COMMENTAIRES ET DISCUSSIONS
COMMENTS AND DISCUSSIONS

Expériences sur la limite de validité de la loi de Darcy et l'apparition de la turbulence dans un écoulement de filtration

Experiments on the range of validity of Darcy's law and the appearance of turbulence in a filtering flow

G. SCHNEEBELI

Nous avons reçu de M. le Professeur S. IRMAY, Chef de la Division d'Hydraulique à l'Institut Technologique d'Israël, une intéressante communication que nous reproduisons ci-après, et qui commente un article de M. SCHNEEBELI publié précédemment.
Suivant l'usage et à la demande du Professeur IRMAY, nous avons communiqué ce commentaire à M. SCHNEEBELI, qui nous a fait parvenir ses remarques; nos lecteurs en trouveront les éléments à la suite des textes anglais et français de ce commentaire.

1. — Je me réfère à l'intéressant article de M. SCHNEEBELI : « Expériences sur la limite de validité de la loi de Darcy et l'apparition de la turbulence dans un écoulement de filtration », paru cette année (1955) dans le n° 2 de *la Houille Blanche.*

2. — Le passage brutal de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent, qui est si caractéristique de l'écoulement bi-dimensionnel dans les tubes circulaires ou rectangulaires, n'a pas encore été entièrement expliqué. Il paraît être dû à l'instabilité de la solution des équations de NAVIER-STOKES pour les nombres de Reynolds $\mathcal{R}$ les plus grands (SCHLICHTING, 1951), bien que la validité de ces équations ait été contestée (BIRKHOFF, 1950). Dans le domaine des écoulements à trois dimensions, par exemple dans l'étude de la traînée d'une sphère, le $\mathcal{R}$ critique n'a pas d'équivalent. Il n'y a pas de raison, par conséquent, pour s'attendre à un tel régime critique de transition pour un milieu poreux, qui, dans le cas le plus simple, se compose d'un grand nombre de sphères.

We have received an interesting contribution from Professor S. IRMAY, Chief of the Hydraulic Division of the Israel Technological Institute, commenting upon a previously published article by Mr. SCHNEEBELI.

In accordance with usual practice and at Professor IRMAY's request we have submitted these comments to Mr. SCHNEEBELI, who has sent us his remarks upon them. Readers will find the main points of these remarks at the end of the French and English texts of the comments.

1. — I refer to the interesting paper by Mr. SCHNEEBELI : " Expériences sur la limite de validité de la loi de Darcy et l'apparition de la turbulence dans un écoulement de filtration ", which has appeared this year in No. 2 of *La Houille Blanche.*

2. — The sudden transition from laminar to turbulent flow, which is so characteristic of the two-dimensional flow in circular or rectangular pipes, hat not yet fully been explained. It seems to be due to the instability of the solution of the NAVIER-STOKES equations for higher $\mathcal{R}$ or Reynolds numbers (SCHLICHTING, 1951), though the validity of these equations has been questioned (BIRKHOFF, 1950). There is no 3-dimensional analogy to the critical $\mathcal{R}$, e.g. in the study of the drag of a sphere. There is no reason therefore to expect such a critical transition for a porous medium, which in the simplest case consists of many sphere.

3. — The STOKES formula for falling spheres gives a drag coefficient :

$$\tau / 0.5\ V^2 = C = a / \mathcal{R} \qquad a = 24 \qquad (1)$$

3. — La formule de STOKES pour le mouvement de chute de sphères donne un coefficient de traînée :

$$\tau/0{,}5\ V^2 = C = a/\mathcal{R} \qquad a = 24 \qquad (1)$$

Cette formule est obtenue à partir des équations de NAVIER-STOKES en négligeant les termes d'inertie ($\mathcal{R}$ est très petit, par exemple $\mathcal{R} < 1$). Ultérieurement, OSEEN (1910) et GOLDSTEIN (1929) obtinrent une meilleure approximation, celle d'OSEEN donnant :

$$C = a/\mathcal{R} + b \qquad a = 24 \qquad b = 4{,}5 \qquad (2)$$

et étant valable pour $\mathcal{R} < 2$ à 5.

Par ailleurs, l'approximation de STOKES (1) montre que l'effort tangentiel τ est directement proportionnel à la vitesse V :

$$\tau = AV \qquad (3)$$

tandis que l'approximation d'OSEEN (2) donne une relation non linéaire :

$$\tau = AV + BV^2 \qquad (4)$$

Par conséquent, il n'existe pas d'analogie avec la formule de POISEUILLE pour les tubes longs :

$$\tau = AV \qquad (5)$$

qui est rigoureusement vraie aussi longtemps que l'écoulement est laminaire, *quelle que soit la valeur de* $\mathcal{R}$.

Il n'y a, par conséquent, pas de raison de s'attendre, dans les milieux poreux, qui sont bien plus complexes que la sphère isolée, à ce que la relation linéaire (1), (3) ou (5) soit maintenue pour un écoulement laminaire. Il y a tout lieu de croire que, par analogie avec la sphère isolée, l'écoulement à travers des milieux poreux passe graduellement par les stades suivants :

a) Très petit $\mathcal{R}$: l'écoulement est laminaire et suit les équations (1), (3) ou (5), c'est-à-dire une loi linéaire;

b) $\mathcal{R}$ moyen : l'écoulement est laminaire et suit les équations (2) ou (4), c'est-à-dire une loi comportant un terme correctif additionnel du second degré;

c) Grand $\mathcal{R}$: l'écoulement est turbulent, le terme du second degré prédomine.

M. SCHNEEBELI est probablement le premier à avoir confirmé expérimentalement ces faits évidents en théorie.

This formula is obtained from the NAVIER-STOKES equations by neglecting the inertia terms (very small $\mathcal{R}$, e.g. $\mathcal{R} < 1$). Later on OSEEN (1910) and GOLDSTEIN (1929) obtained a better approximation, that by OSEEN being represented by :

$$C = a/\mathcal{R} + b \qquad a = 24 \qquad b = 4.5 \qquad (2)$$

and valid for $\mathcal{R} < 2$ to 5.

Now STOKES' approximation (1) shows that the shear τ is directly proportional to the velocity V :

$$\tau = AV \qquad (3)$$

whereas OSEEN's approximation (2) gives a non-linear relationship :

$$\tau = AV + BV^2 \qquad (4)$$

Hence there exists no analogy with POISEUILLE formula in long tubes :

$$\tau = AV \qquad (5)$$

which is rigorously true as long as the flow is laminar *whatever the value of* $\mathcal{R}$.

Hence there is non reason to expect in porous media, which are even more complex than the single sphere, that the linear relationship (1), (3) or (5) should hold for laminar flow. There is every reason to believe that, by analogy to the single sphere, the flow through porous media passes gradually through the following stages :

(*a*) Very low $\mathcal{R}$: the flow is laminar with equations (1), (3) or (5) valid, i.e. linear law.

(*b*) Medium $\mathcal{R}$: the flow is laminar with equations (2) or (4) valid, i.e. law with an additional quadratic term.

(*c*) High $\mathcal{R}$: the flow is turbulent, the quadratic term predominates.

Mr. SCHNEEBELI is presumably the first to have confirmed experimentally these theoretically evident facts.

4. Mr. SCHNEEBELI's experiments with glass balls ($d = 27$ mm) are the continuation of similar experiments carried out on leadshot by FANCHER et alia (1933) and mentioned by MUSKAT (1942). Their curve is given for the range $\mathcal{R} = 0.08$ to 0.3, whereas Mr. SCHNEEBELI's range is $\mathcal{R} = 0.3$ to 800.

5. The non-linear equation (4) for porous media seems to have been suggested first by FORCHHEIMER (1901). Its equivalent equation (2) seems to have been first suggested by LINDQUIST (1933).

It seems though that his linear curve :

$$C.\mathcal{R} = a + b.\mathcal{R}$$

4. — Les expériences de M. SCHNEEBELI avec des billes en verre ($d = 27$ mm) constituent le prolongement d'expériences similaires sur des billes en plomb, dues à FANCHER et à ses collaborateurs (1933) et mentionnées par MUSKAT (1942). Leurs résultats correspondent à des nombres de Reynolds compris entre 0,08 et 0,3 tandis que pour M. SCHNEEBELI, $\mathcal{R}$ varie de 0,3 à 800.

5. — L'équation non linéaire (4) pour des milieux poreux semble avoir été proposée à l'origine par FORCHHEIMER (1901). L'équation équivalente (2) semble être due à LINDQUIST (1933).

Il semble cependant que sa loi linéaire :

$$C.\mathcal{R} = a + b.\mathcal{R}$$

ait été reproduite dans plusieurs ouvrages avec une échelle verticale fausse (MUSKAT, 1937).

has been reproduced in most books with a wrong vertical scale (MUSKAT, 1937).

S. IRMAY.

BIBLIOGRAPHIE — BIBLIOGRAPHY

1. BIRKHOFF (G.) : Hydrodynamics, a study in logic, fact, and similitude. *Princeton University Press*, 1950.
2. FANCHER, LEWIS et BARNES : *Pennsylvania State College Min. Ind. Exper. Sta. Bull.* (1933).
3. FORCHHEIMER (Ph.) : *Zeit. d.V.D.I.*, 45 (1901), p. 1782.
4. GOLDSTEIN (S.) : *Proc. Roy. Soc.*, A, 123 (1929), p. 225-235.
5. — Modern developments in fluids dynamics. *Oxford Univ. Press*, 1938, vol. II, p. 492.
6. LINDQUIST (E.) : The flow of water through porous soil. *Premier Congrès des Grands Barrages*, Stockholm, 1933.
7. MUSKAT (M.) : Physical principles of oil production. *McGraw-Hill*, New-York, 1949.
8. MUSKAT (M.). : The flow of homogeneous fluids through porous media, *McGraw-Hill*, New-York, 1937.
9. OSEEN : *Ark. f. mat. astr. och fys.*, 6, n° 29 (1910).
10. SCHLICHTING (H.) : Grenzschicht-Theorie. *Braun, Karlsruhe*, 1951.

J'ai lu avec beaucoup d'intérêt les commentaires de M. le Professeur IRMAY sur mon article « Expériences sur la limite de validité de la loi de Darcy et l'apparition de la turbulence dans un écoulement de filtration ».

Je pense comme lui que le passage à l'écoulement turbulent dans un tube rectiligne est probablement dû à une instabilité de la solution des équations de Navier. Physiquement, cette instabilité provient de ce que les forces de viscosité ne sont plus suffisantes pour amortir les effets d'inertie. Le tube rectiligne présente, par rapport aux écoulements non uniformes, la particularité qu'en principe il n'est le siège d'aucune force d'inertie. Celle-ci n'entre en jeu qu'à la suite d'une perturbation accidentelle (par exemple une imperfection de la paroi) et c'est ce qui explique à mon sens qu'il soit possible de repousser très loin le nombre de Reynolds critique moyennant certaines précautions.

Intuitivement, la stabilité d'un mouvement quelconque dépend bien du rapport inertie/amortissement, c'est-à-dire du nombre de Reynolds. Si je puis me permettre une comparaison triviale, mais parlante, j'assimilerai volontiers une particule de fluide à une automobile.

Sur un parcours mouvementé, la voiture sera incapable de suivre une trajectoire régulière au-delà d'une certaine vitesse. La « tenue de route » diminuera progressivement lorsque la vitesse augmentera. Il en est exactement de même de la stabilité du régime laminaire dans un écoulement non uniforme.

Sur un parcours rectiligne, par contre, la vitesse atteinte pourra être très élevée. Le bolide peut se trouver dans un domaine de stabilité hypercritique, mais le moindre incident le projettera hors de sa trajectoire. Ceci correspond à la discontinuité accompagnant le passage en régime turbulent dans un écoulement uniforme.

En ce qui concerne la loi des pertes de charge, je voudrais signaler qu'à mon avis la forme $Cf = f(\mathcal{R}) = \varphi(1/\mathcal{R})$ est tout à fait générale et s'applique aussi bien aux résistances hydrodynamiques qu'à tous les écoulements imaginables. Les équations d'équilibre d'une particule de fluide sont en effet, dans tous les cas, de la forme :

$$M + I + F = 0$$

M, I et F représentant respectivement les projections sur un axe donné des forces motrices (pression, pesanteur), des forces d'inertie et des forces de frottement.

En divisant par I, on obtient :

$$\frac{M + I}{I} + \frac{F}{I} = 0$$

On montre facilement que le premier terme dépend du Cf et que le second correspond à $1/\mathcal{R}$. On doit donc bien trouver une relation :

$$Cf = \varphi\left(\frac{1}{\mathcal{R}}\right)$$

L'expression :

$$Cf = a\,\frac{1}{\mathcal{R}} + b;$$

correspondant à un τ de la forme $\tau = AV + BV^2$, peut être considérée comme une approximation correspondant à un développement limité aux premiers termes.

G. SCHNEEBELI.