$ ou $C.l.\varphi'_z$, suivant que ce brin est dirigé suivant $\bar{x}$, $\bar{y}$ ou $\bar{z}$.

Ce calcul des intensités n'est valable que pour la surface libre. On l'applique néanmoins pour chaque approximation, ce qui apporte une erreur dans les valeurs des intensités. Mais cette erreur tend vers zéro quand les approximations tendent vers la position exacte de la surface libre. La méthode converge rapidement (quatre ou cinq approximations suffisent). Le calcul des intensités peut souvent s'effectuer à l'aide d'abaques : à titre d'exemple, les figures 11 et 12 représentent les abaques relatifs aux formules (9) (cas du milieu isotrope). Les valeurs des $\operatorname{tg} \theta_x$ et $\operatorname{tg} \theta_y$ sont déterminées par différence de cotes sur un schéma à échelle convenable représentant les différentes coupes du réseau et de la surface.

C) Montage expérimental.

1. LE RÉSEAU.

Le modèle est fractionné en différents plans ou tranches, composés par exemple des conductances parallèles aux directions $\bar{x}$ et $\bar{z}$. Ces différents plans sont réalisés à l'aide de réseaux à conductances amovibles, dont la description a été donnée en 1952 (référence 1). Les nœuds correspondants des différents plans ($\bar{x}$, $\bar{z}$) sont reliés entre eux par l'intermédiaire des conductances parallèles à $\bar{y}$. Ces montages s'effectuent très rapidement à l'aide des nouveaux réseaux réalisés à l'Institut Blaise Pascal : des panneaux de 651 mailles chacun portent les conductances suivant $\bar{x}$ ou $\bar{z}$, et des panneaux spéciaux dits panneaux de liaison portent les conductances suivant $\bar{y}$. Les différents panneaux du montage sont connectés nœud à nœud à l'aide de broches à prises multiples (photo 3).

2. ALIMENTATION DU RÉSEAU.

L'alimentation du réseau peut se faire soit en courant continu, soit en courant alternatif. Ce dernier type de courant est fréquemment utilisé pour des raisons de commodité d'amplification et de lecture : il s'agit de courant sinusoïdal dont la fréquence est comprise entre 50 et 1.000 périodes/seconde.

Les valeurs du potentiel sont relevées à l'aide d'un potentiomètre étalonné, par une méthode d'opposition.

Le long de la surface libre, les intensités sont injectées par la méthode classique des grandes résistances. Pour cela on relie les nœuds où

FIG. 13

l'on injecte à des tensions $+V$ ou $-V$ (selon le signe de l'intensité I à injecter) par l'intermédiaire de grandes résistances R telles que :

$$I = \frac{V}{R}$$

Il faut choisir la tension V de telle sorte que le potentiel maximum φ_M du réseau soit négligeable devant elle (pratiquement on prend $V = 100.\varphi_M$).

D) Précision de la méthode

A titre d'exemple, la figure 14 représente le schéma d'un réseau tridimensionnel, relatif au

PHOTO 3

FIG. 14

Modèle analogue au réseau d'un barrage à trois dimensions.

cas traité à l'aide d'un modèle en plâtre, et décrit précédemment (photo 2). Les résultats obtenus au réseau sont comparés à ceux de la cuve sur les figures 3, 4, 5 et 6. L'écart maximum sur la position de la surface libre est de 5 % de la hauteur de charge, et, sur le potentiel relevé de l'ordre de 2 % par rapport à la cuve. Par ailleurs, la mesure du débit a donné :

$$\frac{Q}{KH^2} = \frac{q}{RH} = 0,72$$

au lieu de 0,69 à la cuve, soit un écart de + 4,5 %.

Ces résultats sont très satisfaisants si l'on tient compte du faible nombre de mailles employées. On peut remarquer que la distance verticale entre le plan de charge et le drain n'est divisée qu'en quatre parties. Des mailles deux fois plus petites auraient évidemment donné une pré-

sion bien meilleure. En particulier, la surface libre aurait été mieux représentée au voisinage du drain. Mais le but proposé était de réaliser un modèle essentiellement pratique, avec le minimum de mailles.

E) Intérêt des réseaux.

Le modèle en réseau décrit précédemment à titre d'exemple est relatif à un écoulement en milieu isotrope, afin de pouvoir confronter ses résultats à ceux de la cuve. Mais si les réseaux tridimensionnels peuvent être utilisés pratiquement pour des milieux isotropes, leur grand intérêt est de pouvoir s'appliquer aux milieux hétérogènes, anisotropes ou zonés. Pour les milieux isotropes, si le domaine étudié est de forme compliquée, les modèles en plâtre semblent préférables.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- (1) P. HUARD DE LA MARRE. — « Nouvelles méthodes pour le calcul expérimental des écoulements dans les massifs poreux. »
La Houille Blanche, n° A/1953.
- (2) MLADEN BORELI.
Thèse (Grenoble, janvier 1954).
- (3) J. CAILLE et C. HABIB. — « Etude comparative sur modèles réduits des divers modes de circulation hydraulique dans le terrain d'appui du barrage de Bin-El-Ouidane par une méthode d'analogie électrique. »
5^e Congrès des Grands Barrages, Paris, 1955.
- (4) P. HUARD DE LA MARRE. — « Sur l'imposition des conditions aux limites dans les réseaux de conduites. »
Journées Internationales de Calcul Analogique, Bruxelles, septembre 1955.
- (5) L. MALAVARD. — « La technique des analogies électriques. »
Techniques générales du laboratoire de physique. Volume II. Edition C.N.R.S.
- (6) P. HUARD DE LA MARRE. — « Modèles analogiques électriques à trois dimensions pour l'étude des écoulements de filtrations à surface libre. »
C. R. Acad. Sc., t. 240, p. 2203-2205, juin 1955.

DISCUSSION

Président : M. REMENIERAS

M. le Président remercie M. HUARD DE LA MARRE et souligne l'intérêt de son nouveau modèle analogique en plâtre qui permet d'une manière simple l'étude des écoulements de filtration à surface libre dans certains cas difficiles.

Sur la demande de M. HABIB, M. HUARD DE LA MARRE précise le temps nécessaire à l'étude d'un écoulement, soit par modèle en plâtre, soit par réseau.

1° Pour le plâtre, le temps nécessaire au coulage du modèle dépend de l'outillage du laboratoire et le temps nécessaire à l'ajustement de la surface libre demande en général, une journée, mais peut être réduit à quelques heures si l'on dispose d'un système d'usinage à fraise; le plâtre étant chaud il faut une nuit pour qu'il se refroidisse.

2° Quant à la méthode du réseau, elle nécessite une journée ou deux, pour l'ensemble des deux opérations qu'elle comporte, à savoir :

- a) Le calcul du réseau, c'est-à-dire le choix des mailles, qui dépend de la forme des frontières connues, et la division de longueurs, sur un schéma, qui est un peu travail technique.
- b) La détermination de la surface libre par approximations qui, pour des surfaces à trois dimensions, nécessite des injections suivant les différents points : travail de dessinateur dont l'importance est prépondérante et fonction de la forme de la surface libre.

Sur la demande de M. le Président, M. HUARD DE LA MARRE indique qu'il n'a pas imaginé de méthode d'essais pour le cas de terrains comportant des différences de perméabilité d'un point à un autre, mais que la méthode du réseau permet de résoudre ce problème, sans difficulté supplémentaire.