NOTULES HYDRAULIQUES HYDRAULIC BRIEFS

Détermination du point de déferlement pour une onde progressive en profondeur décroissante

Designation of the breaker-point for a progressive wave on decreasing depth

C. DYRBYE

L'étude porte exclusivement sur une onde progressive plane et fait appel à la théorie classique du 2^e ordre, en considérant comme négligeables les effets de la loi de décroissance de la profondeur et ceux des réflexions (plages plates). La condition de déferlement est déduite de l'étude de la composante horizontale du mouvement des particules puis mise sous forme d'abaques. Les résultats théoriques sont en bon accord avec les résultats obtenus en laboratoire et dans la nature.

The investigation is confined to plane progressive waves and makes use of 2nd order classical theory; the effects of the law of decrease in depth and of reflection (flat beaches) are neglected. The conditions for breaking are derived by considering the horizontal motion of particles, and are then presented in graphical form. The theoretical results obtained are in good agreement with observations in the laboratory and in nature.

HOMMAGE. — *L'auteur tient à remercier le Professeur BIESEL, du Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique SOGREAH, à Grenoble, qui a bien voulu lire la théorie ci-après et qui l'a jugée digne d'être publiée. Il tient aussi à remercier le Professeur Dr. PER BRUUN, de l'Université de Floride, qui lui a suggéré cette présentation.*

ACKNOWLEDGEMENT. — *The author wants to thank Professor F. BIESEL at Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique, SOGREAH, Grenoble, who has been kind enough to read the theory here published, and who has found it worth to be published. I also want to thank professor, Dr. PER BRUUN, University of Florida, who has also requested me to publish the theory.*

1. — Expression mathématique du phénomène

Nous considérerons seulement ici une onde progressive plane. L'expression mathématique est faite en coordonnées de Lagrange : les coordonnées x, z d'une particule en mouvement à un instant donné sont exprimées en fonction de ses coordonnées au repos (ξ, ζ) et du temps t .

Etant donné que nous allons nous attacher au mouvement lors du déferlement, c'est-à-dire dans des conditions de profondeur relativement limitée, la théorie du premier ordre est insuffisante et nous nous proposons d'utiliser la théorie du second ordre, puisque l'utilisation des théories d'ordre supérieur entraînerait de très grandes complications de calcul.

1. — Mathematical description of the wave motion

Here is only dealt with a plane progressive wave. The mathematical description of the wave-motion is made in Lagrangian coordinates, where the coordinates (x, z) of a particle to any time during the motion are expressed as functions of its coordinates in rest (ξ, ζ) and of the time t .

As we are going to take our interest in the motion at breaking, i.e. at a relatively limited depth, the first order theory is insufficient, and it is here chosen to use the second order theory, as the use of theories of higher order, will involve a very great computational work.

Les formules du second ordre concernant l'onde progressive plane en profondeur constante sont bien connues :

$$x = \xi + \frac{H}{2} \frac{\operatorname{ch} m(d - \zeta)}{\operatorname{sh} md} \sin(kt - m\xi) - \frac{H^2}{16} m \frac{1}{\operatorname{sh}^2 md} \sin 2(kt - m\xi) + \frac{3H^2}{32} m \frac{\operatorname{ch} 2m(d - \zeta)}{\operatorname{sh}^4 md} \sin 2(kt - m\xi) \quad (1a)$$

$$z = \zeta - \frac{H}{2} \frac{\operatorname{sh} m(d - \zeta)}{\operatorname{sh} md} \cos(kt - m\xi) - \frac{H^2}{16} m \frac{\operatorname{sh} 2m(d - \zeta)}{\operatorname{sh}^2 md} \cos 2(kt - m\xi) - \frac{3H^2}{32} m \frac{\operatorname{sh} 2m(d - \zeta)}{\operatorname{sh}^4 md} \cos 2(kt - m\xi) \quad (1b)$$

Dans les formules (1), $m = 2\pi/L$ et $k = 2\pi/T$; L étant la longueur d'onde et T la période. H est l'amplitude, et d la profondeur de l'eau au repos.

Entre L , T et d , la relation :

$$\frac{L}{T} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi d}{L}} \quad (2)$$

est valable.

Bien que les formules (1) aient été établies pour une houle en profondeur constante, nous les utiliserons ici, mais, bien entendu, nous n'obtiendrons aucun renseignement concernant l'influence de la façon dont la profondeur décroît; ceci n'a cependant probablement qu'une importance secondaire.

De même les formules (1) supposent qu'il ne se produit aucune réflexion. Lorsque les plages sont plates, le coefficient de réflexion est petit, et par conséquent le fait de négliger cette réflexion s'avère, dans la plupart des cas, une erreur d'importance secondaire.

2. — Le mouvement horizontal des particules Conditions de déferlement

L'expression (1a) donne l'abscisse x d'une particule dont les coordonnées au repos sont (ξ, ζ) . De plus, l'hypothèse du mouvement régulier implique que si 1 et 2 sont deux particules voisines ayant une même valeur ζ , 1 étant avant 2 lorsque l'eau est au repos, la particule 1 se trouvera également avant la particule 2 lorsque l'eau sera soumise à une onde régulière. De la formule (1a), on peut déduire que lorsque la profondeur d devient très petite, cette condition n'est plus respectée. On peut donc formuler la règle suivante :

Le déferlement commence au point où, pour la première fois, des particules voisines situées sur un même plan horizontal se rejoignent dans la direction horizontale.

Mathématiquement, ceci s'écrit :

$$\min_{\xi, t} \frac{\partial x}{\partial \xi} = 0 \quad (3)$$

The second order formulas for a plane progressive wave on constant depth are as is well known :

In the formulas (1) are $m = 2\pi/L$ and $k = 2\pi/T$, where L is the wave-length and T is the period. H is the wave-height and d is the natural depth of the water.

Between L , T and d the relation :

is valid.

Though the formulas (1) are derived for a wave motion on constant depth, we will use them here, however we don't obtain any information of the influence of the way in which the depth is decreasing, but this may probably be of only secondary importance.

By the derivation of the formulas (1) it is also assumed that no reflection occurs. When the beaches are flat, the coefficient of reflection will be little, and therefore it may in many cases be an error of secondary importance to neglect the reflection.

2. — The horizontal motion of the particles Condition of Breaking

By the expression (1a) is designated the x -coordinate for a particle whose coordinates in the state of rest are (ξ, ζ) . Now it must be so for a regular motion, that if 1 and 2 are two consecutive particles with the same ζ -value, and 1 is before 2 when the water is at rest, then particle 1 must also be before 2 when the water is in a regular wave-motion. From formula (1a) one may find that when the depth d has been vary little, this condition is not fulfilled. One may now formulate the following theory :

The breaking will begin at that point, where it at first occurs, that consecutive particles at the same horizontal level are just beginning to pass each other in horizontal direction.

This is mathematically formulated :

3. — Etablissement d'un abaque du point de déferlement

A la base de l'établissement d'un abaque donnant le point de déferlement, nous admettrons une onde ayant, en profondeur infinie, une amplitude H_0 , une longueur d'onde L_0 et une période T ; cette onde se déplace en profondeur décroissante sans aucune influence perturbatrice telle que la réfraction, la diffraction ou le vent. La période T est donc constante. L'amplitude, la longueur d'onde et la profondeur de l'eau au point de déferlement sont notés par H_b , L_b et d_b .

En différenciant (1 a), on trouve :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 - \frac{H}{2} m \frac{\operatorname{ch} m(d - \zeta)}{\operatorname{sh} md} \cos(kt - m\xi) + \frac{H^2}{8} m^2 \frac{1}{\operatorname{sh}^2 md} \cos 2(kt - m\xi)$$

$$- \frac{3H^2}{16} m^2 \frac{\operatorname{ch} 2m(d - \zeta)}{\operatorname{sh}^4 md} \cos 2(kt - m\xi) \quad (4)$$

Il découle de la formule (4) que $\min \partial x / \partial \xi$ est atteint pour $\zeta = 0$, c'est-à-dire à la surface de l'eau et pour $\cos(kt - m\xi) = 1$, c'est-à-dire pour $kt - m\xi = 0$.

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_{(\zeta=0, kt-m\xi=0)} = 1 - \frac{\pi H}{L} \frac{1}{\operatorname{th} md} - \left(\frac{\pi H}{L} \right)^2 \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 md} + \frac{3}{4} \frac{1}{\operatorname{sh}^4 md} \right) \quad (5)$$

De (5) et (3), on tire :

$$1 - \left(\frac{\pi H_b}{L_b} \right) \frac{1}{\operatorname{th} \frac{2\pi d_b}{L_b}} - \left(\frac{\pi H_b}{L_b} \right)^2 \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{2\pi d_b}{L_b}} + \frac{3}{4} \frac{1}{\operatorname{sh}^4 \frac{2\pi d_b}{L_b}} \right) = 0 \quad (6)$$

La période T étant constante, l'équation suivante peut être obtenue à partir de l'équation (2) en faisant d'une part $d = \infty$ et d'autre part $d = d_b$:

$$\frac{L_b}{L_0} = \operatorname{th} \frac{2\pi d_b}{L_b} \quad (7)$$

On peut considérer comme acquis que l'énergie transportée pour chaque période est constante, c'est-à-dire que :

$$E_t = \frac{1}{16} \gamma L H^2 \left[1 + \frac{\frac{4\pi d}{L}}{\operatorname{sh} \frac{4\pi d}{L}} \right] = C^{\text{te}} \quad (8)$$

3. — Compilation of a diagram of the breaker point

As a basis for the compilation of a diagram for the breaker-point, we will now use, that we on infinite deep water have the wave-height H_0 , wave-length L_0 and period T , and that this wave is moving into decreasing depth without any disturbing influences like refraction, diffraction or wind-effect. Then the period T is constant. The wave-height, wave length and the depth of the water at the point of breaking are denoted H_b , L_b and d_b .

By differentiating (1 a) we get :

D'après cette équation, et en faisant $d = \infty$ et $d = d_b$, on peut écrire :

From this is derived by substituting $d = \infty$ and $d = d_b$:

$$\frac{H_b}{H_0} = \sqrt{\frac{L_0}{L_b} \frac{1}{1 + \frac{4\pi d_b/L_b}{\text{sh}(4\pi d_b/L_b)}}} \quad (9)$$

D'après (7) et (9), on obtient :

From (7) and (9) is derived :

$$\frac{H_b}{H_0} = \frac{1}{\sqrt{\text{th} \frac{2\pi d_b}{L_b} \left(1 + \frac{4\pi d_b/L_b}{\text{sh}(4\pi d_b/L_b)}\right)}} \quad (10)$$

H_0 et L_0 étant supposés connus, l'équation (6), l'équation (7) et l'équation (10) permettent de trouver (d_b/L_0) en fonction de (H_0/L_0) . Ceci est facile, en prenant $2\pi d_b/L_b$ comme paramètre.

As H_0 and L_0 are assumed to be known, we will from (6), (7) and (10) find (d_b/L_0) as a function of (H_0/L_0) . This may easily be done, as one takes $2\pi d_b/L_b$ as a parameter.

L'équation (6) donne H_b/L_b , l'équation (7) L_b/L_0 et l'équation (10) H_b/H_0 en fonction de ce paramètre.

From equation (6) is found H_b/L_b from (7) L_b/L_0 and from (10) H_b/H_0 as functions of the parameter.

Nous avons alors :

We have then :

$$\frac{d_b}{L_0} = \frac{d_b}{L_b} \cdot \frac{L_b}{L_0} \quad (11)$$

$$\frac{H_0}{L_0} = \frac{(H_b/L_b) \cdot (L_b/L_0)}{(H_b/H_0)} \quad (12)$$

Un graphique à deux échelles logarithmiques donne la relation entre d_0/L_0 et H_0/L_0 . En examinant d'une part les résultats trouvés dans la réalité par l'Office Hydrographique (Bibliographie : U.S. Hydrographic Office. Breakers and surf. Principles in forecasting), d'autre part les essais de laboratoire réalisés par M. SUQUET (bibliographie : F. SUQUET, « Etude expérimentale du déferlement de la houle », *la Houille Blanche*, mai-juin 1950, pp. 342-361), on constate qu'il y a un excellent accord entre les résultats et la théorie publiée ici.

The connexion between d_0/L_0 and H_0/L_0 is shown in a double logarithmic diagram. Comparison with partly empirical data found by Hydrographic Office (Litt. U.S. Hydrographic Office. - Breakers and surf. Principles of forecasting.), partly with laboratory tests made by M. SUQUET (Litt. F. SUQUET, "Etude expérimentale du déferlement de la houle", *la Houille Blanche*, Mai-Juin 1950, pp. 342-361) shows, that there is an excellent good agreement between the results mentioned and the theory here published.

4. — Intérêt de la théorie

Le bon accord entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux semble montrer que notre théorie, et en particulier la condition (3), sont valables. Par contre, on peut se demander si la suite du calcul, basé seulement sur la théorie du second ordre, est suffisamment exacte. Des solutions plus précises pourraient à l'avenir être obtenues par une intégration numérique des équations différentielles de la houle grâce à l'usage de machines à calculer électroniques.

On peut penser aussi qu'il sera possible de prendre en compte des effets secondaires telle que la pente du fond, le frottement sur le fond, le vent et des réflexions partielles.

4. — Judgement of the theory

The good agreement between the theoretical results and the empirical data seems to indicate, that the theory here published especially the condition (3) may be true. On the other hand it may be questionably, if the further derivation, which is only based upon the second order theory is sufficiently accurate. More exact solutions may in the future be obtained by numerical integration of the differential-equations of the wave-motion by using electronic calculating machines.

It may then be assumed too, that it will be possible to take into account such secondary effects as bottom-slope, bottom-friction, wind-effect and partial reflection.

Claës DYRBYE.

Claës DYRBYE.