La mécanique de l'évaporation ^(*)

Mechanics of evaporation

(Thèse présentée devant la Faculté des Sciences de l'Université de Grenoble)

PAR MAURICE L. ALBERTSON

PROFESSOR OF CIVIL ENGINEERING AND HEAD OF FLUID MECHANICS RESEARCH (COLORADO A AND M COLLEGE)

- I. INTRODUCTION. — *Définition de l'évaporation; notion de couche limite, son importance, son lien avec la diffusion.*
- II. PHYSIQUE DU PHÉNOMÈNE DE L'ÉVAPORATION. — *Théorie fondamentale de la diffusion, envisagée sous deux aspects : moléculaire; correspondant à l'écoulement laminaire, et molaire, correspondant à l'écoulement turbulent. — Diffusion appliquée à l'évaporation. — Echange de chaleur. — Définition des deux types d'écoulement : laminaire et turbulent. — Influence du gradient de densité. — Effets des corps dissous.*
- III. RÉSUMÉ DES RECHERCHES ANTÉRIEURES. — *Rappel de la loi de Dalton. — Théories relatives au bilan d'énergie et au transfert de masse. — Critique des recherches antérieures. — Programme des recherches à effectuer.*
- IV. DÉVELOPPEMENTS THÉORIQUES. — *Etude de la convection : 1. libre, laminaire et turbulente; 2. forcée. — Etude des écoulements laminaire et turbulent. — Analogie de Reynolds et ses extensions, dues à Taylor, Prandtl, Karman, Hoffmann, etc.; équations empiriques. — Leur discussion. — Application de l'analogie de Reynolds à l'évaporation. — Notion du mélange continu et équation théorique d'évaporation donnée par Sutton.*
- V. RECHERCHES EN LABORATOIRE. — *1° Sur paroi plane d'évaporation, à Iowa; 2° sur paroi plane et soufflerie, au Colorado A. & M. College; 3° sur modèle réduit du lac Hefner, au Colorado Laboratory.*
- VI. DISCUSSION DES RÉSULTATS des expériences précédentes. — *Calcul de la vitesse de frottement.*
- VII. CONCLUSIONS.
- I. INTRODUCTION. — *Evaporation defined; the concept of a boundary layer, its importance and its connection with diffusion.*
- II. PHYSICS OF THE EVAPORATION PHENOMENA. — *Fundamental diffusion theory considered from two points of view: molecular diffusion corresponding to laminar flow and molar diffusion corresponding to turbulent flow. Diffusion applied to evaporation. Heat transfer. Two types of flow defined: laminar and turbulent. The effect of the density gradient. Effects resulting from dissolved matter.*
- III. A SUMMARY OF EARLIER INVESTIGATIONS. — *Dalton's law restated. Theories connected with energy distribution and the mass transfer. A criticism of earlier investigations. A research programme to be followed.*
- IV. THEORETICAL DEVELOPMENTS. — *An investigation of convection: 1) Free, laminar and turbulent convection, 2) Forced convection. An investigation of laminar and turbulent flows. Reynolds' analogy and extensions of it made by Taylor, Prandtl, Karman, Hoffmann, etc.; empirical equations and discussions of them. The mixing concept and Sutton's theoretical evaporation equation.*
- V. LABORATORY INVESTIGATION. — *1) Of a plane evaporation boundary at Iowa, 2) of a plane boundary with a wind tunnel at Colorado A & M College. 3) of a scale model of Lake Hefner at the Colorado laboratory.*
- VI. A DISCUSSION OF RESULTS of these experiments. *Calculation of shear velocity.*
- VII. CONCLUSIONS.

LISTE DES SYMBOLES — LIST OF SYMBOLS

Symboles	SIGNIFICATION		Dimensions
$2b$	largeur de la plaque,	width of plate,	L
e_s	pression de vapeur à la surface de l'eau,	vapor pressure at the surface of the water,	F/L ²
e_a	pression partielle de vapeur dans l'air ambiant,	partial pressure of the water vapor in the ambient atmosphere,	F/L ²
g	accélération due à la pesanteur,	gravitational acceleration,	L/T ²
k	constante de Karman et conductivité thermique de l'air,	Karman constant and thermal conductivity of air,	

(*) Cf. la Houille Blanche, n° 5, 1955, p. 704.

Symboles	SIGNIFICATION		Dimensions
E	intensité (ou taux) d'évaporation,	evaporation rate,	L/T
F	résistance totale,	total drag,	F
Gr	nombre de Grashof,	Grashof number,	
L	longueur de la paroi,	length of evaporation boundary,	L
M_1	intensité globale de l'évaporation pour $x_0 \neq 0$,	total rate of evaporation, when $x_0 \neq 0$,	FT/L ²
M_2	intensité globale de l'évaporation pour $x_0 = 0$,	total rate of evaporation, when $x_0 = 0$,	FT/L ²
N	nombre de Nusselt, ou coefficient d'évaporation, ou intensité de diffusion,	Nusselt number or evaporation coefficient or rate of diffusion,	
Nu	nombre de Nusselt modifié pour l'évaporation,	modified Nusselt number for evaporation,	
Pr	nombre de Prandtl,	Prandtl number,	
R	$\frac{Ux}{\nu}$, nombre de Reynolds,	Reynolds number	
R_*	$\frac{U_*x}{\nu_e}$, nombre de Reynolds,	Reynolds number	
R (ξ)	coefficient de corrélation pour w' ,	correlation coefficient for w'	
T	température,	temperature,	
T'	fluctuation de la température locale instantanée autour de sa valeur moyenne,	fluctuation of local instantaneous temperature from the mean,	
T_0	température moyenne de l'air ambiant,	mean temperature of ambient air,	
T_p	température moyenne dans le temps pour une plaque donnée au cours d'un essai,	temporal mean temperature for individual plate during run,	
ΔT	$T_p - T_0$,		
U_0	vitesse ambiante du mouvement moyen,	ambient velocity of the mean motion,	L/T
U_*	vitesse moyenne de frottement à l'extrémité aval de la surface considérée,	mean shear velocity at the downstream end of the surface under consideration,	L/T
x_L	x'/x_0 ,		L
x_0	distance, comptée vers l'aval, à partir de l'extrémité de la paroi,	distance downstream from the beginning of evaporation boundary,	L
δ	épaisseur de la couche limite du mouvement,	thickness of momentum boundary layer,	L
ε	coefficient de diffusion turbulente,	eddy viscosity or turbulent diffusion coefficient,	
α	conductivité thermique,	heat conductivity,	
η	$\sqrt{\tau/\rho} (y/\nu)$,		
μ	viscosité dynamique de l'air,	dynamic viscosity of air,	FT/L ²
ν	viscosité cinématique de l'air (coefficient de diffusion moléculaire pour le transfert du mouvement, dans l'air).	kinematic viscosity of air (molecular diffusivity coefficient for momentum transfer in air),	L ² /T
ν_e	coefficient de diffusion moléculaire de la vapeur d'eau dans l'air,	molecular diffusivity coefficient for water vapor into air,	L ² /T
ρ	masse spécifique de l'air ambiant,	density of ambient air,	M/L ³
σ	ν/ν_e nombre de Prandtl,	Prandtl number,	
τ	effort tangentiel dans un plan horizontal et selon x ,	shearing stress in a horizontal plane in the direction of x ,	M/LT ²
τ_0	effort tangentiel sur la paroi et selon x .	shearing stress on the horizontal boundary in the direction of x .	F/L ²

Symboles	SIGNIFICATION		Dimensions
l	longueur de mélange,	mixing length,	L
n	exposant,	exponent,	
q	taux de transfert de chaleur par unité de surface et par unité de temps,	rate of heat transfer per unit area and per unit time,	F/LT
t	temps,	time,	T
u	composante de la vitesse locale instantanée selon l'axe des x ,	local instantaneous velocity in the direction of x ,	L/T
u'	fluctuation de la vitesse locale instantanée autour de sa valeur moyenne, dans la direction u ,	fluctuation of local instantaneous velocity from the mean in the direction of u ,	L/T
v	vitesse locale instantanée selon la direction horizontale normale à u ,	local instantaneous velocity in the horizontal direction perpendicular to u ,	L/T
v'	fluctuation de la vitesse locale instantanée autour de sa valeur moyenne dans la direction v ,	fluctuation of local instantaneous velocity from the mean in the direction of v ,	L/T
w	composante verticale de la vitesse locale instantanée,	local instantaneous velocity in the vertical direction,	L/T
w'	fluctuation de la vitesse locale instantanée autour de sa valeur moyenne dans la direction w ,	fluctuation of local instantaneous velocity from the mean in the direction of w ,	L/T
x	distance comptée vers l'aval, à partir de l'extrémité de la paroi expérimentale,	distance downstream from the beginning of evaporation boundary,	L
x'	distance comptée vers l'aval, à partir de l'arête-guide de la paroi,	distance downstream from the leading edge of boundary,	L
y	distance mesurée normalement à l'écoulement d'air,	distance measured cross-wind,	L
z	distance mesurée verticalement à partir de la surface de la paroi,	distance measured vertically from the surface of evaporation boundary,	L
z_1	hauteur de référence,	reference elevation,	L
A	constante,	constant,	
B	constante,	constant,	
C	coefficient,	a coefficient,	F/L ²
C_e	coefficient d'évaporation,	evaporation coefficient,	
C_f	$\frac{D_{x'}}{x' \rho U_0^2/2}$ coefficient de frottement,	drag coefficient ,	
C_h	$\frac{q}{\rho U_0 C_p \Delta T}$ coefficient de transfert de chaleur,	heat transfer coefficient	
C_p	chaleur spécifique de l'air à pression constante,	specific heat of air at constant pressure,	L ² /T ² °F
C_s	tension de vapeur saturante à la température T_m ,	saturation water vapor concentration at temperature T_m ,	F/L ² (*)
C_0	tension de vapeur de l'air ambiant,	water vapor concentration of ambient air,	F/L ² (*)
D	coefficient de diffusion,	coefficient of diffusion,	
$D_{x'}$	force de frottement pour une paroi de largeur et de longueur unité	drag force for boundary of unit width and length,	F/L

(*) Sauf dans les équations 27 et 28, où ce terme est sans dimension.

(*) Except in Eqs. 27 and 28, where it is dimensionless.

CHAPITRE IV. — DÉVELOPPEMENTS THÉORIQUES

Les principes fondamentaux de la physique de l'évaporation, détaillés dans le chapitre II, constituent la base et le point de départ des développements qui seront présentés dans les chapitres qui suivent.

On suppose que, dans certaines conditions, un certain nombre de ces principes semble présenter, au point de vue de l'étude de l'évaporation, une portée prépondérante. Dans d'autres conditions, au contraire, ce seront d'autres principes qui auront une plus grande importance.

1° L'évaporation peut s'effectuer seulement par l'effet de la pesanteur et de la diffusion moléculaire. Ce cas est désigné sous la rubrique : convection libre;

2° S'il s'agit du mouvement de l'air au-dessus d'une surface qui s'évapore, les efforts dus à la pesanteur sont, dans ce cas, moins considérables. En effet, dans nombre de cas, l'action de la pesanteur est tout à fait insignifiante. On est convenu d'appeler ce type d'écoulement et de système d'évaporation : convection forcée.

Dans ce chapitre IV, on considérera en premier lieu des développements théoriques dus à des recherches scientifiques antérieures, avec quelques brèves explications de ces développements.

On pourra trouver les détails de chacun de ces développements par les références aux mémoires originaux. En général, il s'agit ici du

transfert de la quantité de mouvement ou de chaleur. Dans ce cas, les équations analogues du transfert de masse (évaporation) seront développées ci-après.

Finalement, un résumé des équations de l'évaporation sera présenté. En même temps, une critique générale de celles-ci sera faite, compte tenu des connaissances actuelles.

Convection libre

A la limite, il n'y aurait aucun mouvement de l'air ambiant au-dessus d'une surface soumise au phénomène de l'évaporation. Dans ce cas, tout mouvement des molécules de vapeur ne serait que mouvement moléculaire et convection libre.

La diffusion moléculaire existe toujours dans l'air au-dessus d'une surface en évaporation. Cette diffusion est pourtant extrêmement lente (en dépit de la vitesse élevée du mouvement moléculaire) parce que le libre parcours moyen est extrêmement réduit — particulièrement en comparaison avec l'influence des effets ascensionnels ou de pesanteur, déterminant le mouvement molaire des molécules.

Si la diffusion moléculaire paraît d'une importance primordiale, il peut se former, quand la vapeur du liquide qui s'évapore est plus légère que le gaz ambiant, un système de circulation en convection libre (sans l'intervention d'un vent transversal) qui entraînerait rapidement les molécules de vapeur hors de la surface.

CHAPTER IV

THEORETICAL DEVELOPMENTS

The fundamental principles of the physics of evaporation as outlined in Chapter II form the basis for and the starting point of the various developments presented in the following chapters. Under some conditions, assumptions are made that certain of the principles affect the evaporation to a greater extent than others, while under different conditions certain other principles are assumed to be of predominant importance. For example, on the one hand, evaporation may be occurring with only the forces of gravity and molecular diffusion effective. This type of system is known as free convection. On the other hand, air may be moving over the evaporating surface so that the gravitational forces become of less importance—in fact, in many cases the gravitational effects are completely insignificant. This type of flow and evaporation system is known as forced convection.

Throughout this chapter, the theoretical developments of previous scientists are considered with only a brief explanation of the development. Additional detail regarding each development may be found by referring to the original paper. Generally speaking,

these developments are only for the case of momentum transfer or heat transfer, in which case the similar equations for mass transfer (evaporation) are developed herein.

Finally, a summary of the resultant evaporation equations is presented, together with an over-all evaluation of them based upon the present-day knowledge of the subject.

Free Convection

As an extreme case, there may be no movement of the ambient air across the evaporating surface, in which case all movement of vapor molecules is by molecular motion and free convection only.

The molecular diffusion is ever-present in the air above the evaporating surface. However, this diffusion is an extremely slow process (despite the high velocity of molecular movement) because the mean free path is so extremely small—especially when compared with the influence of buoyant or gravitational effects which may affect the molar movement of the molecules.

On the one hand the molecular diffusion may be of prime importance. On the other hand, when the vapor of the evaporating liquid is much lighter than the ambient gas a circulation pattern of free convection may be set up (without a cross wind) which will cause rapid movement of vapor molecules away from

Dans les conditions de l'expérience, la diffusion molaire contrôle le taux de transfert ou l'évaporation.

En ce qui concerne la détermination mathématique de la perte de chaleur à la frontière sous l'influence de la seule convection libre, très peu de choses, malheureusement, ont été réalisées.

Vu l'interdépendance de la distribution des vitesses et de celle de la température ou de l'humidité, il faut chercher la solution d'un problème donné par la résolution simultanée des équations du mouvement et de la diffusion pour le cas de l'écoulement laminaire et, d'autre part, par des expériences systématiques pour le cas de l'écoulement turbulent. En raison de la nature de ces équations, les résultats théoriques obtenus pour la convection laminaire libre sont très abstraits et, en conséquence, rarement applicables. Pour le cas de la convection turbulente libre, les solutions théoriques manquent à cause de l'absence d'une théorie décisive de la turbulence.

Toutefois, en dépit de la difficulté mathématique rencontrée, on peut avoir une intuition générale du problème par des considérations d'analyse dimensionnelle.

L'analyse dimensionnelle peut être exprimée sous la forme mathématique suivante :

$$\frac{T - T_0}{T_0} = F_1 \left(\frac{x}{b}, \frac{y}{b}, \frac{\mu C_p}{k}, \frac{\Delta T}{T_0}, \frac{\rho^2 g b^3}{\mu^2} \right) \quad (7)$$

ou :

$$\frac{T - T_0}{T_0} = F_2 \left(\frac{x}{b}, \frac{y}{b}, \sigma, \frac{\Delta T}{T_0}, g \frac{b^3 \Delta T}{\nu^2 T_0} \right) \quad (8)$$

où b est la demi-largeur de la plaque, x et y les

directions des coordonnées dans un plan vertical, μ la viscosité dynamique, ρ la densité, k la conductivité thermique, C_p la chaleur spécifique à pression constante, T_0 la température ambiante en échelle absolue, T la température en un point quelconque, g l'accélération de la pesanteur et ΔT la différence entre la température de la surface et la température de l'air ambiant.

Un fait d'importance primordiale dans cette analyse est le suivant : la distribution de la température et, en conséquence, le transfert de chaleur sont des fonctions des paramètres géométriques, du nombre de PRANDTL, de la différence de température entre la surface de l'air ambiant et du nombre de GRASHOF. On pourrait employer une telle analyse pour diriger des recherches ultérieures, théoriques et expérimentales.

CONVECTION LAMINAIRE LIBRE :

Dans le cas de la convection laminaire libre, il n'existe que deux solutions théoriques : l'une, pour la plaque verticale, qui est due à POHLHAUSEN, et l'autre, pour un point-source, qui est due à YIH [32].

A partir des équations suivantes, de mouvement, de diffusion et de continuité, POHLHAUSEN a obtenu deux équations différentielles qu'on a résolues en tenant compte de certaines conditions à la frontière :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \frac{T - T_0}{T_0} \quad (9)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

the evaporating surface. Under these conditions molar diffusion controls the rate of transfer or evaporation.

Unfortunately, very little has been done with respect to mathematical determinations of the heat loss from a horizontal boundary under the influence of free convection only. Because of the interdependence of the velocity distribution and the distribution of temperature or moisture, the solution for a given problem must be found by solving simultaneously the equations of motion and of diffusion in the case of laminar flow, and by systematic experimentation in the case of turbulent flow. Due to the nature of these equations, however, theoretical results for laminar free convection are very difficult and consequently few in number. For the case of turbulent free convection, there is a lack of a conclusive theory of turbulence so that theoretical solutions are completely non-existent.

Despite the mathematical difficulties, however, it is possible to gather insight into the problem from the general viewpoint by considering a dimensional analysis of the variables involved. Such an analysis may be expressed as :

$$\text{or :} \quad (8)$$

in which b is one-half the width of the plate, x and y are coordinate directions in the vertical plane, μ is the dynamic viscosity, ρ is the density, k is the thermal conductivity, C_p is the specific heat at constant pressure, T_0 is the ambient temperature on the absolute scale. T is the temperature at any point and g is the gravitational acceleration and ΔT is the difference between the ambient and plate temperatures.

Of primary importance in this dimensional analysis is the fact that the temperature distribution and hence the heat transfer is a function of the parameters describing the geometry, the Prandtl number, the relative temperature difference between the plate and the ambient air T , and the Grashof number. Such a dimensional analysis can be utilized in guiding future research—both theoretical and experimental.

Laminar free convection

In the laminar case of free convection, there exist only two theoretical solutions. One for a vertical plate by Pohlhausen and the other for a point source by Yih [32].

Beginning with the equations of motion, diffusion, and continuity :

$$(9) \quad (10) \quad (11)$$

avec les valeurs déterminées expérimentalement et en supposant que le nombre de PRANDTL $\sigma = 0,733$, la solution de POHLHAUSEN peut être utilisée pour trouver la valeur moyenne du coefficient de chaleur, h_m :

$$h_m = 0,479 \frac{k}{L} \sqrt[4]{\frac{g L^3 \Delta T}{\nu^2 T_0}} \quad (12)$$

où ν est la viscosité cinématique. Il y a quelque temps, LORENZ a déterminé expérimentalement une équation. Celle-ci, après ajustement, donne la valeur 0,513 pour le coefficient, lequel peut être comparé à la valeur 0,479 fournie par l'équation (12).

En introduisant les nombres de GRASHOF et de NUSSELT, Gr et hL/k , on peut écrire l'équation (12) sous la forme simplifiée suivante :

$$N = 0,479 \text{ Gr}^{1/4} \quad (13)$$

cette équation doit être comparée à l'équation (8) résultant de l'analyse dimensionnelle.

CONVECTION TURBULENTE LIBRE :

On a vu précédemment que la solution des équations pour la convection turbulente libre est extrêmement difficile à trouver. Cependant, on a fait des expériences en vue de déterminer expérimentalement certaines équations. Par exemple, les résultats de JACOB et LINKE [15] peuvent être représentés sous la forme :

$$N = 0,273 (\text{Gr } \sigma)^{1/3} \quad (14)$$

Cela démontre que les facteurs fondamentaux

Pohlhausen obtained two ordinary differential equations which were solved simultaneously with certain boundary conditions. By assuming values determined experimentally and by assuming the Prandtl Number $\sigma = 0.733$, Pohlhausen's solution may be used to obtain the mean coefficient of heat transfer h_m : (12) where ν is the kinematic viscosity. Lorenz determined experimentally at an earlier date an equation which when converted gave a coefficient of 0.513 as compared with the coefficient 0.479 in Eq 12.

By utilizing the Grashof number Gr and the Nusselt number $N = hL/k$, Equation 12 may be written in simplified form as : (13)

This equation should be compared with Equation 8 resulting from the dimensional analysis.

Turbulent free convection

As discussed previously the solution of the equations for turbulent free convection is very difficult. However, experiments have been made so that certain equations have been determined experimentally. For example the results of Jacob and Linke [15] may be represented as : (14)

again demonstrating that the primary factors involved are the Nusselt number, the Grashof number, and the Prandtl number.

sont les nombres de NUSSELT, de GRASHOF et de PRANDTL.

HICKOX [13] a utilisé ces paramètres pour l'évaporation et a obtenu ensuite l'équation empirique suivante :

$$N = 0,645 (\text{Gr } \sigma)^{1/4} \quad (15)$$

CONCLUSION :

1) Bien qu'il existe des développements mathématiques traitant de la convection laminaire libre, les équations finales sont, en général, très difficiles à résoudre. De plus, on ignore complètement les équations basées sur la théorie mathématique de la turbulence qui traitent de la convection libre;

2) L'analyse dimensionnelle et les équations trouvées empiriquement démontrent que les variables les plus importantes, à part les paramètres géométriques, sont les nombres de NUSSELT, de GRASHOF et de PRANDTL.

Convection forcée

Dans le cas d'un vent transversal au-dessus ou autour d'une surface en évaporation, les molécules sont emportées loin de la surface, de sorte que la concentration immédiate à la surface est réduite.

Un gradient de concentration s'établit. Le nombre des molécules revenant à la surface s'en trouve diminué et la perte nette des molécules, c'est-à-dire l'évaporation, est augmentée. Alors, le mouvement n'est plus le résultat de la pesan-

Hickox [13] adjusted these parameters for evaporation and obtained through his experiments the following empirical equation : (15)

Conclusions

1. Although there are certain mathematical developments to express laminar free convection, the final equations are generally very difficult to solve. Equations based on mathematical theory for turbulent free convection, however, are simply non-existent.

2. The dimensional analysis and the equations that have been determined empirically demonstrate that aside from the geometrical parameters describing the geometry, the variables which are most important are the Nusselt number, the Grashof number, and the Prandtl number.

Forced Convection

When a cross-wind exists over or around an evaporating surface, the molecules are carried away from the surface so that the concentration immediately adjacent to the surface is reduced, a concentration gradient is established, the number of molecules returning to the surface is reduced, and the net loss of molecules or evaporation is increased. In this case the motion is not a result

teur agissant librement sur le système concurrentement avec le mouvement moléculaire, mais il est produit par une action extérieure au système.

Le mouvement de convection forcée peut résulter d'un écoulement tel que toute sortie des molécules qui s'évaporent, se produise seulement par diffusion moléculaire. On appelle ce type : écoulement laminaire. Il pourrait, d'ailleurs, résulter partiellement de la convection libre. Mais quand la vitesse transversale augmente, l'influence de la convection forcée devient prédominante et alors celle de la convection libre est négligeable.

L'écoulement laminaire prendra de l'importance dans un système s'évaporant en convection forcée, si le nombre de REYNOLDS ne devient pas trop grand. Mais dans la mesure où la convection forcée s'accroît (ou plus exactement quand le nombre de REYNOLDS s'élève), l'écoulement commence à devenir instable et il en résulte finalement un écoulement turbulent où la diffusion molaire favorise la sortie des molécules de vapeur. Ce mouvement est considérablement plus grand que celui qu'on observe dans le mouvement moléculaire seul. Quoique la diffusion moléculaire puisse libérer les molécules autant que l'écoulement laminaire, la diffusion molaire est si grande que, par comparaison, la diffusion moléculaire est négligeable.

Dans la discussion de la convection forcée, on considère donc deux écoulements : laminaire et turbulent, en tenant compte, pour le dernier, de l'équation fondamentale de diffusion.

Écoulement laminaire

Au début du siècle dernier, PRANDTL (1904) [20] a présenté sa notion classique de couche limite,

il a énoncé le principe selon lequel l'influence de la viscosité est limitée à une couche fluide relativement mince adhérent à la paroi considérée. Cela nous amène à la théorie de la couche limite.

On peut rapprocher la notion de couche limite de la notion analogue de couche de vapeur, dans le cas de l'évaporation. Ainsi, on déterminera la distribution de vapeur dans cette couche au moyen d'équations semblables à celles qu'on emploie dans le calcul de la distribution de la vitesse dans une couche limite.

Les équations classiques de NAVIER-STOKES de l'écoulement à deux dimensions sont :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

of the force of gravity acting freely on the system together with the molecular motion. Instead a pattern of motion is forced upon the system from outside.

The motion of forced convection may result in a system of flow whereby all outward motion of the evaporating molecules is by molecular diffusion only. This type of flow is called laminar flow which may, on the one hand, be in part a result of free convection. As the cross velocity is increased on the other hand, forced convection becomes predominant and the influence of free convection is negligible.

Laminar flow will prevail in an evaporating system with forced convection, provided the Reynolds number of the flow does not become too great. However, as the forced convection becomes stronger (or more exactly as the Reynolds number increases) the flow pattern becomes unstable—eventually giving way to turbulent flow where molar diffusion causes an outward rate of movement of the vapor molecules many, many times greater than that which exists for molecular diffusion alone. Although the molecular diffusion continues to carry the molecules outward as effectively as

for laminar flow, the molar diffusion is so extremely great that by comparison the molecular diffusion is insignificant.

As a part of the discussion of forced convection, therefore, consideration is given both to laminar flow and to turbulent flow—the latter also considering the fundamental equation of diffusion.

Laminar Flow

Early in the present century (1904), Prandtl [20] presented his classic concept of the boundary layer. He reasoned that the influence of viscosity is confined to a relatively thin layer of fluid adjacent to a boundary. This reasoning led to what is now known as the boundary layer theory.

The concept of the boundary layer may be carried to a similar concept of a vapor layer for the case of evaporation, and the distribution of vapor within this vapor layer may be determined by the use of equations similar to those employed for the velocity distribution within the boundary layer.

The classic Navier-Stokes equations for two-dimensional flow are :

(16)

Par ailleurs, l'équation de continuité est :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

où u et v sont les composantes de la vitesse, t le temps, p la pression, ρ la masse spécifique et ν la viscosité cinématique.

Au moyen d'hypothèses simplificatrices et de considérations d'ordre de grandeur des différents termes, les équations (16) peuvent être réduites à la forme simplifiée :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (18)$$

Deux de ces hypothèses sont que $(\partial \rho / \partial x) = 0$ et que l'écoulement est permanent. De la même façon, on peut écrire l'équation suivante pour le transfert de chaleur et le transfert de vapeur :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (19)$$

$$u \frac{\partial p_v}{\partial x} + v \frac{\partial p_v}{\partial y} = \nu_e \frac{\partial^2 p_v}{\partial y^2} \quad (20)$$

où $\alpha = k / C_p \rho$ est la conductivité thermique, $\nu_e = (\nu / \sigma)$ celle de la vapeur et p_v est la pression de vapeur.

BLASIUS a tiré des équations (17) et (18) une équation de la distribution de la vitesse dans une couche limite laminaire, laquelle peut être combinée avec l'équation de l'effort total tangentiel :

$$F = b \int_0^L \tau_0 dx = b \mu \int_0^L \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} dx \quad (21)$$

donnant l'équation bien connue du coefficient de résistance dans l'écoulement laminaire :

$$C_f = 1,328 / \sqrt{R} \quad (22)$$

où b est la largeur, L la longueur de la surface, F l'effort total tangentiel, R le nombre de REYNOLDS UL/ν et U la vitesse ambiante. Bien que les équations (21) et (22) concernent seulement le transfert de la quantité de mouvement, on peut, par analogie, déduire des équations semblables pour le transfert de chaleur :

$$q = -b k \int_0^L \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} dx \quad (23)$$

$$C_h = \frac{0,664}{\sigma^{2/3} \sqrt{R}} \quad (24)$$

et celles du transfert de vapeur (évaporation) :

$$E = -b k' \int_0^L \left(\frac{\partial p_v}{\partial y} \right)_{y=0} dx \quad (25)$$

$$C_e = \frac{0,664}{\sigma^{2/3} \sqrt{R}} \quad (26)$$

où R contient la viscosité cinématique et σ dépend du fluide particulier. Quand la couche limite ou la couche de vapeur commence au bord amont de la paroi, ce qui est le cas pour les équations précédentes, le problème est beaucoup plus simple que dans le cas de l'évaporation commençant quelque peu en aval du bord amont de la paroi. Dans ce dernier cas, la couche d'évaporation est enfermée dans une couche limite qui s'est développée à partir du bord amont de la frontière, en introduisant par là une variable supplémentaire : la distance $x' - x_0$. Ici, on ne peut pas utiliser la méthode employée pour obtenir l'équation (26) et ainsi l'équation (25) se résout comme équation aux dérivées partielles.

Au moyen de la méthode de relaxation et par l'emploi de fonctions caractéristiques (Cf : YIH

and the equation of continuity is : (17)
where u and v are the velocity components in the x and y directions, t is the time, p is the pressure, ρ is the mass density, and ν is the kinematic viscosity.

By making simplifying assumptions and considerations of orders of magnitude of the various terms, Equation 16 may be simplified to a single equation : (18)

two of the assumptions being that $(\partial \rho / \partial x) = 0$ and that the flow is steady. Similarly, it is possible to write the following equations for heat-transfer and vapor transfer : (19) (20)

where $\alpha = k / C_p \rho$ is the heat conductivity, $\nu_e = (\nu / \sigma)$ is the vapor conductivity, and p_v is the vapor pressure.

By utilizing Equations 18 and 17, Blasius derived an equation for the velocity distribution in a laminar boundary layer, which may be combined with the total shear equation : (21)

to yield the well-known drag equation for laminar flow : (22)

where b is the width and L is the length of the plate, F is the total drag, R is the Reynolds number UL/ν , and U is the ambient velocity.

Although Equations 21 and 22 are for momentum transfer only, it is possible by analogy to deduce similar equations for heat transfer : (23) (24)

and for vapor transfer (evaporation) : (25) (26)

where R contains the kinematic viscosity, and σ must be selected for the particular fluids involved.

When the boundary layer or the vapor layer begins at the upstream edge of the boundary, as is the case in the foregoing equations, the problem is much simpler than for the case of evaporation which begins downstream from the upstream edge of the boundary. In the latter case the evaporation layer is enclosed within a boundary layer which has developed from the upstream edge of the boundary, thereby introducing an additional variable—the distance $x' - x_0$. In this case the procedure utilized to obtain Equation 26 cannot be employed, and Equation 25 remains as a partial derivative.

By means of the relaxation method and the use of eigen-function, see Yih [33], it is possible to obtain the following solutions

[33]), il est possible d'obtenir les solutions suivantes où M_1 est le taux total d'évaporation quand $x_0 \neq 0$ et M_2 est le taux correspondant quand $x_0 = 0$:

$$M_1 = v_e \sqrt{\frac{U x_0}{\nu}} [0,552 (x_L^{1/2} - 1) + 0,093 \log_e (2 x_L - 1 + \sqrt{x_L^2 - x_L})] (c_s - c_0) \cdot \varphi \quad (27)$$

$$M_2 = v_e \sqrt{\frac{U x_0}{\nu}} [0,552 (x_L - 1)^{1/2}] (c_s - c_0) \cdot \varphi \quad (28)$$

où :

$$x_L = x'/x_0.$$

La table suivante montre l'influence de la distance d'approche à l'amont de la surface d'évaporation.

x_L	1	2	3	4	5	10	20
M_1/M_2	0,34	0,71	0,79	0,83	0,86	0,93	0,96

Malheureusement, dans les travaux expérimentaux entrepris en vue de la recherche du transfert de chaleur et de l'évaporation, on n'a pas considéré l'effet de cette distance d'approche sur le transfert de chaleur et l'évaporation. Pour vérifier les résultats précédents, on a examiné les travaux expérimentaux d'ELIAS [11]. Il a employé une distance d'approche de 10 cm et a procédé aux mesures de la perte de charge sur une surface de 50 cm de long. En se servant d'un rapport $x_L = 6$, la table précédente montre qu'il existe une différence sensiblement égale à 12 % à partir d'une solution avec la condition $x_0 = 0$.

Suivant les mesures d'ELIAS, cette différence devrait être moindre que 12 %. Cependant, l'effet de la convection libre présente un apport

compensateur fournissant par là, du moins en partie, des vérifications partielles des équations (27) et (28).

Sur la base du principe d'analogie, les équations (27) et (28) doivent s'appliquer à l'évaporation. On donnera une comparaison de ces équations pour le cas de l'évaporation dans le chapitre VI.

Comme l'écoulement laminaire ne comprend que la diffusion moléculaire des molécules sans la diffusion molaire comme dans l'écoulement turbulent, le problème est simplifié matériellement au point de vue mathématique quand on le compare aux difficultés rencontrées dans l'expression de l'écoulement turbulent; on le verra dans le paragraphe suivant.

Écoulement turbulent

Quand le nombre de REYNOLDS devient assez grand, on sait que l'écoulement, tout en restant laminaire, devient instable. L'effort tangentiel, aux différents points du fluide, devient alors si élevé que des tourbillons se développent. Avec un accroissement plus grand encore du nombre de REYNOLDS, le réseau entier de l'écoulement peut contenir de nombreux tourbillons qui déterminent un régime turbulent soumis aux lois du hasard. Dans ces conditions, les équations de NAVIER-STOKES ne sont plus valables. La raison principale en est que le terme de viscosité ne représente que la diffusion moléculaire de la quantité de mouvement, tandis qu'en régime turbulent, la diffusion molaire est si élevée que la diffusion moléculaire devient relativement insignifiante. Il est toujours possible d'ajouter aux

where M_1 is the total rate of evaporation when $x_0 \neq 0$ and M_2 is the total rate of evaporation when $x_0 = 0$, (27) (28) where $x_L = x'/x_0$. The following table shows the influence of the approach boundary upstream from the evaporating surface based on Eqs 27 and 28.

Unfortunately, in the experimental work which has been done in both heat transfer and evaporation research no consideration has been given to the effect of this upstream approach boundary upon the heat transfer and evaporation. In an attempt to verify the afore mentioned derivations, the experimental work of Elias [11] was examined. Elias used an approach length of 10 cm and he measured the heat loss from a surface 50 cm in length. Using the ratio of $x_L = 6$, the foregoing table shows that approximately a 12 % difference exists from the solution for the condition where $x_0 = 0$.

According to the measurements of Elias, this difference should be less than 12 %. However, the free convection offers a compensating effect, thereby supplying at least a partial verification of Equations 27 and 28.

On the basis of the analogy principle Equations 27 and 28

should be applicable equally well to evaporation. The comparison of these equations for the case of evaporation is included in Chapter VI.

Because laminar flow involves only molecular diffusion of the molecules, without molar diffusion as in turbulent flow, the problem is materially simplified from the mathematical viewpoint as compared with the difficulties of expressing turbulent flow as shown in the next section.

Turbulent Flow

Once the Reynolds number of a flow system becomes sufficiently large, the flow becomes unstable as laminar flow and the shear at various local points becomes so great that vortices develop. With further increase in Reynolds number of the entire flow pattern may contain numerous vortices which break down into random turbulence. Under these circumstances the Navier-Stokes equations are no longer applicable. The primary reason for this situation is that the viscosity term represents only molecular diffusion of the momentum, whereas with turbulence present the molar diffusion is so very great that the molecular diffusion is insignificant by comparison. To add the various coefficients of

équations de NAVIER-STOKES, dans chacune des directions d'axes, des coefficients différents de viscosité des tourbillons (pour la diffusion molaire) et des termes de vitesse instantanée. Toutefois, le résultat en est si compliqué, qu'en pratique, cette adjonction est vaine. Il est donc nécessaire d'employer d'autres procédés, pour résoudre, mathématiquement, le problème de l'évaporation résultant de l'écoulement turbulent.

Un groupe de développements mathématiques provient de l'analogie démontrée par REYNOLDS entre le transfert de la quantité de mouvement et le transfert de chaleur. Plus tard, cette analogie a été l'objet d'extensions faites par PRANDTL, TAYLOR, KARMAN, HOFFMANN et MATTIOLI. Chacun de ces essais avait pour but d'étendre ou de développer les équations originales de REYNOLDS.

Un autre groupe de développements mathématiques a été présenté sur la base de la théorie du transfert de masse. Ces extensions ont été fournies par SUTTON (avec modifications par MM. PASQUILL, YIH et d'autres), FROST, THORNTWHAITE et HOLZMAN, MILLAR et SVERDRUP.

L'ANALOGIE DE REYNOLDS ET SES EXTENSIONS :

En 1875, REYNOLDS [25] prétendit qu'il existait une analogie complète entre le transfert de la quantité de mouvement et le transfert de la chaleur. Il pensait que la viscosité des tourbillons ϵ étant très supérieure à la viscosité moléculaire ν , la distribution de la vitesse était analogue à la distribution de la chaleur. Il semblait donc logique de pousser l'analogie jusqu'à considérer les relations pouvant exister entre l'évapo-

ration et la concentration de la vapeur. On a montré, par ailleurs, que cette argumentation est très exacte quand il n'y a pas de gradient de pression et quand $\epsilon \gg \nu$. Toutefois, l'analogie de REYNOLDS n'est pas valable dans le voisinage d'une paroi solide et, malheureusement, en ce qui concerne le transfert de chaleur et l'évaporation, une paroi existe presque toujours. Dans ces conditions, on ne peut employer l'idée d'analogie de REYNOLDS sans la modifier. Dans le développement suivant, on cherchera à expliquer l'analogie en relation avec le transfert de chaleur.

En considérant le transfert de la quantité de mouvement, l'équation suivante de diffusion s'applique pour le mouvement parallèle moyen :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} - \rho \overline{u'v'} \quad (29)$$

Et pour le transfert de chaleur :

$$q = -k \frac{dT}{dy} + C_p \rho \overline{v'T} \quad (30)$$

où τ est l'effort tangentiel ou le taux du transfert de la quantité de mouvement pour l'unité d'aire et de temps, q le taux du transfert de chaleur pour l'unité d'aire et de temps, μ la viscosité dynamique (ou le coefficient de diffusion moléculaire pour la quantité de mouvement), k la conductivité thermique (ou le coefficient de diffusion moléculaire de chaleur), C_p la chaleur spécifique, u la vitesse, et T la température en un point y . Les indices indiquent des fluctuations et les barres supérieures des moyennes de quantités fluctuantes.

eddy viscosity (for molar diffusion) and the various instantaneous velocity terms in each of the coordinate directions to the Navier-Stokes equations is possible, but the result is so cumbersome that for all practical purposes such a step is useless. Therefore, other means must be employed as a basis for solving mathematically the evaporation resulting from turbulent flow.

One group of mathematical developments stem from the analogy which Reynolds showed to exist between the transfer of momentum and heat. Later this analogy was expanded by Prandtl, Taylor, Karman, Hoffman, and Mattioli—each of the papers being directed toward expanding or developing some limiting feature of Reynold's original equation.

Another group of mathematical developments has been presented on the basis of the mass transfer theory. These developments have been presented by Sutton (with various modifications by Pasquill, Yih, and others), Frost, Thornthwaite and Holzman, Millar, and Sverdrup.

REYNOLDS ANALOGY AND ITS EXTENSIONS :

In 1875, Reynolds [21] claimed that there existed a complete analogy between momentum transfer and heat transfer. It was his contention that, because the eddy viscosity ϵ was so much

greater than the molecular viscosity ν , the velocity distribution is similar to the heat distribution. It is logical also to carry the analogy a step further to consider evaporation and vapor concentration. It has been shown, however, that this contention is most nearly correct when there is no pressure gradient and when $\epsilon \gg \nu$. Therefore, the Reynolds analogy is not valid near a solid boundary in the region of the laminar sub-layer. Unfortunately, in connection with heat transfer and evaporation, a boundary is almost always involved, so Reynolds analogy could not be used without some modification.

The following development will help to explain the analogy as set up for heat transfer.

In considering momentum transfer, the following diffusion equation for parallel mean motion applies :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} - \rho \overline{u'v'} \quad (29)$$

and for heat transfer :

$$q = -k \frac{dT}{dy} + C_p \rho \overline{v'T} \quad (30)$$

in which τ is the shear or rate of momentum transfer per unit area per unit of time, q is the rate of heat transfer per unit area per unit of time, μ is the dynamic viscosity (or the molecular diffusion coefficient for momentum), and k is the thermal conductivity (or molecular diffusion coefficient for heat), C_p is the specific heat, u is the velocity, and T is the temperature at a point y , primes indicate fluctuations, and bars are used only for fluctuating

En introduisant ε pour la diffusion turbulente, ces équations s'écrivent :

$$\tau/\varrho = (\nu + \varepsilon) \frac{du}{dy} \quad (31)$$

$$q/C_p \varrho = \left(\frac{\nu}{\sigma} + \varepsilon \right) \frac{dT}{dy} \quad (32)$$

où $(\nu/\sigma) = \alpha = k/C_p \varrho$ est le coefficient de diffusion thermique. Bien qu'il n'apparaisse pas clairement, *a priori*, que ε soit le même pour les deux cas, des expériences préliminaires sur l'écoulement bidimensionnel de l'air faites par MM. CORCORAN, RONDEBUSH et SAGE (1947) indiquent, avec une forte probabilité, que l'hypothèse doit être exacte.

Finalement, si les conditions physiques sont les mêmes, et si le nombre de PRANDTL $\sigma = 1$, ou si $\varepsilon \gg \nu$ et $\varepsilon \gg \alpha$, les équations (31) et (32) montrent alors que :

$$(u_2 - u_1)/\tau = C_p (T_2 - T_1)/q \quad (33)$$

où u_1 et u_2 sont deux vitesses et T_1 et T_2 les températures correspondantes. De plus, on démontre l'analogie entre τ et q/C_p et entre u et T , dans les conditions indiquées.

Les coefficients sans dimension C_f et C_h , comme on le sait, sont définis par les formules :

$$\tau = C_f (\varrho/2) U^2 \quad (34)$$

$$q = C_h \varrho C_p U \Delta T \quad (35)$$

où U est une vitesse représentative et ΔT une différence de température représentative également. On peut combiner les équations (33), (34) et (35) (où $u_1 = 0$) et tirer :

$$C_h = \frac{1}{2} C_f \quad (36)$$

ce qui démontre les faits importants suivants :

- 1) Si $t \sim U^n$ nous aurons $q \sim U^{n-1}$;
- 2) La rugosité fait accroître, dans le même rapport, la résistance (le transfert de la quantité de mouvement) et le transfert de chaleur.

Pour surmonter les lacunes de l'analogie originale de REYNOLDS, des chercheurs en ont proposé certaines extensions.

EXTENSION DE TAYLOR — PRANDTL :

Comme les équations précédentes ont une portée limitée, TAYLOR (1916) [30] en a développé une extension simple pour la région située près de la frontière, où ν et α sont fort différents et où leurs effets ne peuvent pas être négligés. En intégrant l'expression mathématique de ces effets à travers une région du film laminaire (où l'on peut négliger ε), TAYLOR a proposé la modification suivante aux équations (31) et (32) :

$$\left. \begin{aligned} u_\delta &= (\tau/\varrho) \int_0^\delta \frac{dy}{\nu} \\ T_\delta - T_0 &= (q/C_p \varrho) \int_0^\delta \frac{\sigma dy}{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

qui peuvent être combinées, en supposant σ , τ , q et ϱ indépendants de y , sous la forme :

$$u_\delta / \tau = \frac{C_p (T_\delta - T_0)}{q \sigma} \quad (38)$$

où u_δ est la vitesse et T_δ la température à la limite extérieure du film laminaire et T_0 la tem-

quantities. Inserting ε for turbulent diffusion these equations may be written as :

(31) (32)

in which $\nu/\sigma = \alpha = k/C_p \varrho$ is the thermal diffusivity. Although it is not clear *a priori* that ε is the same for both cases, preliminary experiments with two-dimensional air flow by Corcoran, Rondebush, and Sage (1947) strongly indicate this to be true.

Finally, if the physical conditions are the same, and if the Prandtl number $\sigma = 1$ or if $\varepsilon \gg \nu$ and $\varepsilon \gg \alpha$, then Eqs 37 and 32 show that :

(33)

in which u_1 and u_2 are two velocities, and T_1 and T_2 the corresponding temperatures. Furthermore, it proves the analogy between τ and q/C_p , and u and T for the given conditions as stated.

The well known dimensionless coefficients C_f and C_h are defined as :

(34) (35)

where U is a representative velocity and ΔT a representative temperature difference. Eqs 33, 34 and 35 may be combined (where $u_1 = 0$) to give :

(36)

which proves the following important facts :

1. If $t \sim U^n$, then $q \sim U^{n-1}$.
2. Roughness increases the resistance (momentum transfer) and the heat transfer in the same ratio.

To help to overcome the deficiencies of the original Reynolds analogy, a number of scientists have made certain extensions to it.

TAYLOR-PRANDTL EXTENSION :

Because of the limitation of the foregoing equations, Taylor, 1916 [30] developed a simple extension for the region near a boundary where ν and α are greatly different and their effects cannot be neglected. Integrating across the region of the laminar sub-layer, where ε may be omitted, Taylor proposed the following modification to Eqs 31 and 32 :

(37)

which may be combined, by assuming σ , τ , q , and ϱ to be independent of y , into :

(38)

where u_δ is the velocity and T_δ is the temperature at the outer edge of the laminar sub-layer, and T_0 is the wall temperature.

pérature à la paroi. L'équation (38) se combine avec (33) et donne :

$$\frac{C_p (T_m - T_0)}{q} = \frac{U}{\tau} + (\sigma - 1) u_\delta / \tau \quad (39)$$

ou :

$$1/C_h = \frac{2}{C_f} \left[1 + \frac{u_\delta}{U} (\sigma - 1) \right] \quad (40)$$

où U est la valeur moyenne de u sur la section de la conduite.

La difficulté principale qui se présente dans l'équation précédente est l'évaluation du rapport u_δ/U . Cette question a été étudiée, entre autres, par PRANDTL (1928) [20] qui a proposé que u_δ/u soit proportionnel à $R^{-1/8}$. Ainsi il a obtenu l'équation suivante :

$$C_h = \frac{C_f/2}{1 + (1,74) R^{-1/8} (\sigma - 1)} \quad (41)$$

En faisant certaines hypothèses supplémentaires, on a :

$$1/C_h = 2/C_f + \text{const.} \sqrt{2/C_f} (\sigma - 1) \quad (42)$$

mais, malheureusement, à la limite de la couche turbulente (où $\varepsilon \neq 0$) et du film laminaire ($\varepsilon=0$), il y a discontinuité. D'ailleurs, des expériences ont montré que cette équation n'est valable que quand σ est sensiblement égal à 1.

EXTENSION DE KARMAN :

Dans l'espoir de trouver une transition raisonnable de la région laminaire à la région turbulente, KARMAN (1939) [16] a supposé que :

$$\frac{u}{\sqrt{\tau/\rho}} = f(\eta) \quad (43)$$

où $\eta = \sqrt{\tau/\rho} (y/\nu)$, et il a obtenu :

$$\frac{du}{dy} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} f'(\eta) \frac{\sqrt{\tau/\rho}}{\nu} = \frac{\tau}{\rho \nu} f'(\eta) \quad (44)$$

qui donne, en combinaison avec (31) :

$$\varepsilon = \nu \left[\frac{1}{f'(\eta)} - 1 \right] \quad (45)$$

pour la zone de transition.

En supposant que τ et q soient tous deux constants, on est amené, à partir de l'équation (44), à :

$$u_\delta = \sqrt{\tau/\rho} \int_0^{\eta_\delta} f'(\eta) d\eta \quad (46)$$

et :

$$T_\delta - T_0 = \frac{q}{C_p \rho \sqrt{\tau/\rho}} \int_0^{\eta_\delta} \frac{d\eta}{\frac{1}{\sigma} - 1 + \frac{1}{f'(\eta)}} \quad (47)$$

L'intégrale de l'équation (46) est un nombre sans dimensions et celle de (47) est une fonction de σ seul. En conséquence :

$$\frac{C_p \rho (T_\delta - T_0)}{q} - \frac{\rho u_\delta}{\tau} = \sqrt{\frac{\rho}{\tau}} [B(\sigma) - A] \quad (48)$$

Selon l'analogie de REYNOLDS, on dispose de l'expression :

$$\frac{\rho (U - u_\delta)}{\tau} = \frac{C_p \rho (T_m - T_\delta)}{q} \quad (49)$$

qui, se combinant avec (48), donne :

$$\frac{C_p \rho (T_m - T_0)}{q} - \frac{\rho U}{\tau} = \sqrt{\frac{\rho}{\tau}} [B(\sigma) - A] \quad (50)$$

L'étape suivante, dans le développement, est la détermination de $B(\sigma) - A$. On s'appuiera alors sur les hypothèses suivantes :

Eq 38 may be combined with Eq 33 to give : (39)
or : (40)

where U is the mean value of u over the pipe section.

The primary difficulty with the foregoing equation is the ratio u_δ/U , which has been discussed, among others, by Prandtl, 1928 [20] who reasoned that it should be proportional to $R^{-1/8}$. By this means he obtained the following equation : (41)

Then by making certain further assumptions, (42)

Unfortunately, however, at the junction of the turbulent layer (in which $\varepsilon \neq 0$) and the laminar sub-layer (in which $\varepsilon = 0$) there is a discontinuity. Furthermore, experiments have shown that the equation is good only when σ is nearly equal to 1.

KARMAN EXTENSION :

In an attempt to find a reasonable transition from the laminar

region to the turbulent region, Karman, 1939 [16] assumed that : (43)

where $\eta = \sqrt{\tau/\rho} (y/\nu)$ and obtained : (44)

which combines with Eq 31 to give : (45)
for the transition zone.

By assuming both τ and q to be constant, Eq 44 leads to ,

and : (46)
(47)

The integral in Eq 46 is a pure number and that of Eq 47 is a function only of σ . Therefore : (48)

By the Reynolds analogy : (49)

which may be combined with Eq 48 to give : (50)

The next step in the development is to determine $B(\sigma)-A$. On the basis of :

1) Dans le film laminaire :

$$\frac{u}{\sqrt{\tau/\rho}} = \eta \quad (51)$$

2) Dans la région turbulente existe la distribution logarithmique habituelle :

$$\frac{u}{\sqrt{\tau/\rho}} = 5,5 + 2,5 \log_e \eta \quad (52)$$

3) Dans la zone de transition, la distribution de la vitesse doit être continue par rapport à celle qui existe dans les deux régions, laminaire et turbulente; KARMAN a employé la loi :

$$\frac{u}{\sqrt{\tau/\rho}} = 5 \left[1 + \log_e \left(\frac{\eta}{5} \right) \right] \quad (53)$$

qu'il combine avec les équations (51), (46) et (47) et il a obtenu :

$$A = 5 (1 + \log_e 6), B = 5 [\sigma + \log_e (1 + 5 \sigma)]$$

$$\frac{1}{C_h} = \frac{2}{C_f} + 5 \sqrt{2/C_f} \left\{ [(\sigma - 1)] + \log_e \left[1 + \frac{5}{6} (\sigma - 1) \right] \right\} \quad (54)$$

Cette équation présente certains inconvénients identiques à ceux de l'équation de TAYLOR-PRANDTL, en montrant une discontinuité dans la zone de transition. Mais la discontinuité par rapport à ε se présente pour des valeurs de η et de $(v + \varepsilon)$ encore plus élevées que pour celles de l'extension de TAYLOR-PRANDTL.

Si on utilise la fonction logarithmique pour les valeurs de σ voisines de 1, on obtient l'équation approchée suivante :

$$\frac{1}{C_h} = \frac{2}{C_f} + 5 \sqrt{2/C_f} \cdot (\sigma - 1) \quad (55)$$

et pour $\sigma = 1$:

$$C_h = \frac{1}{2} C_f \quad (56)$$

Ce sont d'ailleurs les mêmes équations que celles que l'on obtient dans l'extension de TAYLOR-PRANDTL.

En partant de la relation classique due à BLASIUS $2/C_f = 0,04 R^{-1/4}$, on peut remanier l'équation (54) de la façon suivante :

$$Nu = \frac{0,04 R^{3/4} \sigma}{1 + R^{-1/8} \{ \sigma - 1 + \log_e [1 + (5/6) (\sigma - 1)] \}} \quad (57)$$

qui s'applique bien pour toutes les valeurs de σ jusqu'à 10, ainsi qu'on l'a vérifié par comparaison avec l'expérience, tandis que l'équation (41), extension de TAYLOR-PRANDTL, donne des valeurs trop faibles.

Pourtant, aucun résultat d'expériences pour de très grandes valeurs de σ n'a été publié; la forme asymptotique de l'équation (57) est :

$$Nu = 0,104 R^{7/8} \quad (58)$$

AUTRES EXTENSIONS DE L'ANALOGIE DE REYNOLDS :

Quoi qu'il en soit des extensions de l'analogie de REYNOLDS, celles-ci n'ont rien apporté de plus que l'extension due à KARMAN.

HOFFMANN (1940) [14] a supposé des distributions de vitesse différentes dans les trois régions : film laminaire, couche limite turbulente, zone turbulente. Il a obtenu :

$$C_h = \frac{(1/2) C_f}{1 + \sqrt{C_f/2} (\Psi - 12,79)} \quad (59)$$

1. In the laminar sub-layer $u/\sqrt{\tau/\rho} = \eta$ (51)

2. In the turbulent zone the usual logarithmic distribution is : (52)

3. In the transition zone the velocity distribution must be continuous with those distributions in both the laminar and turbulent zones.

Karman used : (53)

to combine with Eqs 51, 46, and 47 to obtain :

and : (54)

This equation has some of the same disadvantages as that of Taylor-Prandtl, having a discontinuity in the transition zone. But the discontinuity with respect to ε occurs at larger values of η and $(v + \varepsilon)$ than for the Taylor-Prandtl Extension.

When the logarithmic function is expanded for values of σ very near 1, the following approximate equation is obtained : (55)

and for $\sigma = 1$: (56)

which are the same equations as those obtained by the Taylor-Prandtl Extension.

By assuming the standard relationship of Blasius $2/C_f = 0,04 R^{-1/4}$, Eq 54 may be rearranged in the following manner : (57)

which has been found by comparison with experiment to apply rather well for values of σ as large as 10, whereas Eq 41 of the Taylor-Prandtl extension gives values which are too low.

Although no experiments have been reported for very large values of σ , the asymptotic form of Eq 57 is : (58)

OTHERS EXTENSIONS TO REYNOLDS ANALOGY :

Although there have been other extensions to Reynolds analogy, they do not add much refinement beyond the Karman Extension.

Hoffman, 1940 [14] assumed different velocity distributions in the three regions of the laminar sub-layer, the transition zone, and the turbulent zone to obtain : (59)

pour $\sigma < 1$ et $\eta = 25$ et quand Ψ est une fonction unique de σ . En employant les nombres de NUSSELT et de REYNOLDS et l'équation de BLASIUS, l'expression ci-dessus s'exprime ainsi :

$$Nu = \frac{0,04 R^{3/4} \sigma}{1 + 0,2 R^{-1/8} (\Psi - 12,8)} \quad (60)$$

A partir du tenseur des efforts, MATTIOLI (1940) [18] a trouvé l'équation suivante au moyen de relations particulières basées sur des expériences :

$$C_h = \frac{C_f/2}{1 + \sqrt{C_f/2} \left(9,46 \sigma^{0,77} - 2,45 \frac{\log_e \sigma}{\sigma - 1} - 7 \right)} \quad (61)$$

ce qui peut être exprimé sous la forme :

$$Nu = \frac{0,04 R^{3/4} \sigma}{1 + 0,2 R^{-1/8} \left(9,46 \sigma^{0,77} - 2,45 \frac{\log_e \sigma}{\sigma - 1} - 7 \right)} \quad (62)$$

En ce qui concerne les équations (57), (60) et (62), la relation de BLASIUS a été employée parce que les expériences de KRAUSSOLD ont été effectuées dans le domaine des nombres de REYNOLDS pour lequel la relation est valable. Pour des valeurs élevées du nombre de REYNOLDS, $10^6 < R < 10^9$, on devrait employer les équations suivantes :

$$C_f = 0,074 R^{-1/5} \quad (\text{loi de puissance}) \quad (63)$$

$$C_f = \frac{0,472}{(\log_{10} R)^{2,58}} \quad (\text{SCHLICHTING}) \quad (64)$$

for $\sigma < 1$ and $\eta = 25$, where Ψ is a function of σ only. In terms of Nusselts number and Reynolds number, and with the Blasius equation this may be expressed as :

Mattioli, 1940 [18] began with the stress tensor and obtained the following equation by means of certain empirical relations :

which may be expressed also as :

For Eqs 57, 60 and 62, the Blasius relation is used because Kraussold's experiments were performed in a Reynolds number range for which this equation is valid. When considering higher values of Reynolds number $10^6 < R < 10^9$, the following equations should be used :

$$(\text{Power law}) \quad (63)$$

$$(\text{Schlichting}) \quad (64)$$

$$(\text{Schultz-Grunow}) \quad (65)$$

EMPIRICAL EQUATIONS :

A number of equations have been derived from experimental

$$C_f = \frac{0,427}{(-0,407 + \log_{10} R)^{2,64}} \quad (\text{SCHULTZ-GRUNOW}) \quad (65)$$

EQUATIONS EMPIRIQUES :

Un certain nombre d'équations ont été obtenues expérimentalement en utilisant la relation entre le transfert de chaleur et le transfert de quantité de mouvement. KRAUSSOLD (1933) [17] a proposé pour des conduites, quand il s'agit d'échauffement des fluides :

$$Nu = 0,024 R^{0,8} \sigma^{0,37} \quad (66)$$

et pour le refroidissement de ces fluides :

$$Nu = 0,024 R^{0,8} \sigma^{0,30} \quad (67)$$

DITTUS et BOELTER (1930) [10] avaient proposé l'équation suivante exprimant simultanément le refroidissement et l'échauffement.

$$Nu = 0,0254 R^{0,8} \sigma^{0,35} \quad (68)$$

En employant la formule :

$$C_h = Nu/(R \sigma) \quad (69)$$

dans les équations précédentes et en supposant l'exposant de σ égal à une valeur moyenne 0,34, on peut obtenir l'équation suivante :

$$C_h = \frac{1}{2} C_f \sigma^{-2/3} \quad (70)$$

qui est d'ailleurs la même que l'équation de POHLHAUSEN pour le transfert laminaire de chaleur à partir d'une plaque chaude. Bien que l'équation de POHLHAUSEN soit limitée à l'écoulement laminaire, cette concordance semble plutôt accidentelle.

data to express the relationship between heat transfer and momentum transfer.

Kraussold, 1933 [17] proposed for pipes :

when heating the fluid, and :

when cooling the fluid.

Dittus and Boelter, 1930 [10] proposed the following equation for both cooling and heating :

Using the equation :

with the foregoing equations, and setting the exponent of σ at a mean value of 0.34, the following equation may be obtained :

which is the same as the equation that Pohlhausen obtained for laminar heat transfer from a heated plate. Since Pohlhausen's equation is for laminar flow only, however, this agreement may be coincidental.

DISCUSSION DES EXTENSIONS DE L'ANALOGIE DE REYNOLDS :

Evidemment, il est intéressant de voir que chacune des extensions dues à KARMAN, HOFFMANN et MATTIOLI, fournissent une équation unique de la forme suivante :

$$C_h = \frac{C_f/2}{1 + \sqrt{C_f/2} \varphi(\sigma)} \quad (71)$$

Il est aussi intéressant de noter que si $\sigma = 1$, les équations deviennent identiques et si $\sigma = 0,6$, elles donnent pour $\varphi(\sigma)$ les valeurs approchées 4,0, 4,1 et 3,8 respectivement.

On a été surtout encouragé dans les développements précédents à cause des problèmes de transfert de chaleur qu'on rencontre dans l'écoulement en conduite. De plus, l'équation (33) (dans laquelle $\sigma = 1$) a été employée dans l'élaboration de chacune des extensions. En conséquence, quelques restrictions seulement seraient à apporter aux équations (54), (59) et (61). La restriction la plus importante réside dans ce qu'il n'y aura pas de gradient de pression dans l'écoulement. Pour l'écoulement en conduite, cela est évidemment impossible. La restriction $\sigma = 1$ paraît, *a priori*, d'une importance considérable puisque les valeurs moyennes des vitesses et des températures sont prises sur la section entière de la conduite. Pourtant, les erreurs commises sont minimales puisque le film laminaire est mince, en raison des grands nombres de REYNOLDS, et que les différences des températures usuelles ne sont pas élevées.

Dans le cas d'une plaque plane, le gradient de pression est nul. On prend alors pour la vi-

tesse et la température leurs valeurs ambiantes. Il en résulte que les extensions de l'analogie de REYNOLDS peuvent être admises avec un degré raisonnable d'exactitude, mais seulement si les équations de l'écoulement dans des conduites, qu'on a employées pour les développements des extensions, sont applicables pour une plaque plane. En plus, les hypothèses de constance de l'effort tangentiel (c'est-à-dire de la quantité de mouvement) et de constance de q (transfert de chaleur) dans toute la couche limite, sont satisfaites seulement dans le cas de la plaque plane.

On remarquera que les relations précédentes ont été développées pour l'analogie entre transfert de chaleur et transfert de quantité de mouvement. On les a présentées ici en détail pour en donner les bases et aussi pour simplifier l'extension de l'analogie à l'évaporation, qui est présentée dans la suite.

APPLICATION DE L'ANALOGIE DE REYNOLDS A L'ÉVAPORATION :

Le problème consiste maintenant à appliquer l'analogie de REYNOLDS à l'évaporation, c'est-à-dire au transfert de vapeur. Puisque les trois extensions de l'analogie donnent des résultats si concordants pour $\sigma < 1$, on ne considérera que l'extension de KARMAN, équation (54) pour le problème de l'évaporation. Rappelons que dans le développement de l'équation (54), on a utilisé une distribution logarithmique pour la zone turbulente.

Strictement parlant, si l'analogie doit comprendre tous les phénomènes de diffusion, l'équation (54) doit s'appliquer directement par le

DISCUSSION OF EXTENSIONS TO REYNOLDS ANALOGY :

It is interesting to note that each of the extension of Karman, Hoffman, and Mattioli give an equation of the following form :

(71)

and it is further of interest to note that when $\sigma = 1$ they are identical and when $\sigma = 0.6$ they give $\varphi(\sigma)$ approximately 4.0, and 4.1, and 3.8 respectively.

The foregoing developments were stimulated primarily in connection with heat transfer problems encountered in pipe flow. Furthermore, Eq 33, which depends upon $\sigma = 1$, has been used in the development of each of the extensions. Therefore, certain limitations must be placed on Eqs 54, 59, and 61. The limitation which is of perhaps the most importance is that there shall be no pressure gradient in the flow. With pipe flow this is obviously impossible. The limitation of $\sigma = 1$ at first appears to be of considerable consequence since the mean values of velocity and temperature are taken over the entire pipe section. However, the errors are small when the laminar sub-layer is thin (for large Reynolds numbers) and when ordinary temperature differences are not great.

In the case of a flat plate the pressure gradient is zero and the velocity and temperature are taken as ambient values. Hence

the extensions to Reynolds analogy should be applicable with a reasonable degree of accuracy provided that the pipe-flow equations utilized in their development are applicable to flat plates. Furthermore, the assumptions of constant shear (momentum transfer) and constant q (heat transfer) throughout the boundary layer are satisfied only in the case of flat plates.

It should be mentioned again that the foregoing relationships were originally developed for the analogy between heat transfer and momentum transfer. They have been presented here in some detail in order to supply background information and in order to simplify the extension of the analogy to evaporation in the following pages.

APPLICATION OF REYNOLDS ANALOGY TO EVAPORATION :

The problem now to be attacked is that of applying the Reynolds analogy to evaporation, which is vapor transfer. Because the three extensions to Reynolds analogy yield such similar results for $\sigma < 1$, only Karman's extension (Equation 54) will be considered for the problem of evaporation. It should be remembered that in the development of Equation 54 the logarithmic velocity distribution was used for the turbulent zone.

Strictly speaking, if the analogy is to hold for all quantities being diffused, then Equation 54 should be directly applicable by

remplacement du coefficient C_h de transfert de chaleur, par le coefficient C_e d'évaporation (transfert de vapeur). Il faut admettre aussi que σ est égal à 0,6 qui est la valeur pour la diffusion de la vapeur d'eau dans l'air. De tels changements donnent :

$$1/C_e = 2/C_f + 5 \sqrt{2/C_f} [-0,4 + \log_e (2/3)] \quad (72)$$

expression découlant de l'équation de BLASIUS.

Pour les nombres de REYNOLDS élevés ($10^8 < R < 10^9$), les équations (63), (64) et (65) doivent être utilisées pour obtenir les expressions suivantes :

$$1/C_e = 27,0 R^{1/5} - 21,0 R^{1/10} \quad (\text{loi de puissance}) \quad (73)$$

$$1/C_e = 4,24 (\log_{10} R)^{2,58} - 8,30 (\log_{10} R)^{1,29} \quad (\text{SCHLICHTING}) \quad (74)$$

$$1/C_e = 4,69 (-0,407 + \log_{10} R)^{2,64} - 8,74 (-0,407 + \log_{10} R)^{1,32} \quad (\text{SCHULTZ-GRUNOW}) \quad (75)$$

Les équations (74) et (75) pourraient être utilisées pour des nombres de REYNOLDS encore plus élevés, mais on peut les remplacer par les relations plus simples suivantes, sans aucune erreur appréciable :

$$C_e = \frac{0,503}{(\log_{10} R)^{2,88}} \quad (\text{SCHLICHTING}) \quad (76)$$

$$C_e = \frac{0,1355}{(-1,275 + \log_{10} R)^{2,5}} \quad (\text{SCHULTZ-GRUNOW}) \quad (77)$$

Jusqu'à présent, les développements ne sont guère que de nature mathématique et leur vali-

dité n'est contrôlée que dans le domaine du transfert de chaleur.

En outre, chacune de ces équations est sujette, au moins, aux mêmes restrictions que les équations correspondantes du transfert de chaleur, dans le cas de la plaque plane.

La comparaison des équations précédentes appliquée à l'évaporation, aux résultats expérimentaux justificatifs sera faite et commentée au chapitre VI.

La théorie de Sutton

SUTTON [29] a employé la notion du mélange continu pour l'élaboration de son équation d'évaporation. En employant la définition de la corrélation pour le mouvement vertical à deux instants, il a obtenu le coefficient suivant de l'échange de quantité de mouvement :

$$\overline{w'l} = \overline{w'^2} \int_0^{t_0} R(\xi) d(\xi) \quad (78)$$

Voici son raisonnement : dans le mouvement voisin d'une surface lisse, on peut supposer que la corrélation entre les vitesses fluctuantes pour des périodes de temps courtes et successives, dépend principalement de l'intensité de la turbulence — celle-ci étant mesurée par $(\overline{\rho w'^2})$ — de la viscosité μ et du temps ξ .

En supposant pour w' une distribution normale, en employant l'expression de KARMAN pour la longueur de mélange et en supposant la distribution de vitesse :

$$U \sim z^{1/m}$$

avec $m = \frac{n}{2-n}$, on peut obtenir :

changing the heat transfer coefficient C_h to an evaporation (vapor transfer) coefficient C_e , and by adjusting σ to 0.6, which is its value for the diffusion of water vapor into air. Such adjustments yield :

which is based upon the Blasius equation.

For higher Reynolds numbers ($10^8 < R < 10^9$) Equations 63, 64, and 65 may be used to obtain :

$$(\text{Power law}) \quad (73)$$

$$(\text{Schlichting}) \quad (74)$$

$$(\text{Schultz-Grunow}) \quad (75)$$

Equations 74 and 75 can be used at even higher Reynolds numbers and can also be replaced by the simpler relations :

$$(76) \quad (77)$$

with almost no error involved. Each of these equations is subject to at least the same limitations involved in the use of their corresponding equations for heat transfer with a flat plate.

The developments up to this point are of a mathematical nature only, and their validity has been checked solely in the field of

heat transfer. The comparison of the foregoing evaporation equations with experimental results will be made and discussed in Chapter VI.

Sutton's Theory

Sutton [29] has employed the continuous mixing concept in the development of his evaporation equation. By using the definition of correlation for vertical motion at two instants, he derives a momentum exchange coefficient :

$$(78)$$

He then reasoned that for motion near a smooth surface, the correlation between the fluctuating velocities at successive instants of time may be assumed to depend primarily upon the intensity of turbulence as measured by $\overline{\rho w'^2}$, the viscosity μ , and the time ξ .

By assuming w' to be of normal distribution, applying the Karman expression for mixing length, and assuming a velocity distribution :

$$U \sim z^{1/m}$$

$$k_m(z) = \frac{\left(\frac{\pi k^2}{2}\right)^{1-n} (2-n) n^{1-n}}{(1-n)(2-n)^{2(1-n)}} \nu U^{1-n} z^{\frac{2(1-n)}{(2-n)}} z_1^{-\frac{n(1-n)}{(2-n)}} \quad (79)$$

expression qui peut être utilisée pour résoudre l'équation de diffusion à deux dimensions :

$$U \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_m \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (80)$$

En supposant que cette équation soit valable jusqu'à la paroi, l'intégration suivante :

$$E = \int_0^\infty C U dz \quad (81)$$

donne :

$$N = F(n, k) R_*^{2/(2+n)} \quad (82)$$

avec :

$$F(n, k) = (2+n)^{\frac{4}{2+n}} \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{2+n} \Gamma\left(\frac{2}{2+n}\right) \left(\frac{\pi k^2}{2}\right)^{\frac{1-n}{2+n}} n^{\frac{-n}{n+2}} (1-n)^{\frac{-1}{2+n}} (2n-2)^{\frac{-2(1-n)}{2+n}} \quad (83)$$

où k est la constante de KARMAN.

Les développements précédents peuvent fournir une base pour la comparaison des données expérimentales aux résultats théoriques. Nous le verrons au chapitre VI.

(à suivre)

where $m = n/2 - n$, it is possible to obtain : (79)
which can be used to solve the two-dimensional diffusion equation : (80)

gives : (82)

where : (83)

and where k is the Karman constant.

If the assumption is made that the solution holds down to the boundary surface, integration of : (81)

The developments presented in this chapter are intended to be background material for use in the comparison of the experimental data with theoretical equations in Chapter VI.

(to be continued)