

# Note au sujet des lignes dites "de glissement effectif" dans un barrage en béton à profil triangulaire

Note regarding so-called effective slip lines in a triangular concrete dam.

PAR Y. HILLY

INGÉNIEUR DE L'ÉCOLE DES TRAVAUX PUBLICS

*Dans cette étude, l'auteur reprend la détermination des courbes de cisaillement effectif ou de glissement effectif à partir de considérations basées sur la courbe intrinsèque caractéristique du matériau employé, en l'occurrence le béton, au lieu de prendre comme base de départ la loi de Coulomb qui n'est applicable, dans le cas d'espèce, qu'à des milieux pulvérulents. Il préconise également pour des courbes de cette famille la dénomination de « courbes de moindre résistance », plus représentative de l'effet étudié.*

*In this exposition, the author reconsiders the determination of effective shear or slip curves from considerations based on the intrinsic characteristic curve of the material used, in this case concrete, instead of taking the Coulomb law as a starting base since, here, this is only applicable to cohesionless media. The author suggests that this set of curves could be called "curves of lesser resistance", as this more truly represents the effect studied.*

Il est d'un usage courant de définir dans un barrage en béton à profil triangulaire des « lignes de glissement effectif » comme étant « celles admettant en tout point comme tangente la direction de l'élément plan sur lequel le glissement est maximum ». Pour ce faire, on définit le cisaillement effectif par la quantité :

$$T - N \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

dont on cherche la valeur maxima.  $N$  et  $T$  sont les composantes normale et tangentielle de la tension et  $\varphi$  est l'angle de frottement caractérisant la maçonnerie. La condition de stabilité doit satisfaire à la condition de Coulomb; dans cette hypothèse, est réputé stable tout élément pour lequel on a l'inégalité :

$$T - N \cdot \operatorname{tg} \varphi < C,$$

formule dans laquelle  $C$  est une constante caracté-

ristique de la cohésion du béton. On fait en outre remarquer que, si on se place dans un domaine à deux dimensions et que le barrage en cause n'est soumis qu'à l'action de son poids propre et de la poussée hydrostatique d'une eau dont le niveau affleure le sommet du profil triangulaire, l'intervention du principe d'homothétie simplifie les calculs; une première ligne étant tracée, on en tracera autant d'autres qu'on voudra par homothétie.

\*  
\*\*

On bute tout de suite sur une première difficulté qui est la détermination de la valeur de l'angle  $\varphi$ . Mais une question de principe se pose, beaucoup plus grave. Est-on en droit de prendre, pour un béton considéré comme un continu élastique homogène et isotrope, comme critère de résistance, la condition de Coulomb? En d'autres termes, peut-on définir la résistance au cisail-

ment  $t$  d'un béton en rattachant cette dernière à la composante normale  $n$  de la tension suivant la relation linéaire :

$$t = n \cdot \text{tg } \varphi + C,$$

$\varphi$  et  $C$  ayant les valeurs fixes précédemment définies ?

En l'état actuel des connaissances sur la résistance de la matière, le critère de Mohr-Caquot, illustré par la notion de courbe intrinsèque, est adopté de préférence à tout autre. Entièrement confirmé par l'expérience, ce critère rend compte de façon satisfaisante de l'allure des fissures en même temps qu'il permet de déterminer, avec une précision suffisante, l'intensité des contraintes dangereuses susceptibles de provoquer la rupture.

A partir du critère de Mohr-Caquot et de la considération de la courbe intrinsèque, nous nous proposons d'étudier l'équivalent des lignes dites de « glissement effectif » établies à partir de la condition de Coulomb.

### Position du problème

On considère une tranche d'un barrage à profil triangulaire, c'est-à-dire le massif compris entre deux profils séparés d'une distance prise égale à l'unité. C'est également, pour un barrage à contreforts, le cas d'un contrefort d'épaisseur constante prise égale à l'unité et sollicité par une eau de densité fictive égale à sa densité réelle multipliée par le rapport de la distance d'axe en axe des contreforts à leur épaisseur. On se place ainsi dans un domaine plan; les problèmes d'élasticité seront des problèmes d'élasticité plane dits de tranche mince au sens de Pigeaud.

On peut calculer pour tout point du contrefort les tensions principales  $n_1$  et  $n_2$  ainsi que l'inclinaison  $\alpha$  de l'une d'elles par rapport à un axe de coordonnées, l'axe horizontal par exemple; l'autre tension est normale à la première. La théorie de l'élasticité donne une distribution des contraintes telle que les variations des composantes de la tension  $N_1$ ,  $N_2$  et  $T_3$  suivant la notation de Lamé sont linéaires et varient comme la profondeur. Le tracé des lignes isostatiques est classique. Remarquons encore que, dans un problème d'élasticité plane, les coefficients d'élasticité de la matière n'interviennent pas dans la détermination des contraintes; il en résulte que, pour le tracé des lignes isostatiques, on peut appliquer le principe d'homothétie évoqué plus haut.

L'état élastique du solide étant connu, les cercles de Mohr relatifs à tous points de ce dernier le sont également. La connaissance du tracé de

la courbe intrinsèque de la matière permet de déterminer, par comparaison des cercles de Mohr à la courbe intrinsèque de Caquot, s'il y a équilibre élastique ou s'il y a à craindre des glissements plastiques amorcés de rupture, et de calculer l'inclinaison des plans suivant lesquels les fissures apparaîtront.

A tout point de la courbe intrinsèque, on peut faire correspondre un cercle limite de Mohr ou cercle de rupture, et un seul. C'est l'aspect enveloppe des cercles de Mohr limites qui est retenu ici comme définition de la courbe intrinsèque. Soient  $v$  et  $\tau$  les coordonnées d'un point d'un cercle de Mohr, de rayon  $r$  et de centre  $\omega$ , d'abscisse  $p$ ; les cercles sont définis par l'équation :

$$(v - p)^2 + \tau^2 = r^2, \tag{1}$$

D'après Caquot, la courbe intrinsèque est représentée par la relation :

$$(p + H)^2 = r^2 + (r^3/R), \tag{2}$$

dans laquelle  $H$  et  $R$  sont deux constantes positives. Cette relation définit la condition de stabilité que nous allons développer. Remarquons en passant que la constante  $H$  représente la résistance à la traction triple du béton; c'est la valeur absolue de l'abscisse du sommet de la courbe intrinsèque.

### Lignes de moindre résistance

Soit (fig. 1) un cercle de Mohr limite tangent à la courbe intrinsèque  $\Gamma$ ; les coordonnées  $v_c$  et  $\tau_c$  du point de contact  $C$  se calculent à partir des équations (1) et (2). Le vecteur  $OC$  est représentatif de la contrainte dangereuse entraînant le glissement et la rupture. Soit  $2\theta$  l'angle  $(\omega C, \omega n)$ ; l'angle  $\theta$  mesure (fig. 2) soit l'angle de la nor-

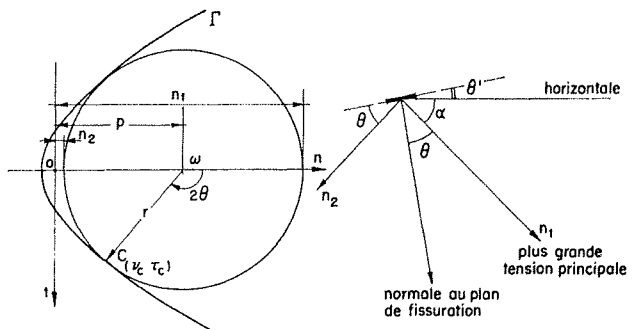


FIG. 1

FIG. 2

male à l'élément sur lequel va apparaître le glissement, avec la plus grande tension principale, soit l'angle de l'élément ou plan de fissuration avec la plus petite tension principale.

Par analogie avec la valeur de  $\alpha$  qui sert au

tracé des lignes isostatiques, on peut déterminer l'angle  $\theta'$  du plan de fissuration avec l'horizontale :

$$\theta' = (\alpha + \theta) - (\pi/2)$$

Envisageons maintenant le cas où le cercle de Mohr attaché au point étudié n'est pas un cercle limite de rupture (fig. 3). Par le centre  $\omega$  d'abscisse  $p$  on mène la normale à la courbe intrinsèque qui coupe cette dernière en B et le cercle

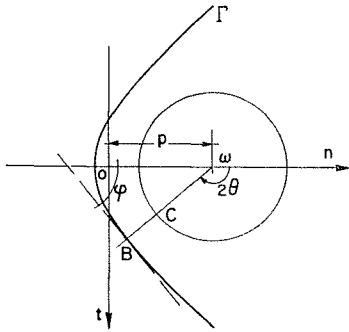


FIG. 3

en C. On définit conventionnellement, avec Ferrandon, le coefficient de sécurité  $K$  par le rapport :

$$K = \frac{CB}{\omega B}$$

qui correspond bien à la notion intuitive de sécurité. En particulier pour  $K=1$  on a la sécurité absolue; pour  $K=0$  on a une sécurité nulle.

L'angle  $\theta$  défini précédemment détermine le plan de l'élément sur lequel apparaîtrait le glissement si,  $\omega$  restant constant, le rayon  $r$  augmentait jusqu'à ce que le cercle de Mohr en cause devienne un cercle limite de rupture.

On peut alors tracer des *lignes de moindre résistance* (suivant la terminologie proposée par Ferrandon) et les définir comme étant celles admettant en tout point comme tangente la direction de l'élément plan sur lequel les premiers glissements pourraient apparaître.

Si la courbe intrinsèque, dans la zone où le point B évolue, peut être confondue avec une droite inclinée de l'angle  $\varphi$  sur l'axe  $On$ , on a :  $2\theta = (\pi/2) + \varphi$ . L'angle du plan de moindre résistance avec la plus grande tension principale est  $(\pi/2) - \theta$ , soit dans cette hypothèse particulière  $\pi/4 - \varphi/2$ . On retrouve les lignes dites de glissement effectif.

Du point de vue pratique, la différence essentielle réside dans le fait que le principe d'homothétie ne joue pas pour les lignes de moindre résistance puisque la courbe intrinsèque n'est pas une droite. On doit donc, pour chaque point étudié, faire la construction de Mohr et comparer

le cercle obtenu à la courbe intrinsèque. L'importance de l'exploration du profil triangulaire est difficile à définir *a priori* et dépend de la densité du réseau de lignes de moindre résistance que l'on veut obtenir.

### Détermination pratique d'une courbe intrinsèque

Afin d'illustrer l'exposé par un exemple numérique, on envisage le cas d'un contrefort de barrage, réalisé en béton caractérisé par sa résistance à la compression  $R_b$  et sa résistance à la traction  $R'_b$ . On admettra  $R_b=3.000 \text{ t/m}^2$  et  $R'_b=250 \text{ t/m}^2$ .

En traction simple, on aura :

$$p = -\frac{R'_b}{2} \quad \text{et} \quad r = \frac{R'_b}{2},$$

et en compression simple :

$$p = \frac{R_b}{2} \quad \text{et} \quad r = \frac{R_b}{2}.$$

La relation (2) définie précédemment, particularisée pour ces deux couples de valeurs, détermine les constantes  $H$  et  $R$ , soit, tout calcul fait :

$$H = \frac{R_b R'_b (R_b^2 + R_b'^2)}{R_b^3 - R_b'^3},$$

$$R = \frac{R_b^3}{8 H (H + R_b)};$$

soit encore, compte tenu des valeurs numériques indiquées ci-dessus :

$$H = 251,7 \text{ t/m}^2, \quad R = 4.123,6 \text{ t/m}^2.$$

La courbe intrinsèque du béton en cause sera donc l'enveloppe des cercles définis par les couples  $(r, p)$  dont les valeurs numériques se calculent à partir de l'équation (2).

### Exemple de tracé des lignes de moindre résistance

Le contrefort à profil triangulaire auquel il a été fait allusion ci-dessus a les caractéristiques suivantes :

- hauteur : 100,00 m,
- épaisseur : 5,00 m,
- distance entre axes de 2 contreforts successifs : 14,00 m,
- fruit du parement amont : 0,40,
- fruit du parement aval : 0,60,

— le niveau de la retenue correspond au sommet du contrefort.

Théoriquement pour tout point du profil triangulaire, pratiquement pour un certain nombre de points choisis judicieusement, on a calculé les tensions de Lamé  $N_1, N_2, T_3$  et les contraintes principales  $n_1, n_2$ .

Il est facile, alors, de construire le cercle de

Mohr pour chaque point étudié, et de déterminer l'angle  $\theta$  ou l'angle  $\theta'$  précédemment défini qui permet de tracer les lignes de moindre résistance, de calculer le coefficient de sécurité  $K$  et de tracer les lignes d'égales valeurs de  $K$ .

L'épure ci-dessous donne les résultats relatifs à l'exemple numérique défini ci-dessus, quant aux lignes isostatiques et aux lignes de moindre résistance (fig. 4).

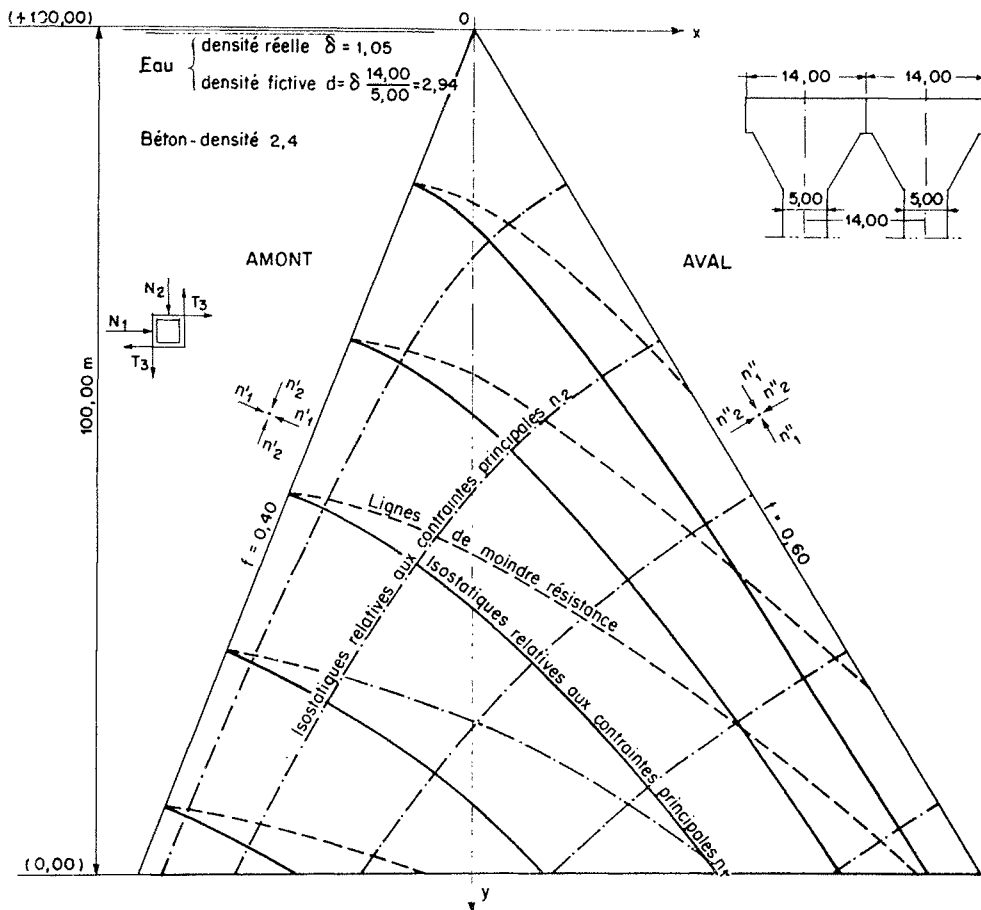


FIG. 4

### BIBLIOGRAPHIE

CAQUOT (A.). — Cours de résistance des matériaux (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées).  
 PIGEAUD. — Résistance des matériaux, Gauthier-Villars, Paris.  
 ESCANDE (L.). — Barrages, Hermann, Paris, 1937.

BOURGIN (A.). — Cours de calcul des barrages, Eyrolles, Paris.  
 CHAEGER (W. P.), JUSTIN (J. O.), HINDS (J.). — Engineering for dams, John Wiley & Sons Inc., New-York.  
 DAVIES (C. V.). — Handbook of applied hydraulics, McGraw Hill Book Co, New-York, 1942.