Contribution à l'étude des crues Détermination de la relation dynamique entre les précipitations et le débit des cours d'eau au moyen du calcul à l'aide de suites Principe et application

Contribution to the study of floods.
Calculation, using a series method, of
the dynamic relation between rainfall and river flow.

PAR M. CUÉNOD

ING. DIPL. EPF ZURICH, DR ÈS SC. TECHN. (*)

La nécessité d'une analyse détaillée des fluctuations dans le débit des cours d'eau, préalablement à leur aménagement, a conduit à l'établissement de diverses méthodes en vue de déterminer l'aspect dynamique du problème : la relation entre les précipitations et les débits; l'auteur décrit une méthode permettant de caractériser cette relation en faisant usage du calcul à l'aide de suites.

1. Etude des crues au moyen de cette méthode. Définition de l'hydrogramme indiciel; sa détermination théorique et expérimentale. Influence de la durée des précipitations sur le débit des crues; sa détermination par le calcul à l'aide de suites.

2. Exemples d'application de la méthode à l'étude des crues : cas de la rivière Krummbach; étude du bassin versant et des enregistrements de débits et de précipitations; établissement des hydrogrammes indiciels pour les crues enregistrées.

Annexe I. Calcul théorique de l'hydrogramme indiciel.

Annexe II. Détermination de l'hydrogramme indiciel au moyen du calcul à l'aide de suites. Exemple numérique.

The need for a detailed analysis of fluctuations in the amount of water flowing in rivers as a preliminary to any work on them, led to the development of various methods aimed at determining "dynamic" aspects of the problem; namely the relationship between rainfall and discharge. The author describes a method which uses series to give this relationship.

1° The study of floods using this method; Definition of the characteristic hydrograph; its determination by theoretical and experimental means. The effect of the duration of rainfall on flood discharges; its determination by a method using series.

2° An example in which the method is applied to the study of the catchment area of the river Krummbach and of discharge and rainfall records. Drawing up characteristic hydrographs for recorded floods.

Annexe I.—Theoretical calculation of the characteristic hydrograph.

Annexe II.—Determining the characteristic hydrograph by means of calculations using series. A numerical example.

INTRODUCTION

Le développement d'aménagements hydroélectriques en montagne avec capacité de retenue limitée a conduit à une analyse très complète de la fluctuation des débits des cours d'eau alpestres.

Cette analyse est nécessaire tant pour le dimen-

sionnement des ouvrages de ces aménagements que pour le calcul de leur production, compte tenu de leur puissance installée et de leur accumulation. Ce problème a déjà fait l'objet de nombreuses publications parmi lesquelles il faut citer en premier lieu les remarquables travaux de

(*) Ingénieur à la Société Générale pour l'Industrie, 12, rue Diday, Genève (Suisse).

A. COUTAGNE (1 à 5) *. Il peut être envisagé principalement sous deux aspects :

ASPECT STATISTIQUE : Calcul de la probabilité que tel ou tel débit soit atteint.

ASPECT DYNAMIQUE : Calcul de l'allure de la variation de débits.

C'est uniquement ce deuxième aspect qui est pris en considération dans cette étude.

Les débits des cours d'eau de montagne sont très variables et dépendent de nombreux facteurs parmi lesquels on peut citer les précipitations, les variations de température, la configuration et la nature du sol, le degré de glaciation, etc. La multiplicité de ces facteurs empêche une mise en équation commode de ce problème; son étude doit donc avant tout s'étayer sur des relevés expérimentaux.

Si les enregistrements pluviométriques et limnimétriques permettent de constater des relations entre les précipitations et la variation des débits, il est toutefois difficile d'en extraire immédiatement des lois générales qui permettent de caractériser quantitativement ces relations. La méthode de calcul à l'aide de suites (6) ouvre à cet égard des perspectives intéressantes et le but de cet article est de montrer son utilité pour l'étude de la relation dynamique qui existe entre les précipitations et les débits des cours d'eau, relation qui permet d'une part d'établir des prévisions à court terme à des fins de production hydro-électriques, d'autre part de faire une analyse générale du régime des crues.

On sait que l'étude de la variation des débits des cours d'eau en fonction des précipitations peut s'effectuer au moyen de la méthode dite

de « l'hydrogramme unitaire » (7 à 9). Cette méthode consiste à déterminer la variation du débit du cours d'eau considéré, provoqué par une averse isolée, dite *averse unitaire*. Cette variation, appelée « hydrogramme unitaire » est une caractéristique du bassin de réception. On admet que le phénomène est linéaire, c'est-à-dire que pour des averses de même durée, la forme de l'hydrogramme reste la même et son amplitude est directement proportionnelle à l'intensité des averses. Pour déterminer l'hydrogramme résultant d'une précipitation quelconque, on décompose cette précipitation en une succession d'averses ayant la durée de l'averse unitaire. L'hydrogramme cherché est donné par la superposition des différents hydrogrammes correspondant à chacune de ces averses; ces hydrogrammes sont décalés dans le temps selon le décalage de ces averses; leur amplitude est donnée par celle de l'hydrogramme unitaire multiplié par le rapport entre l'intensité de ces diverses averses et celle de l'averse unitaire.

Cette méthode a déjà été utilisée avec succès (9), mais se heurte cependant à quelques difficultés pratiques d'application : il est difficile de rencontrer une averse isolée qui remplisse toutes les conditions voulues de l'averse unitaire; d'autre part, l'hypothèse que le phénomène est linéaire est loin d'être remplie en pratique; la variation des débits n'est pas proportionnelle à l'intensité des précipitations, mais varie de façon très complexe en fonction de cette intensité, du degré de saturation du terrain, etc.

Le but de cet exposé est de décrire une autre méthode pour caractériser la relation dynamique entre les précipitations et les débits, méthode qui fait usage du calcul à l'aide de suites.

PREMIÈRE PARTIE

PRINCIPE DE L'ÉTUDE DES CRUES AU MOYEN DU CALCUL A L'AIDE DE SUITES

I. — Définition de l'hydrogramme indiciel.

L'usage s'est introduit dans la théorie des servo-mécanismes et des filtres de caractériser une relation de cause à effet par sa *réponse indicielle*; c'est la variation de l'effet résultant d'une variation de la cause selon un échelon rectangulaire. En nous inspirant de cet usage, nous appelons *hydrogramme indiciel* la variation de débit qui s'établirait en principe à la suite d'une pluie d'intensité constante qui commencerait brusquement et qui durerait ensuite

infiniment longtemps. Cet hydrogramme indiciel a l'avantage de donner des valeurs numériques immédiates sur deux grandeurs caractéristiques du bassin versant, à savoir son *déficit d'écoulement* et sa *constante de temps*. Il peut se calculer ou être déterminé à partir de relevés expérimentaux au moyen du calcul à l'aide de suites.

II. — Détermination théorique de l'hydrogramme indiciel.

Le calcul en première approximation de l'hydrogramme indiciel est donné dans l'annexe I

(*) Les chiffres entre parenthèses se réfèrent à la bibliographie donnée en fin d'article.

et conduit à la conclusion que cet hydrogramme est caractérisé par une courbe exponentielle :

$$q = p \cdot k_e (1 - e^{-t/T_q})$$

q = variation de débit résultant de l'apport pluviométrique p ;

p = apport pluviométrique s'établissant brusquement et restant ensuite constant;

k_e = coefficient de ruissellement caractérisant le déficit d'écoulement;

T_q = temps caractéristique du bassin versant caractérisant son volume d'eau de retenue.

La courbe 1 de la figure 1 représente l'apport pluviométrique pris en considération ayant l'allure d'un échelon rectangulaire. La courbe 2 de la même figure représente la variation théorique

FIG. 1. — Définition de l'hydrogramme indiciel.

p = apport pluviométrique.

p_m = amplitude de l'apport pluviométrique.

q = variation de débit résultant de l'apport pluviométrique.

q_m = variation du débit en régime permanent.

$k_e = q_m/p_m$ = coefficient de ruissellement.

T_q = temps caractéristique du bassin versant.

t = temps.

Courbe 1 : apport pluviométrique s'établissant brusquement et restant ensuite constant.

Courbe 2 : hydrogramme indiciel théorique.

Courbe 3 : hydrogramme indiciel effectivement constaté.

du débit q qui en résulte, à savoir l'hydrogramme indiciel. Sans vouloir en déduire des conclusions indues, il est facile de concevoir un modèle qui permet de se faire une représentation concrète du phénomène. Ce modèle est constitué par un lac dans la région duquel tombe une certaine précipitation. Par suite de cet apport pluviométrique, le niveau du lac monte, ce qui augmente la surface mouillée de son exutoire, ainsi que le débit qui s'écoule par cet exutoire. Le niveau du lac se stabilise lorsque cette augmentation de débit correspond à l'apport pluviométrique tombant sur le lac. Ce lac est également alimenté par un cours d'eau qui symbolise la provenance du débit considéré comme permanent, auquel se superpose le débit provoqué par l'apport pluviométrique. La proportion de pluie qui tombe

en dehors du lac et qui s'infiltré partiellement dans le sol caractérise le déficit d'écoulement; une partie de cette eau finit par aboutir dans le lac et symbolise le *ruissellement profond* que nous définirons par la suite, tandis que l'eau qui tombe directement sur le lac (en négligeant son évaporation) caractérise le *ruissellement superficiel*.

Le volume de la tranche d'eau limitée par les deux niveaux permanents du lac avant et après la précipitation est une image du *volume d'eau retenu dans le bassin versant*. On voit immédiatement que ce volume varie selon le niveau du lac en fonction de son profil, ce qui donne une image de la non-linéarité du phénomène. La constante de temps T_q est le temps théorique de remplissage de cette tranche, dans l'hypothèse que le débit à la sortie du lac est nul.

III. — Détermination expérimentale de l'hydrogramme indiciel.

L'annexe II indique le détail du mode de calcul qui, à partir de l'enregistrement simultané des variations de débit et de l'apport pluviométrique, permet d'analyser la relation dynamique qui existe entre ces deux grandeurs et de calculer l'hydrogramme indiciel qui caractérise cette relation. Cette méthode consiste à déterminer les suites données par les valeurs moyennes des variables considérées pendant les différents intervalles de temps, puis à effectuer le *quotient composé* de la suite du débit (effet) par la suite de l'apport pluviométrique (cause), puis le *produit* composé du résultat ainsi obtenu par la suite unitaire définie par une variation selon un échelon rectangulaire.

Ainsi que le représente en principe la figure 2, cette méthode permet ainsi, par une simple

FIG. 2. — Principe de la détermination de l'hydrogramme indiciel au moyen du calcul à l'aide de suites.

(Mêmes notations qu'à la figure 1.)

Courbe 1 : variation de débit résultant de l'apport pluviométrique caractérisé par la courbe 2.

Courbe 3 : hydrogramme indiciel résultant de l'apport pluviométrique ayant la forme d'un échelon rectangulaire et caractérisé par la courbe 4.

règle de trois, de ramener la variation de débit représentée par la courbe 1 et résultant d'une précipitation d'allure quelconque représentée par la courbe 2, à la variation de débit théorique représentée par la courbe 3 (hydrogramme indiciel) résultant d'une précipitation représentée par la courbe 4 de la même figure (échelon rectangulaire).

Sous sa forme simple indiquée dans l'annexe II, le principe même du calcul à l'aide de suites suppose que le phénomène considéré est linéaire. Toutefois, ainsi que nous le verrons dans la deuxième partie de cet article, les réponses indicielles que l'on peut déduire de différentes crues ne sont pas les mêmes et varient beaucoup en fonction de l'intensité maximum de la précipitation. Cette méthode permet ainsi d'analyser les non-linéarités du phénomène, en particulier les variations du déficit de ruissellement et du volume d'eau retenu dans le bassin versant en fonction de l'intensité des précipitations.

IV. — Détermination de l'influence sur les crues de la durée des précipitations.

L'annexe II indique également comment, dès que l'hydrogramme indiciel est connu, la variation du débit peut être calculée pour une variation quelconque des précipitations; ce calcul s'effectue par le « produit composé » de la suite qui caractérise les précipitations par la suite de la dérivée de l'hydrogramme indiciel. Si le bassin versant comprend plusieurs bassins partiels et si l'on connaît l'hydrogramme indiciel de chacun d'eux, il faut superposer les variations de débit provenant de chacun d'eux.

Lorsque l'unité de temps choisie pour le calcul à l'aide de suites est égale à la durée de l'averse unitaire, cette méthode de calcul rejoint la méthode de « l'hydrogramme unitaire »; cependant, une meilleure approximation est obtenue en choisissant une unité de temps aussi faible que possible, aux dépens toutefois de l'ampleur des calculs.

Dans de nombreux cas, on cherchera à prédéterminer l'amplitude maximum de la crue. Cette amplitude maximum dépend de multiples facteurs : intensité des précipitations, nature et degré de saturation du terrain, surface et forme du bassin versant, durée des précipitations, etc.

La méthode de calcul à l'aide de suites permet d'analyser en particulier l'influence de ce dernier facteur.

Les courbes 1 et 2 de la figure 3 représentent l'allure de précipitations schématisées selon une forme triangulaire; cette allure serait également celle de la variation des débits si le temps caractéristique du bassin versant était nul. Les cour-

FIG. 3. — Variation théorique de débit résultant d'une averse de forme triangulaire.

T_p = durée de la précipitation.

p_m = intensité maximum de la précipitation.

t/T_q = temps mesuré en prenant le T_q comme unité.

T_p/T_q = durée des précipitations mesurée en prenant le T_q comme unité.

Courbes 1 et 2 : Allure des précipitations p/p_m exprimée en valeur relative et schématisée par une forme triangulaire.

Courbes 3 et 4 : Variation relative de débit $q/k_e p_m$ résultant des précipitations schématisées par les courbes 1 et 2.

bes 2 et 3 de la même figure représentent la variation du débit résultant de ces précipitations. Cette variation est déterminée au moyen du calcul à l'aide de suites dans l'hypothèse que l'hydrogramme indiciel est une courbe exponentielle

FIG. 4. — Détermination du coefficient d'amortissement k_a en fonction de la durée des précipitations.

Courbe 1 : Valeur de k_a obtenue en admettant une précipitation de forme rectangulaire.

Courbe 2 : Valeur de k_a obtenue en admettant une précipitation de forme triangulaire.

caractérisée par la constante de temps T_q . On voit que la valeur maximum de la crue est d'autant plus réduite que l'averse est courte par suite de l'influence du volume de retenue du bassin.

En fait, on peut considérer que l'allure des précipitations se situe entre deux schématisations extrêmes : forme triangulaire ou forme rectangulaire (précipitation s'établissant brusquement, restant constante et cessant brusquement).

Les courbes 1 et 2 de la figure 4 représentent, en fonction de la durée des précipitations, le coefficient d'amortissement qui caractérise l'amplitude maximum de la valeur relative de l'amplitude maximum de la crue, en fonction de la durée T_p des précipitations. On voit que pour une durée d'averse égale environ au temps caractéristique du bassin (soit 6 à 8 heures dans notre exemple), l'amplitude de la crue est environ la

moitié de celle qui s'établirait si la précipitation s'établissait en permanence.

L'amplitude maximum de la crue $q_{\max}$ résultant d'une précipitation avec une intensité maximum $p_{\max}$ peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$q_{\max} = p_{\max} k_e k_a$$

- Le coefficient de ruissellement k_e caractérise les propriétés statiques du processus, c'est-à-dire le déficit d'écoulement en régime permanent et dépend avant tout de la capacité d'évaporation du bassin;
- Le coefficient d'amortissement k_a caractérise les propriétés dynamiques du processus et dépend de la capacité de retenue du bassin, ainsi que de la durée des averses.

DEUXIÈME PARTIE

EXEMPLE D'APPLICATION DE L'ÉTUDE DES CRUES AU MOYEN DU CALCUL A L'AIDE DE SUITES

I. — Description du bassin versant du Krummbach supérieur.

La figure 5 donne la disposition géographique du bassin versant pris en considération, situé en Suisse immédiatement au sud du col du Simplon. Ce bassin est drainé par le Krummbach et est caractérisé par les données générales suivantes :

Surface.....	19,3 km ²
Altitude maximum.....	3.267,6 m
Altitude de la station limnimétrique	1.770 m
Hauteur moyenne.....	2.290 m
Proportion de la surface glaciaire..	4,6 %

La figure 6 donne une vue du Krummbach et de la station limnigraphique de Klusmatten où son débit est enregistré.

II. — Mode d'enregistrement des débits et des apports pluviométriques.

Le débit du Krummbach est mesuré depuis l'année 1952 par une station limnimétrique du Service Fédéral des Eaux au lieu dit Klusmatten. Cet enregistrement peut s'effectuer avec deux vitesses différentes :

- Enregistrement lent : 1 cm/jour
- Enregistrement rapide : 4 cm/jour

La figure 7 reproduit à titre d'exemple l'enregistrement limnimétrique obtenu pendant la période du 22 au 25 septembre 1953.

La période d'enregistrement dont les résultats sont connus de 1952 à 1955 est beaucoup trop courte pour que l'on puisse en déduire des données statistiques ayant une portée générale; on peut toutefois en extraire les quelques résultats suivants :

	m ³ /s	l/s km ²
Moyenne du débit moyen annuel	0,74	38,3
Crue maximum constatée (octobre 1953)	11	568
Moyenne mensuelle de septembre 1953	0,49	25,4
Moyenne mensuelle d'octobre 1953	1,55	80,3

Les précipitations ont été enregistrées au moyen d'un pluviomètre qui, pour des raisons de commodité de service, a été installé également à Klusmatten. Pour l'étude qui nous occupe, il aurait été plus correct de l'installer au milieu du bassin versant pour obtenir une image plus fidèle des précipitations moyennes qui se déroulent sur ce bassin. Cependant, la surface de ce bassin est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger en première approximation l'erreur ainsi introduite; tout au plus peut-on remarquer que, les précipitations venant en majorité du versant sud, à savoir du même côté que la station limnimétrique, la courbe mesurée des précipitations est légèrement décalée en avant

FIG. 5. — Disposition géographique du bassin versant supérieur du Krummbach (massif du Simplon, Suisse).

par rapport à la courbe des précipitations moyennes du bassin.

La figure 9 reproduit à titre d'exemple l'enregistrement pluviométrique obtenu pendant la même période du 22 au 25 septembre; on peut y reconnaître les pluies qui ont provoqué les crues visibles sur la figure 8. L'enregistrement pluviométrique donne la courbe cumulée des apports pluviométriques. Ces apports sont donc donnés par la dérivée de cette courbe; cette dérivée se détermine de la façon la plus commode en mesurant sur le diagramme la tangente de la courbe cumulée.

III. — Détermination des hydrogrammes indicels correspondant aux différentes crues enregistrées.

La figure 9 représente les courbes des apports pluviométriques du débit du Krummbach et de la variation du débit provenant de la précipitation pour les crues du 22 et du 25-9-53. Le détail du calcul de l'hydrogramme indicel est donné dans l'annexe II. Les hydrogrammes indicels calculés pour le même apport pluviométrique de référence, égal à $10 \text{ m}^3/\text{s}$ pour 4 crues

FIG. 6. — Vue du Krummbach et de la station limnimétrique de Klusmatten (massif du Simplon, Valais, Suisse).

FIG. 7. — Echantillon d'un enregistrement limnigraphique du Krummbach-Klusmatten (massif du Simplon, Valais, Suisse) pendant la période du 22 au 26 septembre 1953.

FIG. 9 a. — Crue du 22-9-53.

FIG. 9 b. — Crue du 25-9-53.

FIG. 9. — Courbes des apports pluviométriques et du débit du Krummbach à Klusmatten.

Courbe 1 : Apport pluviométrique p .

Courbe 1' : Apport pluviométrique schématisé.

Courbe 2 : Débit à l'exutoire.

Courbe 2' : Débit à l'exutoire schématisé.

Courbe 3 : Variation de débit q provenant de l'apport pluviométrique.

FIG. 10. — Hydrogrammes indiciels déterminés pour différentes crues du Krummbach à Klusmatten en admettant une précipitation correspondant à un débit théorique de $10 \text{ m}^3/\text{s}$.

Courbe 1 : Crue du 21-9-53.

Courbe 2 : Crue du 25-9-53.

Courbe 2' : Crue du 25-9-53 (hydrogramme indiciel établi d'après la courbe 1 de la figures 9 b).

Courbe 3 : Crue du 24-9-53.

Courbe 4 : Crue du 28-9-53.

FIG. 11. — Coefficient de ruissellement k_e (exprimé en %) du bassin versant du Krummbach en fonction des débits maximum q_{max} mesurés à Klusmatten.

CONCLUSION

La méthode de calcul à l'aide de suites est indiquée chaque fois que l'on se propose d'analyser une relation dynamique de cause à effet entre deux grandeurs. Il est souvent difficile de donner une expression analytique à cette expression; le calcul à l'aide de suites permet de ramener les variations de l'effet à un commun dénominateur des variations de la cause et dégage ainsi, à partir de données expérimentales, la relation dynamique cherchée. Cette méthode est appropriée en particulier pour étudier la répercussion des apports pluviométriques sur le débit des cours d'eau. Elle permet de déterminer les paramètres hydrographiques du bassin versant considéré (coefficient de ruissellement et temps caractéristique) ainsi que l'influence de l'allure des précipitations et en particulier de leur durée sur le débit maximum de crue.

Cette méthode permet également de prévoir pour le bassin versant pris en considération l'allure des variations de débit qui résulte d'une précipitation donnée. Une telle prévision présente un grand intérêt pratique tant pour la

construction que pour l'exploitation d'aménagements hydro-électriques au fil de l'eau, car elle donne d'utiles indications d'une part pour le dimensionnement à prévoir pour les ouvrages et d'autre part pour l'établissement de programmes de production qui évitent au maximum tout déversement.

L'application de cette méthode a été illustrée par l'exemple de l'étude des crues dans le bassin du Krummbach supérieur; cet exemple montre que le coefficient de ruissellement est très variable selon l'intensité des précipitations; il donne dans ce cas particulier la courbe qui caractérise ce coefficient en fonction de cette intensité.

Les opérations auxquelles conduit cette méthode de calcul sont assez longues si elles doivent être effectuées à la main. Par contre, elles se laissent très commodément effectuer au moyen de calculateurs arithmétiques. La méthode de calcul à l'aide de suites est particulièrement bien adaptée à l'utilisation de ces calculateurs qui sont en passe de révolutionner le travail de l'ingénieur.

ANNEXE I

Calcul théorique de l'hydrogramme indiciel

D'une façon très générale et en première approximation, la relation entre les précipitations qui tombent sur un certain bassin versant et le débit du cours d'eau qui récolte les eaux est caractérisée par l'équation différentielle suivante (7) :

$$q = p k_e - \frac{dv}{dt}$$

avec :

p = apport pluviométrique,
 k_e = coefficient de ruissellement caractérisant le déficit d'écoulement,
 q = variation du débit du cours d'eau provenant de l'apport pluviométrique,
 v = volume d'eau retenu dans le bassin versant.

Cette équation signifie que le débit q est donné par la différence entre l'apport pluviométrique multiplié par un coefficient caractérisant le déficit d'écoulement et l'augmentation de l'eau retenue dans le bassin versant.

Pour effectuer le calcul en valeur sans dimensions, nous introduisons le débit de référence q_r résultant en régime permanent de l'apport pluviométrique de référence p_r :

$$q_r = k_{er} p_r$$

L'équation différentielle prend la forme suivante :

$$\frac{k_e}{k_{er}} \frac{p}{p_r} = \frac{q}{q_r} + \frac{1}{q_r} \frac{dv}{dt}$$

On peut admettre qu'il existe une relation entre le volume d'eau dans le bassin versant et la section mouillée s de l'exutoire d'une part, ainsi qu'entre cette section mouillée et le débit qui passe par cet exutoire d'autre part; ces relations sont représentées en principe par les figures 12 a et 12 b dont nous tirons les relations suivantes :

$$\left. d \frac{s}{s_r} \right|_{s=s_0} = \left. \frac{\partial (s/s_r)}{\partial (v/v_r)} \right|_{s=s_0} d \frac{v}{v_r} = k_{vs} d \frac{v}{v_r}$$

$$\left. d \frac{q}{q_r} \right|_{q=q_0} = \left. \frac{\partial (q/q_r)}{\partial (s/s_r)} \right|_{q=q_0} d \frac{s}{s_r} = k_{sq} d \frac{s}{s_r}$$

avec s_0 , v_0 , q_0 : valeurs initiales de s , v et q avant le début de la précipitation.

FIG. 12 a. — Relation entre le volume d'eau retenu dans le bassin versant et la section mouillée de l'exutoire.

FIG. 12 b. — Relation entre la section mouillée de l'exutoire et le débit de cet exutoire.

FIG. 12. — Relation entre le volume d'eau retenu dans le bassin versant, la section mouillée de l'exutoire et le débit de cet exutoire.

s = section mouillée de l'exutoire.

v = volume d'eau retenu dans le bassin versant.

q = débit qui s'écoule par l'exutoire.

s_r, v_r, q_r = valeurs de référence de s , v et q .

s_0, v_0, q_0 = valeurs du régime initial de s , v et q .

$\operatorname{tg} \alpha$ = variation relative de la section mouillée de l'exutoire en fonction du volume d'eau retenu dans le bassin versant, aux environs du point de régime.

$\operatorname{tg} \beta$ = variation relative du débit s'écoulant par l'exutoire en fonction de la section mouillée de cet exutoire, aux environs du point de régime.

$$\operatorname{tg} \alpha = \left. \frac{\partial (s/s_r)}{\partial (v/v_r)} \right|_{s=s_0} = \text{variation relative de la section mouillée en fonction du volume d'eau retenu, aux environs du point de régime;}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \left. \frac{\partial (q/q_r)}{\partial (s/s_r)} \right|_{q=q_0} = \text{variation relative du débit en fonction de la section mouillée, aux environs du point de régime.}$$

Nous tenons compte de ces relations et obtenons :

$$\frac{dv}{q_r} = \frac{dv}{v_r} \frac{v_r}{q_r} = \frac{1}{k_{vs} k_{sq}} \frac{v_r}{q_r} d \frac{q}{q_r} = T_q \frac{dq}{q_r}$$

$$\text{avec } T_q = \frac{1}{k_{vs} k_{sq}} \frac{v_r}{q_r}$$

= temps caractéristique du bassin versant.

L'équation différentielle devient :

$$\frac{k_e}{k_{er}} \frac{p}{p_r} = \frac{q}{q_r} + T_q \frac{dq}{q_r}$$

Il est facile de la résoudre dans le cas où la précipitation s'établit brusquement et reste ensuite constante; on obtient, en introduisant à nouveau les valeurs absolues, une courbe exponentielle :

$$q = p k_e (1 - e^{-t/T_q})$$

Une autre méthode de calcul a été proposée (10) pour la détermination de l'hydrogramme indiciel, méthode basée sur l'hypothèse d'un « tapis d'eau » glissant le long du bassin versant. Tout en conduisant à des expressions analytiques différentes, l'hydrogramme indiciel calculé par cette méthode a la même allure que celui obtenu par la méthode précédemment décrite; toutefois, cette nouvelle méthode, qui met en évidence la forme du bassin versant, explique la courbure de la variation du débit que nous avons constatée au début de la crue.

D'autres méthodes peuvent être encore développées pour le calcul à priori d'un hydrogramme indiciel à partir d'hypothèses simplificatrices plus ou moins justifiées; chacune de ces méthodes éclaire et explique un aspect particulier du phénomène considéré. La méthode déductive que nous avons décrite et qui prend comme point de départ des données expérimentales dont elle dégage des lois générales, ne s'oppose pas à ces méthodes à priori, mais leur est au contraire complémentaire, en permettant de contrôler la justification des hypothèses simplificatrices admises à la base des calculs et de déterminer la valeur numérique des paramètres qu'elle fait intervenir.

ANNEXE II

**Principe de la détermination de l'hydrogramme indiciel
au moyen de calcul à l'aide de suites**

On sait que lorsque deux grandeurs sont liées par une relation de cause à effet, que le phénomène est linéaire et que l'on a enregistré simultanément une variation de la cause et la variation de l'effet qui en est résultée, cette relation peut être caractérisée par la résolution de l'équation intégrale de Volterra.

Soit $p(t)$ une variation de la cause (apport pluviométrique) et $q(t)$ la variation de l'effet (variation de débit). La dérivée de la réponse indicielle $H(t)$ peut être en principe déduite de l'équation de Volterra suivante :

$$q(t) = \int_0^t H'(t-\tau) p(\tau) d\tau$$

Lorsque cette réponse indicielle $H(t)$ est connue, la variation de l'effet $q^*(t)$ résultant d'une variation quelconque de la cause $p^*(t)$ est donnée par l'intégrale de Duhamel :

$$q^*(t) = \int_0^t H'(t-\tau) p^*(\tau) d\tau$$

La résolution analytique de l'équation intégrale de Volterra et de l'intégrale de Duhamel se heurte à de grandes difficultés lorsque les fonc-

tions en question n'ont pas une expression analytique simple; une approximation de cette résolution peut être obtenue au moyen du calcul à l'aide de suites. Sans entrer dans le détail de cette méthode de calcul qui a déjà fait l'objet de publications (6, 11, 12), nous rappelons qu'à l'équation intégrale de Volterra correspond le « quotient composé » et qu'à l'intégrale de Duhamel correspond le « produit composé » des suites qui caractérisent les fonctions prises en considération :

Soit :

$$S(p) = [p_1; p_2; \dots; p_n; \dots]$$

la suite caractérisant $p(t)$
et :

$$S(q) = [q_1; q_2; \dots; q_n; \dots]$$

la suite caractérisant $q(t)$.

$p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots$ sont les valeurs moyennes des fonctions $p(t)$ et $q(t)$ pendant le 1^{er}, le 2^e, ... intervalle de temps (par exemple moyenne horaire).

Le produit composé est désigné symboliquement par une étoile (*) et s'effectue selon le schéma suivant :

$$\begin{array}{cccc} S(p) = & [p_1; & p_2; & p_3; \dots] \\ S(q) = & [q_1; & q_2; & q_3; \dots] \\ \hline & q_1 p_1 & q_1 p_2 & q_1 p_3 \dots \\ & & q_2 p_1 & q_2 p_2 \dots \\ & & & q_3 p_1 \dots \\ S(p)*S(q) = & [q_1 p_1; & q_1 p_2 + q_2 p_1; & q_1 p_3 + q_2 p_2 + q_3 p_1; \dots] \end{array}$$

Le quotient composé est désigné symboliquement par deux étoiles (**) ou par une double

barre de fraction et s'effectue selon le schéma suivant :

$$\begin{array}{c} S(q) = [q_1; \quad q_2; \quad q_3; \quad \dots] \\ \begin{array}{cccc} q_1 & q_1 \frac{p_2}{p_1} & q_1 \frac{p_3}{p_1} & \dots \\ \hline 0 & q_2 - q_1 \frac{p_2}{p_1} & q_3 - q_1 \frac{p_3}{p_1} & \\ \hline & q_2 - q_1 \frac{p_2}{p_1} & \frac{p_2}{p_1} \left(q_2 - q_1 \frac{p_2}{p_1} \right) & \\ \hline 0 & & \dots & \dots \end{array} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{c} S(p) = [p_1; p_2; \dots] \\ S(q)**S(p) = \left[\frac{q_1}{p_1} \quad \frac{1}{p_1} \left(q_2 - q_1 \frac{p_2}{p_1} \right) \right] \end{array} \right.$$

EXEMPLE NUMÉRIQUE

Nous prenons en considération la crue qui a eu lieu au début de la journée du 22-9-53. Les courbes des apports pluviométriques et des débits sont donnés par la figure 9 a et sont caractérisées par les suites $S(p)$ et $S(q)$ en prenant 1 heure comme unité de temps.

$$S(p) = [10; 12; 6,1; 2,6; 0,7] \text{ (m}^3/\text{s)}$$

$$S(q) = [0,017; 0,064; 0,106; 0,111; 0,092; 0,071; 0,052; 0,035; 0,021; 0,011; 0,005; 0,002] \text{ (m}^3/\text{s)}$$

La suite $S(h)$ qui caractérise l'hydrogramme indiciel ramené à un apport pluviométrique de

10 m³/s est donnée par l'expression suivante :

$$S(h) = \frac{S(q) * 10 [1; 1; \dots; 1; \dots]}{S(p)}$$

Il est facile de prouver que le produit composé avec la suite unitaire $[1; 1; \dots; 1; \dots]$ équivaut au quotient composé avec la suite $[1; -1]$, ce qui raccourcit les opérations; on obtient ainsi :

$$S(h) = 10 \frac{S(q)}{S(p) * [1; -1]}$$

$$S(p) * [1; -1] = [10; 12; 6,1; 2,6; 0,7] * [1; -1] = 10; 2; -5,9; -3,5; -1,9; -0,7]$$

10 S(q) =	1,7;	6,4;	10,6;	11,1;	9,2;	7,1;	5,2;	3,5
	0	0,34	1,003	0,595	0,323	0,119		
	0	6,06	11,6003	11,625	9,523	7,219	5,2	
		6,06	1,212	3,575	2,121	1,151	0,424	
	0	10,391	15,270	11,644	8,370	5,624		
		10,391	...	...	...	...		
	0	...	...	...	...	...		

$$[10; 2; -5,9; -3,5; -1,9; -0,7]$$

$$S(h) = 0,17; 0,606; 1,039; 1,31; \dots$$

L'hydrogramme indiciel caractérisé par la suite $S(h)$, ainsi obtenu, est représenté par la courbe 1 de la figure 10; c'est de la même façon que les autres hydrogrammes de cette même figure ont été calculés.

Si le phénomène considéré n'est pas strictement linéaire, les non-linéarités se traduisent dans une instabilité de la suite qui résulte du quotient composé, ainsi que la courbe 2 de la figure 10 en donne l'exemple. Les causes de non-linéarité résident avant tout dans une inhomogénéité du régime des précipitations, auxquelles peuvent s'ajouter l'influence de précipitations

précédentes, fonte de neige accélérée par les précipitations, variation des températures, etc. Ces non-linéarités se traduisent en général par des irrégularités dans les courbes enregistrées. L'effet de ces non-linéarités doit être éliminé par une schématisation adéquate de ces courbes, de façon à en extraire la « relation principale » de cause à effet que l'on cherche à dégager dépouillée des éléments parasites qui peuvent partiellement la voiler. Cette schématisation ne peut se faire de façon arbitraire, mais nécessite une certaine expérience que l'on acquiert dès que l'on a effectué un certain nombre de fois l'opération du quotient composé.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) « Météorologie et hydrologie. Etude générale des variations de débit en fonction des facteurs qui les conditionnent. »
A. COUTAGNE. *La Houille Blanche*, 1948, n° 3, 1948, n° 5, 1949, n° 2, 1950, n° 1.
- (2) « Périodicité et prévision. »
A. COUTAGNE. *La Houille Blanche*, 1951, n° 4.
- (3) « Des covariations fluviales. »
A. COUTAGNE. *La Houille Blanche*, 1951, n° A.
- (4) « Initiation mathématique à l'hydrologie fluviale. »
A. COUTAGNE. *La Houille Blanche*, 1952, n° 2.
- (5) « Quelques considérations sur le pouvoir évaporant de l'atmosphère, le déficit d'écoulement effectif et le déficit d'écoulement maximum. »
A. COUTAGNE. *La Houille Blanche*, 1954, n° 3.
- (6) « Méthode de calcul à l'aide de suites. »
M. CUENOD. Editions Feissly, Lausanne, 1955.
- (7) « Prévision à court délai, aux fins hydro-électriques, des variations des débits des cours d'eau. »
D. TONINI. *UNIPEDÉ, Congrès de Rome 1952*, N° III.16.
- (8) « Streamflow from Rainfall by Unit-Graph Method. »
L. K. SHERMANN. *Eng. News Record*, vol. 108, 1932.
- (9) « Le calcul des crues par les hydrogrammes unitaires. Résultats obtenus sur le terrain expérimental de l'Alrance. »
P. CAPPUS. *La Houille Blanche*, mars-avril 1953, n° A.
- (10) « Beitrag zur Theorie der Hochwasser. »
E. WALSER. *Cours d'eau et Energie*, 1954, n° 12.
- (11) « A method of analysing the behaviour of linear systems in time series. »
A. TUSTIN. *The Journal of the Institution of Electr. Eng.*, 1947, vol. 94, n° 1, part II A.
- (12) « Etude de phénomènes transitoires à l'aide de suites de temps. »
M. CUENOD. *Bull. Techn. de la Suisse Romande*, 1949, n° 16.