

## NOTULE HYDRAULIQUE HYDRAULIC BRIEF

# Perte de charge le long d'un rideau de palplanches

## The head losses along a sheet piling wall

*Calcul de la perte de charge sur la face aval d'un rideau de palplanches, pour un écoulement plan en milieu poreux homogène et isotrope. Les résultats numériques sont donnés sous la forme d'un réseau de courbes.*

*The head losses on the downstream side of a sheet piling, calculated as a two dimensional flow in a porous, homogeneous isotropic medium. Numerical results are given as a curve net.*

Dans un article précédent (N° 1, 1955, p. 109), nous avons calculé le débit d'infiltration sous un rideau de palplanches. Nous allons maintenant calculer le rapport de la perte de charge sur la face aval, à la perte de charge totale. Ce rapport intervient dans l'étude de la formation des renards [1].

### 1. — Rappels

Nous avons vu que le réseau isotherme qui représente l'écoulement (fig. 1) a pour équation :

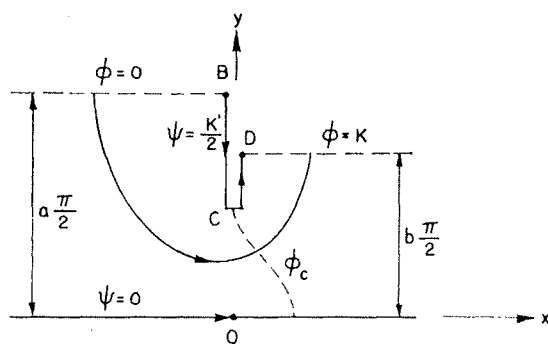


FIG. 1

$$z = a \log [\sqrt{k} \operatorname{sn} Z] + b \log [\sqrt{k} \operatorname{sn} (K + iK' - Z)] \quad (1)$$

$Z = \Phi + i\Psi$  est le potentiel complexe,

$z = x + iy$  est la variable complexe du plan sur lequel on représente le réseau.

Au point le plus bas de la palplanche, le potentiel  $\Phi_c$  est donné par :

$$\operatorname{sn} \Phi_c = \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{1-d}{1+d}} \quad (2)$$

avec :

$$d = \sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{1-k}{1+k}}$$

Le module  $k$  est déterminé par l'ordonnée du point C :

$$y_c = a \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \beta \quad (3)$$

avec :

$$z = \sqrt{k_1} \sqrt{\frac{1-k_1(a/b)}{(a/b)-k_1}}$$

$$\beta = \frac{k_1}{\alpha},$$

$$k_1 = \frac{1-k}{1+k}$$

**2. — Perte de charge**

Il s'agit d'évaluer le rapport :

$$u = \frac{h_C - h_D}{h_B - h_D} = \frac{K(k) - \Phi_e}{K(k)}$$

La formule (2) permet d'écrire :

$$\frac{1+k \operatorname{sn}^2 \Phi_e}{1-k \operatorname{sn}^2 \Phi_e} = \sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{1-k}{1+k}}$$

ou, en posant :

$$k_1 = \frac{1-k}{1+k} \quad k'_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \quad 1+k = \frac{2}{1+k_1}$$

$$\sqrt{\frac{b}{a} k_1} = \operatorname{dn} \left[ \frac{2\Phi_e}{1+k_1}, k'_1 \right] \quad (4)$$

(voir, par exemple, [2], p. 23).

D'autre part, ([2], p. 4) :

$$K(k) = \frac{1+k_1}{2} K(k'_1) = \frac{1+k_1}{2} K'(k_1)$$

et :

$$u = 1 - \frac{2\Phi_e}{(1+k_1) K'(k_1)}$$

On peut résoudre l'équation (4) par approximations successives, de la façon suivante ([3], p. 243) :

On part de la formule :

$$\frac{\operatorname{dn}(v, k'_1)}{\sqrt{k_1}} = \frac{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q'^{n^2} \cos 2nx}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q'^{n^2} \cos 2nx}$$

où :

$$q' = \exp \left[ -\pi \frac{K(k_1)}{K'(k_1)} \right] \text{ et } x = \frac{\pi v}{2 K'(k_1)}$$

En posant :

$$v = \frac{2\Phi_e}{1+k_1},$$

on peut écrire, d'après (4) :

$$\frac{1 - \sqrt{B/A}}{1 + \sqrt{B/A}} = -2q' \frac{\cos 2x + q'^8 \cos 6x + \dots}{1 + 2q'^4 \cos 4x + 2q'^{16} \cos 8x + \dots}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{b}{a} \text{ (fig. 2)}$$

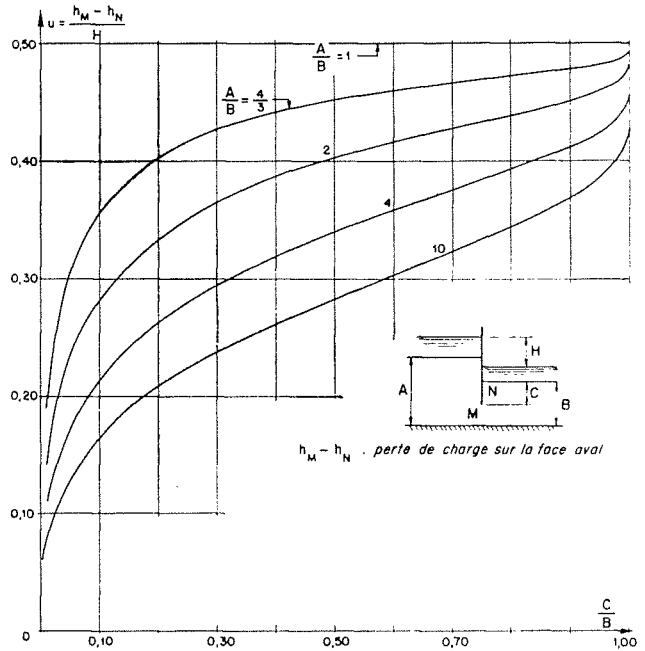


FIG. 2

Les fonctions  $q'$  sont inférieures à 1; des tables ([2], p. 114) donnent  $\log_{10} q'$  en fonction de  $k_1^2$ . Pour chaque valeur de  $k_1$ , la formule précédente permet de calculer  $x$  par approximations successives.

On calcule  $x_1$  par l'équation :

$$\frac{1 - \sqrt{B/A}}{1 + \sqrt{B/A}} = -2q' \cos 2x_1$$

puis  $x_2$ , qui donne une meilleure précision, par :

$$\frac{1 - \sqrt{B/A}}{1 + \sqrt{B/A}} = -2q' \frac{\cos 2x_2 + q'^8 \cos 6x_2}{1 + 2q'^4 \cos 4x_2}$$

et ainsi de suite.

Le rapport des pertes de charge est :

$$u = 1 - \frac{2x}{\pi}$$

Pour chaque valeur de  $k_1$ , on calcule  $y_c b$  par la formule (3) du paragraphe 1, puis :

$$\frac{c}{B} = 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y_c}{b}$$

On peut alors tracer les courbes donnant  $u$  en fonction de  $c/B$ , pour diverses valeurs de  $A/B$  (fig. 2).

Lorsque  $k_1$  est voisin de 1 ( $A/B$  voisin de 1 et  $c/B$  petit),  $q'$  est assez petit pour qu'on puisse négliger  $q'^8$  ou même  $q'^4$ , on obtient alors rapidement la valeur de  $u$ . Mais lorsque  $k_1$  tend vers 0, ( $c/B$  voisin de 1),  $q'$  tend vers 1 et le calcul de  $u$  devient plus pénible. Dans ce cas, on peut utiliser la formule asymptotique suivante.

### 3. — Formule asymptotique

Lorsque  $k_1$  est petit et  $c/B$  voisin de 1 :

$$\frac{y_c}{b} = \frac{\pi y_c}{2B} \approx 2 \sqrt{k_1 \frac{A}{B}}$$

et :

$$dn(v, k_1) \approx \frac{1}{\operatorname{ch} v}$$

donc, d'après (4) :

$$\frac{\pi y_c}{4A} \approx \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{2\Phi_c}{1+k_1}}$$

et, en négligeant :

$$\left(\frac{\pi y_c}{4A}\right)^2 \quad \text{devant } 1 :$$

$$\frac{2\Phi_c}{1+k_1} \approx \log \frac{8A}{\pi y_c}$$

D'autre part :

$$K(k_1) \approx \log \frac{4}{k_1} \approx \log \frac{8B}{\pi y_c} \cdot \frac{8A}{\pi y_c}$$

Finalement :

$$u \approx \frac{\log \frac{8B}{\pi y_c}}{\log \frac{8B}{\pi y_c} + \log \frac{8A}{\pi y_c}}$$

Cette formule a été obtenue par M. MANDEL par un autre procédé [1]. On peut aussi l'écrire :

$$u \approx \frac{\log \frac{\pi y_c}{8B}}{2 \log \frac{\pi y_c}{8B} + \log \frac{B}{A}}$$

Si  $A/B \leq 10$ , l'erreur est inférieure à  $5 \cdot 10^{-3}$  par défaut, à partir de  $C/B = 0,7$ .

R. JACQUIOT.

Ingénieur à la SOGREAH,  
à Grenoble.

### RÉFÉRENCES

- [1] J. MANDEL. — Ecoulement de l'eau sous une ligne de palplanches. Abaque pour la condition de renard. *Travaux*, mars 1951, p. 273.
- [2] OBERHETTINGER MAGNUS. — Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik. *Springer Berlin*, 1949.
- [3] MONTESSUS DE BALLORE. — Leçons sur les fonctions elliptiques. Gauthier-Villars, 1917.

