La lecture des ondes de coup de bélier sur le tracé de Bergeron,

Reading of water hammer waves on a Bergeron diagram

PAR A. SCHLAG

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE,
DIRECTEUR DU LABORATOIRE D'HYDRAULIQUE GÉNÉRALE

Dans une conduite soumise au phénomène du coup de bélier, l'épure de Bergeron permet de déterminer les « états » pression-débit, en autant de sections de la conduite et en autant d'instants qu'on le désire. Elle permet aussi de connaître les ondes d'Allievi F et f exprimant les variations conjointes de débit et de pression depuis l'origine du phénomène.

En fait, le phénomène du coup de bélier consiste en une succession d'ondes qui parcourent la conduite, en se croisant et se réfléchissant plus ou moins complètement aux points singuliers : extrémités, changements de section, nœuds... Plutôt qu'à des ondes se superposant à l'état initial, on a affaire à des ondes, à front plus ou moins raide, qui modifient l'état existant immédiatement avant leur passage.

Il est montré que ces ondes peuvent être lues sur l'épure de Bergeron. Leur considération conduit à l'établissement d'un tableau très représentatif du phénomène; elle permet aussi le calcul, souvent aisé, de tous les états successifs dans les diverses sections de la conduite.

In a pipe subjected to the phenomenon of water hammer, the Bergeron diagram allows the determination of the pressure-flow conditions in as many sections of the pipe and at any instant desired. One can also determine the Allievi wave F and f , expressing the twin variations of flow and pressure from the time the phenomenon begins.

In fact, the phenomenon of water hammer consists of a succession of waves which traverse the pipe, passing and reflecting each other more or less entirely, between given points i.e. the ends of the pipe, changes in section, branches, etc.

Rather than waves superimposing themselves from the start, we have a system of waves, more or less steep fronted, which modify the state existing immediately ahead.

It is shown that these waves may be plotted on a Bergeron diagram. Their consideration leads to the establishment of a chart which truly represents the phenomenon and also makes the subsequent calculation of all the successive states in the various sections of the pipe easy.

La solution des problèmes de coup de bélier dans les conduites est basée sur les équations classiques d'Allievi :

$$H - H_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (1)$$

et :

$$\frac{a}{g}(c_0 - c) = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (2)$$

Dans ces équations, F et f sont deux ondes de pression qui parcourent la conduite avec des vitesses égales à $\pm a$, et $(g/a)F$ et $(g/a)f$, deux ondes de vitesse qui accompagnent ces ondes de pression.

Dans son remarquable ouvrage : *Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en*

électricité, Louis BERGERON énonce comme suit les lois exprimées par les formules d'Allievi :

« 1° En un temps et un lieu quelconques le long d'une conduite, la variation de pression depuis l'origine du phénomène est égale à la somme de deux ondes de pression F et f qui s'y croisent à cet instant;

« 2° Simultanément, la différence $F - f$ de ces deux ondes est égale à a/g fois la variation de la vitesse à ce temps et en ce lieu depuis l'origine du phénomène. »

(C'est nous qui soulignons les mots « depuis l'origine du phénomène ».)

*
**

La résolution directe des équations d'Allievi est assez souvent longue et parfois difficile.

Mais, Louis BERGERON a développé et mis au point une méthode graphique de résolution actuellement bien connue de tous les hydrauliciens.

Dans la préface à l'ouvrage de BERGERON, M. E. G. BARILLON, membre de l'Institut, écrit : « De tout ce qui se lit sur le bergeron, le lecteur du présent volume se rendra compte; il peut être assuré que dans ces voyages à travers les conduites hydrauliques ou les réseaux électriques, dans lesquels Louis BERGERON le guide pas à pas et lui montre les moindres particularités, il apprendra beaucoup, et que s'il est déjà préparé par la lecture d'ouvrages traitant la question par des méthodes purement mathématiques, il aura le plaisir de reconnaître au passage des phénomènes qui, jusqu'alors, ne lui étaient pas apparus dans toute leur clarté. »

Le but de la présente note est de montrer un de ces aspects qui, à notre connaissance tout au moins, n'a pas encore été signalé.

On sait que, pour le tracé du bergeron, on remplace, dans l'équation (2) les vitesses c par les débits Q . Les équations (1) et (2) deviennent ainsi :

$$H - H_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (4)$$

et :

$$\frac{a}{gS} (Q_0 - Q) = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (5)$$

S étant la surface de la section transversale de la conduite.

Le tracé peut donner l'« état » (pression, débit) pour toutes les sections et à tous les instants que l'on désire (*).

Comme l'a montré BERGERON (fig. 9 de son ouvrage), il permet aussi de connaître la grandeur des deux ondes de pression en un lieu et en

Fig. 1

(*) Nous adoptons les notations H et Q pour les « états » et h et q pour les pressions et débits transportés par les ondes.

un temps quelconques où le régime est connu. Si $A.t$ est le point représentatif de l'état dans la section A à l'instant t , les ondes de pression, dans cette section, et à cet instant, sont représentées sur le bergeron, par la moitié des longueurs marquées $2F$ et $2f$ (fig. 1) (**).

Remarquons qu'il s'agit bien, comme BERGERON l'indique lui-même, d'ondes ayant provoqué une variation de pression depuis l'origine du phénomène.

Les ondes correspondantes de débit sont représentées par la moitié des longueurs :

$$2 \cdot \frac{gS}{a} \cdot F \text{ et } 2 \cdot \frac{gS}{a} \cdot f$$

Bien entendu, il s'agit encore d'ondes ayant provoqué une variation de débit depuis l'origine du phénomène.

L'image du phénomène, déduite directement des équations d'Allievi, le représente donc comme dû à la superposition à l'état initial, des deux ondes F et f de pression, accompagnées des deux ondes de débit $(gS/a)F$ et $(gS/a)f$.

Nous pensons qu'une représentation plus fidèle et plus parlante consisterait à considérer que chaque état dans une section quelconque résulte de l'état immédiatement précédent dans la même section, modifié par le passage, l'arrivée ou l'émission d'une ou plusieurs ondes conjointes de pression et de débit, circulant dans chaque tronçon à caractéristique unique.

Aux ondes $[F, (gS/a)F]$ et $[f, (gS/a)f]$, superposées à l'état initial, nous proposons de substituer, pour chaque intervalle de temps, une ou plusieurs ondes se superposant à l'état At pour donner l'état immédiatement suivant At' .

L'exposé de notre conception est plus simple dans le cas d'une perturbation de caractère instantané, entraînant dans les diverses sections de la conduite des variations brusques d'état. Nous nous placerons d'abord dans cette hypothèse.

Nous aurons, par exemple, dans une section quelconque où la pression à l'origine était H_0 la succession des pressions représentée figure 2.

Fig. 2

(**) Bergeron écrit (p. 15) que « ce n'est là qu'une curiosité sans intérêt pour la résolution des problèmes qui se posent ».

Selon la conception classique, la pression H_t est égale à la pression à l'origine H_0 augmentée de la somme algébrique ($F + f$) des pressions des ondes d'Allievi.

Nous proposons de considérer que la pression H_t résulte de la pression existant à l'instant précédent H_{t-1} , augmentée de l'onde (ou de la somme de deux ondes) de pression h .

En nous reportant à la figure 1, nous voyons aisément que l'onde $[F, (gS/a) F]$ peut être représentée par le vecteur $AO.a$ et l'onde $[f, (gS/a) f]$ par le vecteur $a.At$.

Considérons maintenant deux états consécutifs dans une même section (fig. 3) At et At' .

FIG. 3

Les ondes d'Allievi (depuis le début du phénomène) sont représentées respectivement par les tracés vectoriels $AO.a.At$ et $AO.a'.At'$.

Pour passer de l'état At à l'état immédiatement suivant At' , on voit qu'on peut suivre le tracé vectoriel dessiné en trait fort $At.b.At'$.

Les vecteurs $At.b$ et $b.At'$ représentent précisément respectivement les ondes incidente et réfléchie que nous proposons de considérer. Ces vecteurs sont souvent dessinés à priori sur le bergeron.

Ces ondes seront évidemment soumises, en ce qui concerne le coefficient angulaire des vecteurs qui les représentent, à la même règle de signe que les ondes $[F, (gS/a) F]$ et $[f, (gS/a) f]$: coefficient angulaire négatif pour l'onde $[F, (gS/a) F]$ qui remonte la conduite et coefficient angulaire positif pour l'onde $[f, (gS/a) f]$ qui descend la conduite.

Ce coefficient angulaire est $\pm gS/a$. Posons, pour la facilité de l'écriture, $gS/a = \alpha$.

Nous écrirons donc :

pour une onde remontant la conduite :

$$h = -\alpha q$$

pour une onde descendant la conduite :

$$h = +\alpha q$$

Si les points At et At' s'alignaient sur une direction $+$ ou $- \alpha$, cela signifierait qu'une seule onde serait à envisager.

Pour mieux illustrer notre conception, nous avons traité le début du phénomène du coup de bélier dans le cas simple suivant :

Conduite constituée de deux tronçons AB et BC, longs respectivement de 100 et 180 m, de sections 0,1 et 0,2 m² et possédant des célérités respectives de 1.000 et 900 m/s. Si le tronçon AB est ainsi parcouru par l'onde en un temps l_1/a_1

FIG. 4

que nous prenons comme unité de temps, le tronçon BC sera parcouru en un temps égal à 2 unités.

Conditions initiales : pression $H_0 = 200$ m; débit $Q_0 = 200$ l/s.

Coup de béliet créé par la fermeture complète et instantanée de l'extrémité C. On ne tient pas compte du frottement.

Les divers états ont été relevés sur le bergeon et reportés à la figure 4 sous la forme conventionnelle H/Q (*). On constatera que, ainsi que cela est connu, en un point quelconque, ces états varient d'une façon discontinue.

Les divers états sont séparés par des droites obliques qui représentent les ondes que nous proposons d'envisager et qui circulent à *chaque instant* dans la conduite; nous avons indiqué leurs valeurs. Il ne s'agit donc pas des ondes $[F, (gS/a) F]$ et $[f, (gS/a) f]$ exprimées *depuis* l'origine du phénomène. Si nous désignons par H'/Q' et H''/Q'' deux états *consécutifs* dans une même section, ce sont ces ondes qui font passer H' à H'' et Q' à Q'' .

Par exemple, l'état de la section b , au milieu de BC, avant le temps 4, est :

$$126,59 / - 75,89;$$

au temps 4, il y arrive deux ondes :

$$- 48,05 / 104,67 \text{ et } - 126,59 / - 275,89.$$

Par conséquent, l'état du point b après 4 devient :

$$H = 126,59 - 48,05 - 126,59 = - 48,05$$

$$Q = - 75,89 + 104,67 - 275,89 = - 247,11$$

**

De cette conception physique du phénomène du coup de béliet, on peut déduire une méthode de calcul extrêmement simple et dont le mécanisme est, pensons-nous, très intuitif.

Cas général

Supposons qu'à une extrémité d'un tronçon à caractéristique unique, existe obligatoirement une loi $\varphi(Q, H, t) = 0$ reliant le débit et la pression et qu'il y arrive une onde incidente h_i/q_i . Cette onde se réfléchit totalement ou partiellement en une onde réfléchie h_r/q_r .

Pour l'onde incidente :

$$h_i = \pm \alpha q_i \quad (1)$$

et pour l'onde réfléchie :

$$h_r = \mp \alpha q_r \quad (2)$$

puisque ces deux ondes circulent en sens inverses.

L'état, qui était Q_t/H_t avant l'arrivée de l'onde i et sa réflexion, devient après :

$$Q_{t+1}/H_{t+1}.$$

L'état $(t+1)$ doit satisfaire aux équations suivantes :

$$\varphi(H_{t+1}, H_{t+1}, t+1) = 0 \quad (3)$$

$$H_{t+1} = H_t + h_i + h_r = H_t \pm \alpha(q_i - q_r) \quad (4)$$

$$Q_{t+1} = Q_t + q_i + q_r \quad (5)$$

Si H_t , Q_t , h_i et q_i sont connus, les équations (3), (4) et (5) permettent de déterminer q_r , Q_{t+1} et (2) donne ensuite h_r .

Examen de quelques cas particuliers

A) Le débit Q est constant à l'extrémité envisagée : $Q = Q_0$.

Supposons qu'il arrive une onde incidente h_i/q_i et que naisse une onde réfléchie : h_r/q_r :

$$h_i = \pm \alpha q_i \quad H_r = \mp \alpha q_r$$

Les équations (3), (4) et (5) deviennent :

$$Q_{t+1} = Q_0 \quad (3)$$

$$H_{t+1} = H_t \pm \alpha(q_i - q_r) \quad (4)$$

$$0 = q_i + q_r \quad (5)$$

La résolution donne :

$$q_r = - q_i$$

$$h_i = h_r$$

$$H_{t+1} = H_t + 2 h_i$$

B) La pression est constante à l'extrémité envisagée : $H = H_0$.

Les équations (3), (4) et (5) s'écrivent :

$$H_{t+1} = H_0 \quad (3)$$

$$0 = \alpha(q_i - q_r) \quad (4)$$

$$Q_{t+1} = Q_t + q_i + q_r \quad (5)$$

La résolution donne :

$$q_i = q_r$$

d'où :

$$h_i = - h_r$$

et :

$$Q_{t+1} = Q_t + 2 q_i$$

(*) H exprimé en mètres et Q en l/s.

C) Q passe brusquement de Q_t à Q_{t+1} .

Le problème se pose un peu différemment. On connaît H_t , Q_t et Q_{t+1} . Il n'y a pas d'onde incidente, mais il y a émission d'une onde, que nous continuerons conventionnellement à appeler « réfléchie » h_r/q_r avec $h_r = \pm \alpha q_r$.

Nous pourrions écrire :

$$Q_{t+1} = Q_t + q_r$$

et :

$$H_{t+1} = H_t + h_r = H_t \pm \alpha q_r$$

Nous en déduisons :

$$q_r = Q_{t+1} - Q_t$$

$$h_r = \pm \alpha q_r$$

$$H_{t+1} = H_t + h_r$$

D) L'extrémité du tronçon envisagée est l'origine d'un autre tronçon.

En B, arrive une onde incidente :

$$h_i/q_i \text{ avec } h_i = \pm \alpha q_i$$

Elle est partiellement réfléchie dans ce tronçon, en une onde h_r/q_r avec $h_r = \mp \alpha q_r$, et une onde h'_r/q'_r est émise dans le deuxième tronçon dans la même direction que l'onde h_i/q_i :

$$h'_r = \pm \alpha' q'_r$$

Avant l'arrivée de l'onde, il y avait mêmes pressions H_t et mêmes débits Q_t de part et d'autre de la section B. Après cette arrivée, il y a encore égalité des pressions H_{t+1} et égalité des débits Q_{t+1} .

Dans le tronçon par où arrive l'onde h_i/q_i :

$$H_{t+1} = H_t + h_i + h_r$$

$$Q_{t+1} = Q_t + q_i + q_r$$

Dans l'autre tronçon :

$$H_{t+1} = H_t + h'_r$$

$$Q_{t+1} = Q_t + q'_r$$

La résolution de ces équations donne :

$$q_r = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha + \alpha'} q_i$$

$$q'_r = \frac{2\alpha}{\alpha + \alpha'} q_i \quad (*)$$

(*) Ces formules sont analogues à celles que l'on rencontre dans la théorie du passage d'une onde lumineuse plane d'un milieu d'indice t_1 dans un autre d'indice t_2 , lorsque le plan d'onde est parallèle au plan de séparation des deux milieux. Entre les amplitudes de ces ondes, on a les relations :

$$a_2 = \frac{2\alpha}{\alpha + \alpha'} a_1 \quad a'_r = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha + \alpha'} a_1$$

avec $\alpha = c/v$: $\alpha' = c/v'$
 c : vitesse de la lumière dans le vide,
 v, v' : vitesses dans les milieux considérés.

E) Cas d'une bifurcation simple.

Dans un des tronçons de la bifurcation arrive une onde h_i/q_i . Une onde h_r/q_r est réfléchie dans ce tronçon et des ondes h'_r/q'_r et h''_r/q''_r sont émises dans les deux autres tronçons.

Compte tenu du sens de circulation des ondes dans les divers tronçons, on a :

$$h_i = \pm \alpha q_i$$

$$h_r = \mp \alpha q_r$$

$$h'_r = \pm \alpha' q'_r$$

$$h''_r = \pm \alpha'' q''_r$$

Au nœud, à chaque instant H est le même quel que soit le tronçon que l'on considère; de plus, $Q = Q' + Q''$.

Nous aurons donc à l'instant $t + 1$:

$$H_{t+1} = H_t + h_i + h_r = H_t + h'_r = H_t + h''_r$$

et :

$$\underbrace{Q_t + q_i + q_r}_{Q_{t+1}} = \underbrace{Q'_t + q'_r}_{Q'_{t+1}} + \underbrace{Q''_t + q''_r}_{Q''_{t+1}}$$

soit :

$$h_i + h_r = h'_r \quad \text{ou} \quad \alpha q_i - \alpha q_r = \alpha' q'_r$$

$$h'_r = h''_r \quad \alpha' q'_r = \alpha'' q''_r$$

$$q_i + q_r = q'_r + q''_r$$

soient trois équations qui permettent de trouver les trois inconnues :

$$q'_r = \frac{2\alpha\alpha''}{\alpha\alpha' + \alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha} q_i$$

$$q''_r = \frac{2\alpha\alpha'}{\alpha\alpha' + \alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha} q_i$$

$$q_r = \frac{\alpha\alpha' - \alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha}{\alpha\alpha' + \alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha} q_i$$

On en déduit facilement h'_r , h''_r , h_r , H_{t+1} et Q_{t+1} .

Si les temps de parcours des ondes dans les divers tronçons avaient une commune mesure, deux ou trois ondes pourraient arriver en même temps au nœud; il suffirait alors de considérer séparément chacune des ondes incidentes et de faire la somme, pour chaque tronçon, de toutes les ondes réfléchies ou émises.

F) Cas d'une manœuvre progressive.

Nous avons jusqu'ici, dans les exemples que nous avons traités, supposé que la manœuvre

génératrice du coup de bélier était instantanée.

Si elle était progressive, il faudrait la considérer comme constituée d'une succession de petites manœuvres instantanées. Il y aurait à chaque instant émission, circulation, réflexion, etc. de petites ondes, remplaçant les modifications continues réelles de pression et de débit.

Conclusion

La conception du phénomène du coup de bélier que nous avons exposée ici résulte *directement* du tracé de BERGERON. Nous pensons que tout en n'en étant pas différente en principe, elle correspond de plus près à la réalité physique que celle où l'on fait intervenir des ondes ayant provoqué des variations de pression et de débit « depuis l'origine du phénomène ».

Nous en avons déduit :

- Un tableau de représentation très intuitif du phénomène (fig. 4);
- Une méthode de calcul, souvent simple et aussi exacte qu'on le désire, des « états »

successifs d'autant de sections que l'on veut, ainsi que des « ondes » qui circulent dans la conduite ou le réseau.

Nous ne prétendons pas que cette méthode soit supérieure à celle imaginée par BERGERON. Celle-ci possède des avantages bien connus : simplicité et automatisme d'application qui permettent d'en confier l'exécution à un dessinateur soigneux, facilité également de repérer une erreur éventuelle, etc.

Nous pensons cependant que notre méthode n'est pas dépourvue d'intérêt. Elle pourrait même parfois réclamer à son tour, en sa faveur, certains avantages, par exemple, si l'on désirait considérer un amortissement de l'onde au cours de son trajet. Il suffirait alors dans le calcul de tenir compte que l'onde émise à une extrémité d'un tronçon de conduite, arrive à l'autre extrémité, affectée du coefficient d'amortissement convenable. Il ne s'agit pas, bien entendu, d'une perte de pression par frottement hydraulique, mais d'un véritable amortissement tel que celui que subissent les ondes de choc se transmettant dans les corps solides.

DISCUSSION

Président : M. REMENIERAS

M. le Président remercie M. SCHLAG et souligne l'intérêt didactique de sa nouvelle interprétation de la célèbre méthode graphique; il souhaite que les ingénieurs des bureaux d'études utilisent dans divers cas types la méthode de M. BERGERON suivant le procédé de M. SCHLAG et nous fassent connaître, à la lumière de leur expérience les avantages et inconvénients qu'elle présente en pratique par rapport aux modes d'emploi usuels.

M. le Président sait tout particulièrement gré à M. SCHLAG d'avoir adopté une suggestion faite en son temps par M. le Président BARRILLON et suivant laquelle, en hommage à son éminent inventeur, on devrait appeler l'épure qui vous occupe un « *bergeron* », tout comme en statique graphique l'on dit un « *cremona* » et non une épure de Cremona.

Devant les remarques fort intéressantes de M. SCHLAG qui l'ont conduit à un mode de calcul inédit, M. Paul BERGERON voudrait essayer de montrer sommairement les différences qui, à son avis, existent entre les moyens proposés par MM. ALLIEVI, SCHLAG et L. BERGERON pour la solution du même problème.

Considérons le cas simple d'une fermeture progressive de loi quelconque sur une conduite gravitaire. Raisonnons sur l'épure tracée par la méthode graphique qui permet de mettre en évidence chacune des trois interprétations :

1° En considérant les ondes depuis l'origine (interprétation Allievi), l'état au point A_{i+2} résulte de la superposition à l'état origine A_0 (h_0, q_0) de deux ondes qui se croisent, soit F_{i+2} qui remonte le courant, et f_{i+2} qui le descend. Chacune de ces ondes de pression est liée à une variation de débit telle que l'onde f_{i+2}

peut être représentée par le vecteur A_0M et l'onde F_{i+2} par le vecteur MA_{i+2} .

2° M. SCHLAG définit l'état en A_{i+2} comme résultant de la superposition à l'état existant non plus en A_0 , mais en A_i , de deux ondes intermédiaires, l'une représentée par le vecteur A_iB_{i+1} appelée par lui onde incidente, et l'autre représentée par le vecteur $B_i + IA_{i+2}$ appelée onde réfléchie.

Les ondes et les états qui ont précédé celui existant en A_i ne sont plus à considérer.

3° La méthode graphique, dans sa réalisation pratique, ne fait plus appel à la notion des ondes qui se croisent et peut oublier tout le passé qui a précédé, dans l'exemple choisi, l'existence de l'état en B_{i+1} .

Cet état en B_{i+1} soit $h_i + Iq_{i+1}$ constitue une onde qui se propage à la célérité « a » en restant identique à elle-même; mais si les conditions rencontrées sur le parcours imposent une modification de l'état $h_i + Iq_{i+1}$, l'application du théorème des quantités de mouvement montre que $\Delta h = \pm a/gs \Delta q$, c'est-à-dire que le nouvel état doit être obligatoirement sur la droite qui passe par B_{i+1} et de coefficient angulaire $\pm a/gs$. Dans ces conditions, à l'arrivée au point A, l'état A_{i+2} sera situé sur cette droite, et devant satisfaire d'autre part à la loi $f(q, ht) = 0$ existant en A_{i+2} au temps $i+2$, sera à l'intersection de la droite et de la courbe donnant $h = f(q)$ au temps $i+2$.

Fausse peut-être par la méthode graphique, cette conception, basée sur la simple considération de l'onde émise par l'état existant en un point et en un temps donnés, dont les conditions de variation s'appuient sur l'application élémentaire du théorème des quantités de

mouvement, apparaît beaucoup plus « intuitive » que les deux interprétations précédentes.

Ce qui prouve que la notion « d'intuition » est tout à fait relative.

A noter que, comme pour l'interprétation de M. SCHLAG, la méthode graphique détermine point après point les variations Δh et Δq et non $h - h_0$ et $q - q_0$.

L'interprétation de M. SCHLAG permet de suivre le phénomène par le calcul d'une manière beaucoup plus simple et peut-être plus parlante que par la détermination successive des ondes F_i et f_i . Il semble même qu'elle soit seule jusqu'ici à rendre utilisable le calcul à la main sans qu'on soit rebuté à l'avance.

Peut-être pourrait-elle aussi faciliter l'exécution des calculs par les machines à calculer, bien que sur ce point nous n'ayons pas d'opinion et qu'il serait intéressant de prendre l'avis, par exemple de MM. DUBIN et GUÉNEAU qui ont déjà utilisé les machines pour la résolution des problèmes relatifs à l'arrêt des pompes sur réservoirs à air. Par contre, comme le fait d'ailleurs remarquer M. SCHLAG, elle présente les inconvénients inhérents à toutes les méthodes algébriques :

Impossibilité de poursuivre les calculs lorsque les lois $f(q, h, t) = 0$ aux extrémités des tronçons ne peuvent plus être exprimées par une équation (cas relativement fréquent en hydraulique) ;

Possibilité d'erreurs toujours accrues ; et nous ajouterons dans le cas actuel, que la méthode algébrique ne permet pas l'avantage obtenu par la méthode graphique de pouvoir, avec de l'expérience évidemment, suivre l'ensemble du phénomène par la simple observation de l'épure achevée.

Contrairement à l'avis émis par M. ALLIEVI dans sa correspondance avec M. L. BERGERON, l'épure terminée constitue un véritable « bas relief » où toutes les fluctuations des états avec leurs causes et leurs conséquences se présentent simultanément au regard.

M. SCHLAG est en principe d'accord avec les observations présentées par M. BERGERON et notamment, avec la façon dont il caractérise les méthodes de résolution d'ALLIEVI, de L. BERGERON et la sienne.

Il croit cependant nécessaire de souligner que, dans

sa méthode, il n'est pas question d'observateurs circulant dans la conduite avec la vitesse a . Il n'y a alors pas lieu de marquer B le point de rencontre des vecteurs représentatifs des ondes incidente et réfléchie, car, en principe, ce point n'a rien à voir avec ce qui se passe dans une autre section que A. A l'instant $i + 2$, arrive en A une onde incidente connue (c'est l'onde réfléchie d'une autre section située en amont, et à un instant antérieur — et par là la situation à l'instant $i + 2$ est reliée au passé). Il peut donc dessiner son vecteur représentatif, qui est, sur la figure de M. P. BERGERON, marqué $A_i B_{i+1}$, mais qu'il préférerait marquer par exemple : $A_i x$. De x , il mène une droite caractéristique de coefficient angulaire négatif, qui lui donne A_{i+2} à son intersection avec la courbe d'extrémité à l'instant $i + 2$. Cette construction n'est que la résolution graphique du système d'équations qu'il a écrites au paragraphe « Cas général » et où n'interviennent comme données, que l'état A_i et l'onde arrivant en A au temps $i + 2$ et, comme inconnues, l'état A_{i+2} et l'onde réfléchie en A au temps $i + 2$ — donc rien que des éléments relatifs à la section A.

Le point qu'il marque x n'est donc en rien représentatif de l'état dans une section quelconque à un instant quelconque ; c'est uniquement un point de construction, mais en fait, il coïncide souvent avec le point figuratif d'un état tel que B_{i+1} .

D'autre part, la construction qu'il a esquissée plus haut, montre qu'au besoin, sa méthode pourrait aussi s'appliquer au cas où la loi d'extrémité est donnée par une courbe et non par une équation ; bien entendu, la méthode devient alors graphique et sans doute, peut-on penser qu'elle perd une partie de son intérêt.

M. SCHLAG tient encore à préciser que son intention, en faisant sa communication, n'était pas tellement de présenter une nouvelle méthode de calcul, mais plutôt de montrer le phénomène du coup de bélier sous un angle sous lequel on ne le considère pas souvent. C'est en étudiant le bergeron qu'il est arrivé à cette conception et il croit que c'est là une preuve supplémentaire de la grande richesse du mode de représentation imaginé par L. BERGERON.