COMMENTAIRES ET DISCUSSIONS
COMMENTS AND DISCUSSIONS

Calcul de l'amortissement d'une houle dans un liquide visqueux en profondeur finie (*)

Wave damping computation for a viscous liquid of finite depth (*)

INTRODUCTION

Peu après la publication de l'article en référence, nous avons eu des doutes sur la validité de la méthode énergétique employée pour déterminer le taux d'amortissement dans l'espace à partir du taux d'amortissement dans le temps.

Une analyse plus poussée du problème semblait montrer, en effet, que seuls les termes du premier ordre (en $\nu^{1/2}$*) seraient convenablement calculés, tandis qu'il risquait de s'introduire des erreurs sur les termes du second ordre (en* ν*).*

De façon à régler définitivement cette question et en même temps à donner l'expression exacte du coefficient d'amortissement dans l'espace, il était nécessaire de reprendre entièrement, pour ce dernier cas, le calcul fait précédemment pour l'amortissement dans le temps. M. CARRY *a bien voulu se charger de ce calcul délicat et assez long, qui a montré en définitive que les termes du second ordre donnés par la méthode énergétique étaient faux. Néanmoins, l'erreur ainsi introduite était négligeable pour presque tous les cas pratiques. C'est pourquoi* la Houille Blanche, *très chargée par ailleurs, nous avait demandé de surseoir à une publication non essentielle et risquant de faire partiellement double emploi avec la précédente. La question devait cependant reprendre une actualité nouvelle à la suite de la publication par* M. MICHE *d'un ouvrage sur les « propriétés des trains d'ondes océaniques et de laboratoire », qui a d'ailleurs été récemment analysé par* la Houille Blanche. *Dans une note de cet ouvrage (page 93),* M. MICHE *affirme, sans d'ailleurs donner de démonstration formelle, que le terme principal du taux d'amortissement dans l'espace est en* ν *et non en* $\nu^{1/2}$*. Il suggère que le fait d'avoir obtenu un terme en* $\nu^{1/2}$ *provient de l'emploi de la méthode du bilan énergétique.*

Les calculs de M. CARRY, *qui s'affranchissent complètement de cette méthode, montrent qu'il n'en est rien et que nos conclusions restent identiques en ce qui concerne l'existence et surtout l'importance du terme en* $\nu^{1/2}$ *qui est prépondérant dès que les vitesses de la houle sur le fond deviennent sensibles. Ce terme ne devient négligeable que lorsque la profondeur dépasse la demi-longueur d'onde, et que, par conséquent, les vitesses sur le fond sont inférieures à quelques pour cent des vitesses en surface.*

Nous pensons que l'erreur de M. MICHE *provient de ce qu'il a négligé d'écrire que les vitesses s'annulent sur le fond, condition conforme, comme on le sait, aux hypothèses habituelles des théories d'écoulement des fluides visqueux.*

F. BIESEL.

(*) F. BIESEL, n° 5, 1949, p. 630.

Alors que M. BIESEL calculait l'amortissement d'une houle dans le temps, il est parfois utile d'avoir l'amortissement dans l'espace : le schéma du calcul est le même, nous le reprendrons cependant pour la clarté de l'exposition.

Nous savons qu'il existe une fonction de courant de la forme $\psi = \psi_1 + \psi_2$ où ψ_1 et ψ_2 satisfont respectivement à :

$$\Delta\psi_1 = 0 \quad \Delta\psi_2 - \frac{1}{\nu}\frac{\delta\,\psi_2}{\delta\,t} = 0$$

L'excédent de pression par rapport à la pression hydrostatique est donné par la différentielle totale :

$$dp = \rho\frac{\delta}{\delta\,t}\left[\frac{\delta\,\psi_1}{\delta\,x}\,dz - \frac{\delta\,\psi_1}{\delta\,z}\,dx\right]$$

soit encore, φ_1 étant la fonction conjuguée de ψ_1 :

$$p = -\rho\,\frac{\delta\,\varphi_1}{\delta\,t} + C^{te}$$

Dans le cas de vagues se propageant par une profondeur finie H, ψ peut se mettre sous la forme :

$$\psi = \text{A ch}\,\alpha\,z + \text{B ch}\,\alpha\,z + \text{C ch}\,\beta\,z + \text{D sh}\,\beta\,z)\;e^{-i\alpha x + i b t} \qquad (1)$$

l'axe Ox étant confondu avec la surface libre; l'axe Oz étant vertical ascendant et β étant déterminé par la relation :

$$\beta^2 = \alpha^2 + \frac{i\,b}{\nu} \qquad (2)$$

Le but de notre étude est la recherche des nombres complexes β et α permettant le définir la fonction ψ.

Les conditions qui doivent être satisfaites sur le fond sont :

$$\frac{\delta\,\psi}{\delta\,z} = 0 \;\text{ et }\; \frac{\delta\,\psi}{\delta\,x} = 0 \text{ pour } z = -\text{H}$$

si nous posons pour simplifier :

$$\text{L} = \text{ch}\,\alpha\,\text{H} \quad \text{M} = \text{sh}\,\alpha\,\text{H} \quad \text{P} = \text{ch}\,\beta\,\text{H} \quad \text{Q} = \text{sh}\,\beta\,\text{H}$$

Ces conditions s'écrivent :

$$(a) \qquad \text{AL} - \text{BM} + \text{CP} - \text{DQ} = 0$$

$$(b) \qquad (\text{AM} - \text{BL})\,\alpha + (\text{CQ} - \text{DP})\,\beta = 0$$

En désignant par $\eta(x)$ l'ordonnée de la surface libre, on a aussi :

$$\frac{\delta\,\eta}{\delta\,t} = -\left(\frac{\delta\,\psi}{\delta\,x}\right)_{z=0} = -\,i\,\alpha\,(\text{A} + \text{C})\;e^{i\alpha x + i b t}$$

d'où l'on tire :

$$\eta + \frac{\alpha}{b}\,(\text{A} + \text{C})\;e^{i\alpha x + i b t} = 0$$

D'autre part, l'expression de la pression est :

$$p = -\rho\,g z - \rho\,b\,(\text{A sh}\,\alpha\,z + \text{B ch}\,\alpha\,z)\;e^{i\alpha x + i b t}$$

A la surface libre ($z = \eta$) on doit avoir une pression normale nulle, soit :

$$p + 2\,\rho\,\nu\,\frac{\delta^2\,\psi}{\delta x\;\delta z} = 0$$

ou :

$$(c) \qquad + \text{A}g\,\frac{\alpha}{i\,b} + \text{B}\,(2\,\alpha^2\,\nu + i\,b) + \text{C}g\,\frac{\alpha}{i\,b} - 2\,\text{D}\,\alpha\,\beta\,\nu = 0$$

La condition d'effort tangentiel nul s'écrit, elle:

$$\frac{\delta^2\,\psi}{\delta x^2} - \frac{\delta^2\,\psi}{\delta z^2} = 0$$

soit, en tenant compte de (2) :

$$(d) \qquad 2\,\text{A}\,\alpha^2\,\nu + (2\,\alpha^2\,\nu + i\,b)\,\text{C} = 0$$

En éliminant A B C D des équations précédentes, il vient :

$$\begin{vmatrix} 2\,\alpha^2\,\nu & \text{L} & \text{M}\,\alpha & \dfrac{g\,\alpha}{i\,b} \\ 0 & -\text{M} & -\text{L}\,\alpha & 2\,\alpha^2\,\nu + i\,b \\ 2\,\alpha^2\,\nu + i\,b & \text{P} & \text{Q}\,\beta & \dfrac{g\,\alpha}{i\,b} \\ 0 & -\text{Q} & -\text{P}\,\beta & 2\,\alpha\,\beta\,\nu \end{vmatrix} = 0$$

En résolvant le déterminant précédent, il vient :

$$-4\,\alpha^3\,\nu^2\,\beta^2\,\mathrm{QM}+\beta\,[\mathrm{PM}.g\,\alpha+\mathrm{PL}\,(2\,\alpha^2\,\nu+i\,b)^2+4\,\alpha^2\,\nu^2\,\mathrm{PL}-4\,\alpha^2\,\nu\,(2\,\alpha^2\,\nu+i\,b)]$$
$$-g\,\alpha^2\,\mathrm{QL}-\mathrm{QM}\,\alpha\,(2\,\alpha^2\,\nu+i\,b)^2=0$$

en divisant par PL et en remplaçant LM PQ par leurs valeurs, il vient :

$$-4\,\alpha^3\nu^2\,\beta^2\,\mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{H}\,\mathrm{th}\,\beta\,\mathrm{H}+\beta\left[[g\,\alpha\,\mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{H}+(2\,\alpha^2\,\nu+i\,b)^2+4\,\alpha^4\,\nu^2-\frac{4\,\alpha^2\,\nu}{\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{H}\,\mathrm{ch}\,\beta\,\mathrm{H}}(2\,\alpha^2\,\nu+i\,b)^2\right] \quad (3)$$
$$-g\,\alpha^2\,\mathrm{th}\,\beta\,\mathrm{H}-\alpha\,\mathrm{th}\,\beta\,\mathrm{H}\,\mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{H}\,(2\,\alpha^2\,\nu+i\,b)^2=0$$

Les équations (2) et (3) permettent de trouver β et α; β^2 étant de l'ordre $1/\nu$ sera très grand, ce qui permettra de poser $\mathrm{th}\,\beta\,\mathrm{H}=1$ et $\mathrm{ch}\,\beta\,\mathrm{H}=\infty$; l'équation (3) devient alors :

$$-4\,\alpha^3\,\nu^2\,\beta^2\,\mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{H}+\beta\,(g\,\alpha\,\mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{H}-b^2+4\,i\,b\,\alpha^2\,\nu+8\,\alpha^4\,\nu^2)-g\,\alpha^2-\alpha\,\mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{H}\,(2\,\alpha^2\,\nu+i\,b)^2=0 \quad (4)$$

En résolvant l'équation (2) en β, en développant en série, nous avons :

$$\beta=\frac{\sqrt{b}\,(1+i)}{\sqrt{2}\,\nu^{1/2}}+\frac{\alpha^2\,(1-i)\,\sqrt{2}\,\nu^{1/2}}{4\,\sqrt{b}}$$

En remplaçant β par cette expression dans (4), nous obtenons :

$$-4\,a^5\,\nu^2\,\mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{H}-i\,4\,\alpha^3\,\nu\,b\,\mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{H}-g\,\alpha^2-\alpha\,\mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{H}\,(2\,\alpha^2\,\nu+i\,b)^2$$
$$+\left(\frac{\sqrt{b}\,(1+i)}{\sqrt{2}\,\nu^{1/2}}+\frac{\alpha^2\,(1-i)\,\sqrt{2}\,\nu^{1/2}}{4\,\sqrt{b}}\right)(\mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{H}\,g\,\alpha-b^2+4\,i\,b\,\alpha^2\,\nu+8\,\alpha^4\,\nu^2)=0$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à $\nu^{1/2}$, il vient :

$$\frac{1}{\nu^{1/2}}\frac{\sqrt{b}\,(1+i)}{\sqrt{2}}\,(\mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{H}\,g\,\alpha-b^2)-g\,\alpha^2+\alpha\,\mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{H}\,b^2 \quad (6)$$
$$+\nu^{1/2}\left[4\,i\,b\,\alpha^2\,\sqrt{b}\,\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}+(\mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{H}\,g\,\alpha-b^2)\,\frac{\alpha^2\,(1-i)\,\sqrt{2}}{4\,\sqrt{b}}\right]=0$$

On recherche alors pour α une solution de la forme :

$$\alpha=\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2\,\nu^{1/2}+\mathrm{C}^3\,\nu+\ldots$$

En notant que :

$$\mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{H}=\mathrm{th}\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{H}+\frac{\mathrm{C}_2\,\mathrm{H}}{\mathrm{ch}^2\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{H}}\,\nu^{1/2}+\left[\frac{\mathrm{C}_3\,\mathrm{H}}{\mathrm{ch}^2\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{H}}-\frac{\mathrm{C}_2{}^2\,\mathrm{H}^2\,\mathrm{th}\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{H}}{\mathrm{ch}^2\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{H}}\right]\nu$$

et en identifiant les différentes puissances de ν dans (6), nous avons les trois équations :

$$g\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{th}\,\mathrm{C}_1-b^2=0 \qquad -g\,\mathrm{C}_1{}^2+b^2\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{th}\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{H}+\frac{\sqrt{b}\,(1+i)}{\sqrt{2}}\left[g\,\mathrm{C}_2\,\mathrm{th}\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{H}+\frac{g\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{C}_2\,\mathrm{H}}{\mathrm{ch}^2\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{H}}\right]=0$$

$$4\,\frac{b^{3/2}\,\mathrm{C}_1{}^2}{\sqrt{2}}\,(i-1)-2\,g\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{C}_2+b^2\left(\mathrm{C}_2\,\mathrm{th}\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{H}+\frac{\mathrm{C}_1\,\mathrm{C}_2\,\mathrm{H}}{\mathrm{ch}^2\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{H}}\right)+\frac{\sqrt{b}\,(1+i)}{\sqrt{2}}$$
$$\left[g\,\mathrm{C}_1\,\frac{(\mathrm{C}_3\,\mathrm{H}-\mathrm{C}_2{}^2\,\mathrm{H}^2\,\mathrm{th}\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{H})}{\mathrm{ch}^2\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{H}}+g\,\frac{\mathrm{C}_2{}^2\mathrm{H}}{\mathrm{ch}^2\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{H}}+g\,\mathrm{C}_3\,\mathrm{th}\,\mathrm{C}_1\,\mathrm{H}\right]=0$$

On sait que le « nombre d'onde » $a=2\,\pi/\mathrm{L}$ des houles en fluide parfait de fréquence angulaire b est donné par $g\,a\,\mathrm{th}\,a\,h=b^2$; par analogie nous utiliserons ici la notation $\mathrm{C}_1=a$, mais il importe de souligner que a ne représente plus la même notion pour les houles en fluide visqueux.

Nous avons ensuite

$$C_2 = \frac{\sqrt{2}\,(1-i)\,a^2}{\sqrt{b}\,(\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H} + 2\,a\,\mathrm{H})}$$

et :

$$C_3 = -\frac{4\,i\,a^3}{b\,(2\,a\,\mathrm{H} + 2\,\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H})}\left[\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H} + \frac{1}{(\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H} + 2\,a\,\mathrm{H})} + \frac{2\,\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{H}\,\mathrm{ch}^3\,a\,\mathrm{H}}{(\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H} + 2\,a\,\mathrm{H})^2}\right]$$

d'où :

$$\alpha = a\left[1 + \sqrt{\frac{2\,\alpha^2\,\nu}{b}}\,\frac{(1-i)}{(\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H} + 2\,a\,\mathrm{H})} - i\,4\,\frac{a^2\,\nu}{b\,(2\,a\,\mathrm{H} + 2\,\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H})}\left(\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H} + \frac{1}{(\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H} + 2\,a\,\mathrm{H})} + \frac{2\,\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{H}\,\mathrm{ch}^3\,a\,\mathrm{H}}{(\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H} + 2\,a\,\mathrm{H})}\right)\right] \quad (7)$$

et :

$$\beta = \sqrt{\frac{b}{2\,\nu}}\,(1+i) + \frac{a^2\,(1-i)}{4}\sqrt{\frac{2\,\nu}{b}} \quad (8)$$

L'équation (7) permet d'écrire la formule donnant la loi d'amortissement en fonction de l'espace parcouru :

$$2\,h = 2\,h_0\,e^{[-2/(\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H} + 2\,a\,\mathrm{H})]\;[\sqrt[3]{a^2\,\nu/(2\,b)} + (2\,a^2\,\nu/b)\,[\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H} + 1/(\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H} + 2\,a\,\mathrm{H}) + (2\,\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{H}\,\mathrm{ch}^3\,a\,\mathrm{H})/(\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H} + 2\,a\,\mathrm{H})^2]]}$$

Pour comparer cette formule avec celle obtenue par M. BIESEL à l'aide de la méthode énergétique, il est nécessaire de faire une remarque préliminaire sur la définition de a et b.

Dans le cas de l'amortissement dans le temps, et non dans l'espace, traité *in extenso* par M. BIESEL, la longueur d'onde L était définie sans ambiguïté, ce qui permettait de déterminer a par la formule :

$$a = \frac{2\,\pi}{\mathrm{L}}$$

b était ensuite défini grâce à :

$$b = \sqrt{a\,g\,\mathrm{th}\,a\,\mathrm{H}}$$

Dans le cas de l'amortissement dans l'espace, la notion de longueur d'onde n'est plus aussi évidente, car le profil de la houle à un instant donné n'est plus périodique dans l'espace puisque l'amplitude décroît d'une crête à l'autre. On pourrait définir a comme étant la partie réelle de α, mais nous avons préféré procéder plus rationnellement en partant de la périodicité dans le temps qui, dans le cas traité ici, perd toute ambiguïté. Nous avons donc posé :

$$b = \frac{2\,\pi}{\mathrm{T}}$$

et défini :

$$a = \text{Solution de } \sqrt{a\,g\,\mathrm{th}\,a\,\mathrm{H}} = b$$

Nous évitons ainsi de parler d'une longueur d'onde ne correspondant pas à une notion physique évidente, de même que M. BIESEL avait évité de parler d'une période dans son article.

Les définitions de a et b ne peuvent donc se transposer automatiquement du cas « amortissement dans le temps » au cas « amortissement dans l'espace »; il aurait donc été nécessaire en toute rigueur que M. BIESEL donne des définitions de ces quantités en même temps que la dernière formule de son article. Notons d'ailleurs que les diverses définitions qu'il est logique d'envisager diffèrent toutes de quantités de l'ordre de $\nu^{1/2}$; par conséquent, à l'ordre d'approximation utilisé, seuls les termes en ν de la formule d'amortissement doivent être affectés par le choix des définitions de a et b.

Les différences que l'on peut effectivemennt constater sur les termes en ν de notre formule et de celle de M. BIESEL peuvent donc en partie être expliquées par les remarques qui précèdent, mais il existe une autre cause possible de divergence dans l'estimation du taux de propagation de l'énergie; il est en effet possible que ce dernier soit affecté par l'action de la viscosité, le terme le plus important de la modification qu'il subit étant probablement de l'ordre de $\nu^{1/2}$. En toute rigueur, il serait nécessaire de connaître cette modification pour mener à bien la méthode énergétique de M. BIESEL et obtenir correctement les termes de l'ordre de ν.

En définitive, si l'on désire obtenir les termes en ν en appliquant la méthode énergétique, il est nécessaire de compliquer celle-ci et par conséquent de lui faire perdre la simplicité qui constitue son avantage principal.

La comparaison de notre formule avec celle de M. BIESEL est éclairée par les remarques qui précèdent. Elle montre que le terme en $\nu^{1/2}$ est donné correctement par la méthode énergétique, tandis que le terme en ν est erroné.

L'importance pratique des différences entre les deux formules n'est d'ailleurs pas considérable, car :

Pour les grandes profondeurs relatives la différence disparaît.

Pour les profondeurs moyennes (inférieures à la demi-longueur d'onde), la différence sur le terme en ν est faible et, de plus, le terme prépondérant est celui en $\nu^{1/2}$.

Pour les profondeurs relatives extrêmement faibles, le terme en ν devient prépondérant et les valeurs asymptotiques diffèrent, l'amortissement étant :

$$2\,h = 2\,h_0\, e^{3/[8(a\mathrm{H})^2]\cdot(a^2\nu/b)ax} = 2\,h_0\, e^{(3\nu/8\,b\,\mathrm{H}^2)ax}$$

au lieu de :

$$2\,h = 2\,h_0\, e^{[1/4(a\mathrm{H})^2][(a^2\nu/b)(ax)]} = 2\,h_0\, e^{(\nu/4\,b\,\mathrm{H}^2)ax}$$

Mais il importe de noter que, de toute façon, la méthode utilisée ne peut donner de résultats certains pour ces ordres de grandeur, les hypothèses faites au cours du calcul impliquant que ν est très petit et que h n'est pas trop petit (hypothèse $P/Q \neq 1$). Or les exemples numériques donnés par M. BIESEL montrent que cette différence ne pourrait jouer que pour des liquides de viscosité très supérieure à celle de l'eau ou pour des profondeurs relatives extrêmement faibles (de l'ordre du soixantième de la longueur d'onde).

Les conclusions générales de l'article de M. BIESEL restent donc valables au moins qualitativement et en particulier, le fait que l'amortissement en profondeur pas trop grande est surtout lié au terme en $\nu^{1/2}$, contrairement à ce qu'a énoncé M. MICHE à la page 93 de son livre : *Propriétés des trains d'ondes océaniques et de Laboratoire,* édité par C.O.E.C.

***

Pour terminer ce calcul, nous allons chercher l'expression de la fonction de courant ψ. L'équation (d) donne :

$$\mathrm{A} = -\frac{\mathrm{C}}{2}\left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$$

les équations (a) et (b) donnent :

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{A}\,\alpha + \mathrm{C}\,[\alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{H}\,\mathrm{ch}\,\beta\,\mathrm{H} - \beta\,\mathrm{sh}\,\beta\,\mathrm{H}\,\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{H}]}{\alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{H}\,\mathrm{sh}\,\beta\,\mathrm{H} - \beta\,\mathrm{sh}\,\beta\,\mathrm{H}\,\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{H}}$$

$$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{C}\,\beta + \alpha\,[\beta\,\mathrm{ch}\,\beta\,\mathrm{H}\,\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{H} - \alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{H}\,\mathrm{sh}\,\beta\,\mathrm{H}]}{\beta\,\mathrm{ch}\,\beta\,\mathrm{H}\,\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{H} - \alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{H}\,\mathrm{sh}\,\beta\,\mathrm{H}}$$

Portons A, B et D dans (1), nous avons :

$$\begin{aligned}\psi = \mathrm{C}_1\, e^{iax+ibt}\,[\mathrm{sh}\,\alpha\,(\mathrm{H}+\mathrm{Z})] &- \frac{\alpha}{\beta}\left[\mathrm{th}\,\beta\,\mathrm{H}\,\mathrm{ch}\,\alpha\,(\mathrm{H}+\mathrm{Z}) + \frac{\mathrm{sh}\,\beta\,\mathrm{Z}}{\mathrm{ch}\,\beta\,\mathrm{H}}\right]\\ &- 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\left[\frac{\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{H}\,\mathrm{ch}\,\beta\,(\mathrm{H}+\mathrm{Z})}{\mathrm{ch}\,\beta\,\mathrm{H}} + \frac{\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{Z}}{\mathrm{ch}\,\beta\,\mathrm{H}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,\alpha\,(\mathrm{H}+\mathrm{Z})\right]\\ &- 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3\left[-\frac{\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{H}\,\mathrm{sh}\,\beta\,(\mathrm{H}+\mathrm{Z})}{\mathrm{ch}\,\beta\,\mathrm{H}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{th}\,\beta\,\mathrm{H}\,\mathrm{ch}\,\alpha\,(\mathrm{H}+\mathrm{Z}) + \frac{\mathrm{sh}\,\beta\,\mathrm{Z}}{2\,\mathrm{ch}\,\beta\,\mathrm{H}}\right]\end{aligned}$$

avec :

$$\mathrm{C}_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 \frac{\mathrm{C}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta\,\mathrm{H}}{\beta\,\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{H}\,\mathrm{ch}\,\beta\,\mathrm{H} - \alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{H}\,\mathrm{sh}\,\beta\,\mathrm{H}}$$

α et β étant définies par (7) et (8).

Nous remarquerons que la forme de la fonction de courant est la même pour un amortissement dans le temps si l'on pose $\alpha = a$ et $i\,b = \mathrm{K}$, les valeurs β et K étant définies dans l'article de M. BIESEL où :

$$\mathrm{K} = i\,b\left(1 - \frac{1}{\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H}}\sqrt{\frac{a^2\,\nu}{b}}\right) + b\left[\frac{1}{\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H}}\sqrt{\frac{a^2\,\nu}{b}} + 2\,\frac{a^2\,\nu}{b}\,\frac{\mathrm{ch}\,4\,a\,\mathrm{H} + \mathrm{ch}\,2\,a\,\mathrm{H} - 1}{\mathrm{ch}\,4\,a\,\mathrm{H} - 1}\right]$$

$$\beta = \sqrt{\frac{b}{2\,\nu}}\left[(1+i) - \frac{a}{2\,\mathrm{sh}\,2\,a\,\mathrm{H}}\sqrt{\frac{2\,a^2\,\nu}{b}} + \frac{a^2\,\nu}{8\,b\,\mathrm{sh}^2\,2\,a\,\mathrm{H}}(1 - 4\,\mathrm{ch}\,2\,a\,\mathrm{H} - 2\,\mathrm{ch}\,4\,a\,\mathrm{H})\,(1-i)\right]$$

C. CARRY,
Ingénieur au Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique
(SOGREAH - Grenoble)