Calcul des chambres d'équilibre déversantes avec apport de débit

Calculations for spilling surge tanks with incoming flow

PAR L. ESCANDE

MEMBRE DE L'INSTITUT, INGÉNIEUR I.E.T.,
DIRECTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'HYDRAULIQUE DE TOULOUSE

I. Calcul approché du volume total déversé sur le seuil d'une cheminée d'équilibre (avec ou sans étranglement) dans le cas où un débit d'apport tombe directement dans la cheminée, en amont du seuil, au-dessus de l'étranglement lorsqu'il y en a un.

Phase préliminaire au déversement - Première hypothèse pour l'étude du déversement - Etude du déversement - Deuxième hypothèse - Comparaison avec la méthode graphique - Remarque et conclusion.

II. Même calcul dans le cas où le débit d'apport débouche dans la cheminée, au-dessous de l'étranglement éventuel.

Phase préliminaire au déversement - Etude du déversement dans l'hypothèse d'un seuil de longueur infinie et dans celle d'un seuil de longueur finie - Comparaison avec la méthode graphique et conclusions.

I. Approximation of the volume spilt over the sill of a surge tank, with or without restriction, for the case where the incoming flow falls (a) directly into the tank, (b) upstream of the sill and (c) above the restriction, when there is one. Preliminary phase to spillage - First assumption for spillage investigation - Spillage investigation - Second hypothesis - Comparison with the graphical method - Remarks and conclusion. II. The same calculation for the case where the incoming flow enters the surge tank below a possible restriction.

Preliminary phase to spillage - Spillage investigation based on (a) a sill of infinite length and (b) a sill of finite length - Comparison with the graphical method and conclusions.

CHAPITRE I

CAS OU L'APPORT DE DÉBIT S'EFFECTUE A LA PARTIE SUPÉRIEURE DE L'OUVRAGE

Dans un travail antérieur (1), nous avons établi les formules et indiqué la méthode permettant de calculer directement le volume total déversé sur le seuil d'une cheminée d'équilibre, comportant ou non un étranglement, à la suite d'un arrêt complet instantané du débit maximum Q_0 des turbines.

Dans le présent chapitre, nous envisageons le même problème, dans le cas où un débit d'apport Q_a tombe directement dans la cheminée, en

amont du seuil, au-dessus de l'étranglement éventuel (fig. 1).

Phase préliminaire au déversement

Z et A désignant respectivement la cote du plan d'eau, à l'instant t , et celle du seuil du

(1) C.R.A.S., t. 235, p. 338, 1952 et *Bulletin de la Société Française des Mécaniciens*, n° 5, juin 1952.

FIG. 1

déversoir, au-dessus du niveau statique, le déversement n'intervient que lorsque Z dépasse A .

Jusque-là, l'oscillation intéresse une chambre d'équilibre non déversante, pour laquelle la méthode graphique permet d'étudier la montée, comme nous l'avons montré (1).

Les équations fondamentales des oscillations s'écrivent, dans ce cas, entre grandeurs relatives :

$$v (dv/dz) + z + \varepsilon p + \varepsilon' r = 0$$

$$w = v - w_a$$

$$p = p_0 \quad w^2 = p_0 (v - w_a)^2$$

$$r = r_0 \quad w^2 = r_0 (v - w_a)^2$$

$$\varepsilon = \varepsilon' \text{ ayant pour valeur absolue l'unité et pour signe celui de } w = v - w_a$$

avec les notations suivantes :

L, f longueur et section du canal d'amenée.

F section horizontale de la chambre d'équilibre.

W vitesse dans le canal d'amenée, comptée positivement quand l'eau se dirige vers la chambre.

V vitesse ascensionnelle du plan d'eau dans la cheminée d'équilibre.

W_0, V_0, U_0 valeurs de W, V et U définies par les relations :

$$Q_0 = fW_0 = FV_0 = FU_0$$

$T = 2\pi \sqrt{LF/gf}$ période des oscillations en l'absence de déversement, de pertes de charge, d'étranglement, et de débit d'apport.

$Z_* = W_0 \sqrt{Lf/gF}$ amplitude des oscillations dans les mêmes hypothèses, pour le débit Q_0 .

P et P_0 pertes de charge dans le canal d'amenée pour les vitesses respectives W et W_0 .

R et R_0 pertes de charge dans l'étranglement R à l'instant t et R_0 lorsque l'étranglement est traversé par le débit Q_0 .

W_a vitesse définie par la relation $Q_a = fW_a$.

$$v = \frac{V}{V_0} \quad w = \frac{W}{W_0} \quad w_a = \frac{W_a}{W_0} \quad z = \frac{Z}{Z_*} \quad a = \frac{A}{Z_*}$$

$$p_0 = \frac{P_0}{Z_*} \quad p = \frac{P}{Z_*} \quad r_0 = \frac{R_0}{Z_*} \quad r = \frac{R}{Z_*} \quad t' = \frac{t}{T}$$

On remarque que, pendant toute la phase préliminaire au déversement, W reste positif, et l'on a $\varepsilon = \varepsilon' = +1$.

Les équations des oscillations ne sont pas intégrables analytiquement, mais la méthode graphique ci-dessus rappelée (1) permet de déterminer la valeur w_1 de w à l'instant où débute le déversement.

On en déduit les valeurs $W_1 = w_1 W_0$ et $Q_1 = fW_1 = w_1 Q_0$ de la vitesse W_1 dans le canal d'amenée et du débit Q_1 débouchant de ce canal dans la chambre d'équilibre à l'instant où commence le déversement.

Première hypothèse faite pour l'étude du déversement

Z devenant supérieur à A , le déversement commence sous une lame d'abord rapidement croissante, puis maximum et enfin décroissante.

Dans notre calcul, nous raisonnons comme si la longueur du seuil déversant était infiniment grande, la charge commandant le déversement restant pratiquement nulle.

(1) C.R.A.S., t. 224, pp. 185, 537, 895; 1947.

La Houille Blanche, juillet-août et septembre-octobre 1947.

Autrement dit, nous supposons que Z conserve la valeur A pendant toute la durée du déversement, et nous ne tenons pas compte, de ce fait, des accumulations positives ou négatives à l'intérieur de la chambre.

Les erreurs pouvant résulter de cette hypothèse sont forcément dans le sens de la sécurité : nous faisons intervenir, en effet, pendant tout le déversement, pour le freinage de l'eau en mouvement dans le canal d'amenée, une contre-pression inférieure à la contre-pression réelle du fait de la charge au-dessus du seuil déversant.

Etude du déversement

Avec l'hypothèse précédente, les équations générales s'écrivent :

$$\frac{L}{g} \frac{dW}{dt} + A + \varepsilon (P + R) = 0$$

$$P + R = (P_0 + R_0) W^2 / W_0^2$$

$$Q_d = fW + Q_a$$

Q_d désignant le débit déversant à l'instant t .

On a donc l'équation :

$$\frac{L}{g} \frac{dW}{dt} + A + \varepsilon \lambda W^2 = 0$$

avec :

$$\lambda = \frac{P_0 + R_0}{W_0^2}$$

dont l'intégration donne, en prenant comme nouvelle origine du temps le début du déversement, tant que W est positif, c'est-à-dire tant que $\varepsilon = 1$:

$$t = \frac{L}{g \sqrt{A\lambda}} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} W_1 \sqrt{\lambda/A} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} W \sqrt{\lambda/A} \right] \quad (1)$$

On en déduit :

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} W \sqrt{\frac{\lambda}{A}} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} W_1 \sqrt{\frac{\lambda}{A}} - \frac{g \sqrt{A\lambda}}{L} t \quad (2)$$

et le débit déversant Q_d :

$$Q_d = fW + Q_a = f \sqrt{\frac{A}{\lambda}} \frac{W_1 \sqrt{\lambda/A} - \operatorname{tg} (g \sqrt{A\lambda} t / L)}{1 + W_1 \sqrt{\lambda/A} \cdot \operatorname{tg} (g \sqrt{A\lambda} t / L)} \quad (3)$$

Ce débit est évidemment maximum et égal à :

$$Q_M = fW_1 + Q_a = w_1 Q_0 + Q_a \quad (4)$$

à l'instant zéro du début du déversement, d'après l'hypothèse de base.

Les relations (1), (2), (3) sont valables jusqu'à l'instant θ' où W s'annule, instant donné, d'après (1), par :

$$\theta' = \frac{L}{g \sqrt{A\lambda}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} W_1 \sqrt{\lambda/A} \quad (5)$$

Le volume déversé, de 0 à θ' , est donné par :

$$\Omega_d = \int_0^{\theta'} Q_d dt$$

L'intégration, compte tenu de la valeur (3) de Q_d , s'effectue en posant :

$$u = \operatorname{tg} [(g \sqrt{A\lambda} / L) t]$$

ce qui donne :

$$dt = \frac{L}{g \sqrt{A\lambda}} \frac{du}{1+u^2} \quad u' = \operatorname{tg} \left(\frac{g \sqrt{A\lambda}}{L} \theta' \right)$$

et :

$$\Omega_d = \frac{fL}{g\lambda} \int_0^{u'} \frac{W_1 \sqrt{\lambda/A} - u}{1 + W_1 \sqrt{\lambda/A} \cdot u} \cdot \frac{du}{1+u^2} + Q_a \theta'$$

L'intégration de cette fraction rationnelle et la substitution à θ' de sa valeur (5) donnent finalement :

$$\Omega_d = \frac{fL}{2g\lambda} \cdot \operatorname{Log} \left[1 + \frac{W_1^2 \lambda}{A} \right] + Q_a \theta' \quad (6)$$

ou :

$$\begin{aligned} \Omega_d = \frac{fL}{2g\lambda} \cdot \operatorname{Log} \left[1 + \frac{W_1^2 \lambda}{A} \right] \\ + \frac{Q_a L}{g \sqrt{A\lambda}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} W_1 \sqrt{\frac{\lambda}{A}} \quad (6') \end{aligned}$$

Après l'instant θ' , W devient négatif et $\varepsilon = -1$, de telle sorte que l'équation à intégrer s'écrit :

$$\frac{L}{g} \frac{dW}{dt} + A - \lambda W^2 = 0$$

L'intégration de cette équation à variables séparées donne, en comptant t à partir de l'instant θ' , pris comme nouvelle origine du temps :

$$t = - \frac{L}{2g \sqrt{A\lambda}} \cdot \operatorname{Log} \frac{1 + W \sqrt{\lambda/A}}{1 - W \sqrt{\lambda/A}} \quad (7)$$

On en déduit :

$$W = - \sqrt{\frac{A}{\lambda}} \cdot \frac{e^{2g \sqrt{A\lambda} t / L} - 1}{e^{2g \sqrt{A\lambda} t / L} + 1} \quad (8)$$

valeur évidemment négative, et le débit déversant Q_d'' :

$$Q_d'' = Q_a - f \sqrt{\frac{A}{\lambda}} \cdot \frac{e^{2g \sqrt{A\lambda} t / L} - 1}{e^{2g \sqrt{A\lambda} t / L} + 1} \quad (9)$$

Le facteur qui multiplie $f\sqrt{A/\lambda}$ étant inférieur à l'unité, pour toutes les valeurs positives de t , le débit déversant ne s'annule jamais si l'on a :

$$Q_a > Q_r \text{ avec } Q_r = f \sqrt{\frac{A}{\lambda}} = fW_0 \sqrt{\frac{A}{P_0 + R_0}} \\ = Q_0 \sqrt{\frac{A}{P_0 + R_0}}$$

et il tend asymptotiquement vers la valeur limite Q''_{at} :

$$Q''_{at} = Q_a - Q_r = Q_a - Q_0 \sqrt{A/(P_0 + R_0)} \quad (10)$$

en un temps infini.

On peut remarquer que :

$$Q_r = Q_0 \sqrt{\frac{A}{P_0 + R_0}}$$

représente le débit du courant de retour qui, dans le régime permanent final, s'établira asymptotiquement dans le canal d'amenée, débit dont l'expression s'obtient immédiatement en remarquant qu'il s'effectue sous la charge A .

Compte tenu de cette remarque, si l'on a :

$$Q_a < f\sqrt{A/\lambda} \text{ ou } Q_a < Q_r \quad (11)$$

le débit déversant s'annule au bout d'un temps fini θ'' , toujours compté à partir de θ' , tel que :

$$\theta'' = \frac{L}{2g\sqrt{A\lambda}} \text{Log} \frac{f\sqrt{A/\lambda} + Q_a}{f\sqrt{A/\lambda} - Q_a} \\ = \frac{L}{2g\sqrt{A\lambda}} \cdot \text{Log} \frac{Q_r + Q_a}{Q_r - Q_a} \quad (12)$$

Dans l'hypothèse (11), le volume déversé, après l'instant θ' , est donné par l'expression :

$$\Omega''_a = \int_0^{\theta''} Q''_a dt = Q_a \theta'' - f\sqrt{A/\lambda} \\ \int_0^{\theta''} \frac{e^{2g\sqrt{A\lambda}t/L} - 1}{e^{2g\sqrt{A\lambda}t/L} + 1} dt \quad (13)$$

$$\Omega''_a = Q_a \theta'' - f\sqrt{A/\lambda} \int_0^{\theta''} \text{th} \left(\frac{g\sqrt{A\lambda}}{L} t \right) dt$$

$$\Omega''_a = Q_a \theta'' - fL/g\lambda \text{Log} \left[\text{ch} \left(\frac{g\sqrt{A\lambda}}{L} \theta'' \right) \right]$$

or :

$$\frac{g\sqrt{A\lambda}}{L} \theta'' = 1/2 \text{Log} \frac{Q_r + Q_a}{Q_r - Q_a} = \arg \text{th} \frac{Q_a}{Q_r}$$

et :

$$\text{ch} \left(\frac{g\sqrt{A\lambda}}{L} \theta'' \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - (Q_a^2/Q_r^2)}} = \frac{Q_r}{\sqrt{Q_r^2 - Q_a^2}}$$

d'où :

$$\Omega''_a = Q_a \theta'' + \frac{fL}{2g\lambda} \text{Log} \frac{Q_r^2 - Q_a^2}{Q_r^2} \quad (14)$$

ou :

$$\Omega''_a = \frac{Q_a L}{2g\sqrt{A\lambda}} \text{Log} \frac{Q_r + Q_a}{Q_r - Q_a} \\ + \frac{fL}{2g\lambda} \text{Log} \frac{Q_r^2 - Q_a^2}{Q_r^2}$$

Le volume déversé total est :

$$\Omega_a = \Omega'_a + \Omega''_a$$

soit :

$$\Omega_a = \frac{fL}{2g\lambda} \text{Log} \left[\left(1 + \frac{W_1^2 \lambda}{A} \right) \left(\frac{Q_r^2 - Q_a^2}{Q_r^2} \right) \right] \\ + Q_a (\theta' + \theta'') \quad (15)$$

ou encore, en remarquant que :

$$W_1 \sqrt{\frac{\lambda}{A}} = \frac{W_1}{W_0} \sqrt{\frac{P_0 + R_0}{A}} = \frac{fW_1}{Q_r} = \frac{Q_1}{Q_r} \\ = w_1 \frac{Q_0}{Q_r} = \frac{Q_M - Q_a}{Q_r}$$

$$\Omega_a = \frac{fL}{2g\lambda} \text{Log} \left[\frac{(Q_r^2 + Q_1^2)(Q_r^2 - Q_a^2)}{Q_r^4} \right] \\ + Q_a (\theta' + \theta'') \quad (15')$$

avec θ désignant la durée totale du déversement :

$$\theta = \theta' + \theta'' = \frac{L}{g\sqrt{A\lambda}}$$

$$\left[\text{arc tg } W_1 \sqrt{\frac{\lambda}{A}} + 1/2 \text{Log} \left(\frac{Q_r + Q_a}{Q_r - Q_a} \right) \right] \quad (16)$$

ou :

$$\theta = \frac{L}{g\sqrt{A\lambda}} \left[\text{arc tg} \frac{Q_1}{Q_2} + 1/2 \text{Log} \left(\frac{Q_r + Q_a}{Q_r - Q_a} \right) \right] \quad (16')$$

Deuxième hypothèse faite pour l'étude du déversement

Dans notre travail antérieur concernant les chambres sans débit d'apport, nous avons montré qu'une approximation nettement supérieure pouvait être obtenue, vis-à-vis des résultats auxquels conduisait l'hypothèse du seuil déversant de longueur infinie à la cote A : il suffisait de remplacer, dans les formules générales relatives à la phase du déversement, obtenues à partir de cette hypothèse, le terme A par le suivant :

$$A' = A + 0,5 h_1 \quad (17)$$

h_1 désignant la charge nécessaire pour l'écoulement, en régime permanent, au-dessus du déversoir, du débit maximum Q_M .

Nous adopterons, comme deuxième hypothèse, le même mode opératoire pour le cas de l'étude actuelle concernant une cheminée avec débit d'apport.

W_1 et Q_M conservant la même valeur que dans la première hypothèse, toutes les formules établies pour celle-ci sont immédiatement applicables en y substituant A' à A .

Comparaisons
avec la méthode graphique classique

Nous les avons effectuées en considérant plusieurs cas correspondant tous au même canal d'amenée, au même débit total Q_0 et à une même cheminée d'équilibre déversante :

$L=4,138\text{ m}$

$f=3,464\text{ m}^2$

$Q_0=8\text{ m}^3/\text{s}$

$P_0=8,5\text{ m}$

$F=5,55\text{ m}^2$

$A=3\text{ m}$

La longueur du déversoir est telle qu'un déversement de $8\text{ m}^3/\text{s}$ correspond à une charge de $0,75\text{ m}$.

Nous avons envisagé le cas d'une chambre ordinaire, d'une part, et d'une chambre à étranglement, d'autre part, et nous avons considéré les diverses valeurs suivantes du débit d'apport :

$Q_a=\left\{\begin{array}{l}0\text{ m}^3/\text{s}\\1,5\text{ m}^3/\text{s}\\3\text{ m}^3/\text{s}\\4,5\text{ m}^3/\text{s}\end{array}\right\}$

pour $R_0=0$

$Q_a=\left\{\begin{array}{l}0\text{ m}^3/\text{s}\\1,5\text{ m}^3/\text{s}\\3\text{ m}^3/\text{s}\end{array}\right\}$

pour $R_0=10\text{ m}$

Le débit de $4,5\text{ m}^3/\text{s}$ conduit, en effet, à un déversement permanent ($Q_a>Q_r$) pour la cheminée à étranglement, contrairement à ce qui se passe pour la chambre ordinaire.

Les tableaux I à VII donnent, en fonction de Q_a , pour $R_0=0$ (tableaux I à IV) et pour $R_0=10\text{ m}$ (tableaux V à VII), calculées respectivement par

TABLEAU I

$Q_a=0\text{ m}^3/\text{s}$ $R_0=0\text{ m}$

	MÉTHODE graph.	MÉTHODE ANALYTIQUE			
	valeur obt.	Hypothèse A		Hypothèse A'	
		valeur obt.	erreur en %	valeur obt.	erreur en %
$Q_M\text{ m}^3/\text{s.}$	7,6	7,61	0,13	7,61	0,13
$\theta'\text{ s.}$	183	191,6	4,7	179,2	— 2,075
$\theta''\text{ s.}$	0	0	—	0	—
$\theta\text{ s.}$	183	191,6	4,7	179,2	— 2,075
$\Omega_d\text{ m}^3\text{}$	540	580	7,4	544	0,74

TABLEAU II

$Q_a=1,5\text{ m}^3/\text{s}$ $R_0=0\text{ m}$

	MÉTHODE graph.	MÉTHODE ANALYTIQUE			
	valeur obt.	Hypothèse A		Hypothèse A'	
		valeur obt.	erreur en %	valeur obt.	erreur en %
$Q_M\text{ m}^3/\text{s.}$	7,75	7,78	0,387	7,78	0,387
$\theta'\text{ s.}$	161	177,8	10,42	162,6	9,92
$\theta''\text{ s.}$	59	63,1	6,95	55,85	— 5,34
$\theta\text{ s.}$	220	240,9	9,5	218,5	— 0,682
$\Omega_d\text{ m}^3\text{}$	700	774,8	10,7	713,6	1,94

TABLEAU III

$Q_a=3\text{ m}^3/\text{s}$ $R_0=0\text{ m}$

	MÉTHODE graph.	MÉTHODE ANALYTIQUE			
	valeur obt.	Hypothèse A		Hypothèse A'	
		valeur obt.	erreur en %	valeur obt.	erreur en %
$Q_M\text{ m}^3/\text{s.}$	7,83	7,88	0,638	7,88	0,638
$\theta'\text{ s.}$	135	154	14,08	140	3,7
$\theta''\text{ s.}$	135	143,8	6,52	125	— 7,41
$\theta\text{ s.}$	270	297,8	10,3	265	— 1,85
$\Omega_d\text{ m}^3\text{}$	880	988,7	12,35	897,8	2,02

TABLEAU IV

$Q_a=4,5\text{ m}^3/\text{s}$ $R_0=0\text{ m}$

	MÉTHODE graph.	MÉTHODE ANALYTIQUE			
	valeur obt.	Hypothèse A		Hypothèse A'	
		valeur obt.	erreur en %	valeur obt.	erreur en %
$Q_M\text{ m}^3/\text{s.}$	7,9	7,927	0,342	7,927	0,342
$\theta'\text{ s.}$	102	120,3	17,95	108,8	6,66
$\theta''\text{ s.}$	305	349	14,4	262	— 14,1
$\theta\text{ s.}$	407	469,3	15,3	370,8	— 8,9
$\Omega_d\text{ m}^3\text{}$	1076	1255	16,6	1110	2,23

TABLEAU V

 $Q_a = 0 \text{ m}^3/\text{s}$ $R_0 = 10 \text{ m}$

	MÉTHODE graph.	MÉTHODE ANALYTIQUE			
		Hypothèse A		Hypothèse A'	
	valeur obt.	valeur obt.	erreur en %	valeur obt.	erreur en %
$Q_M \text{ m}^3/\text{s.}$	6,97	7,02	0,72	7,02	0,72
$\theta' \text{ s.}$	140	149,3	6,65	138	— 1,43
$\theta'' \text{ s.}$	0	0	—	0	—
$\theta \text{ s.}$	140	149,3	6,65	138	— 1,43
$\Omega_d \text{ m}^3 \text{}$	344	370	7,6	350	1,75

TABLEAU VI

 $Q_a = 1,5 \text{ m}^3/\text{s}$ $R_0 = 10 \text{ m}$

	MÉTHODE graph.	MÉTHODE ANALYTIQUE			
		Hypothèse A		Hypothèse A'	
	valeur obt.	valeur obt.	erreur en %	valeur obt.	erreur en %
$Q_M \text{ m}^3/\text{s.}$	7,47	7,49	0,268	7,49	0,268
$\theta' \text{ s.}$	130	140,7	8,24	129,8	— 0,144
$\theta'' \text{ s.}$	63	66	4,76	58,06	— 7,84
$\theta \text{ s.}$	193	206,7	7,1	187,86	— 2,66
$\Omega_d \text{ m}^3 \text{}$	528	573	8,52	531,8	0,72

TABLEAU VII

 $Q_a = 3 \text{ m}^3/\text{s}$ $R_0 = 10 \text{ m}$

	MÉTHODE graph.	MÉTHODE ANALYTIQUE			
		Hypothèse A		Hypothèse A'	
	valeur obt.	valeur obt.	erreur en %	valeur obt.	erreur en %
$Q_M \text{ m}^3/\text{s.}$	7,75	7,777	0,35	7,777	0,35
$\theta' \text{ s.}$	114	127,7	12	117,2	2,8
$\theta'' \text{ s.}$	197	219	11,16	169,3	— 14
$\theta \text{ s.}$	311	346,7	11,48	286,5	— 7,88
$\Omega_d \text{ m}^3 \text{}$	764	856	12,03	774,7	1,4

la méthode graphique classique, puis par la première méthode analytique approchée exposée dans cette étude (hypothèse A) et enfin en tenant

compte de la substitution de A' à A (hypothèse A'), les trois valeurs à comparer :

- du débit maximum Q_M ;
- du volume total déversé Ω_d ;
- de la durée θ' relative au déversement avec $W > 0$;
- de la durée θ'' relative au déversement avec $W < 0$;
- de la durée $\theta = \theta' + \theta''$ relative au déversement total,

ainsi que les erreurs relatives correspondant à la comparaison des résultats obtenus au moyen de l'une ou l'autre des méthodes analytiques approchées, aux valeurs fournies par la méthode graphique classique.

Pour les figures, convenons d'appeler, par exemple Ω_{dG} , Ω_{dA} , $Q_{dA'}$, les volumes Ω_d calculés par la méthode graphique (Ω_{dG}), par la première méthode exposée dans la présente étude (Ω_{dA}) et par la méthode indiquée en second lieu et substituant A' et A ($Q_{dA'}$); adoptons une convention analogue pour θ_{dG} , θ_{dA} , $\theta_{dA'}$, etc.

FIG. 2

FIG. 3

FIG. 5

FIG. 4

FIG. 6

Nous avons représenté, en fonction de Q_a :

- les courbes donnant les valeurs de Ω_{dG} , Ω_{dA} , $\Omega_{dA'}$, sur la figure 2 pour $R_0=0$, et sur la figure 6 pour $R_0=10$ m;

- les courbes donnant les valeurs de θ'_G , θ'_A , θ'_A' , et de θ''_G , θ''_A , θ''_A' , sur la figure 3 pour $R_0=0$ et sur la figure 7 pour $R_0=10$ m;

FIG. 7

FIG. 8

- les courbes donnant les valeurs de θ_G , θ'_A , θ''_A , sur la figure 4 pour $R_0=0$ et sur la figure 8 pour $R_0=10$ m;
- les courbes donnant les valeurs de Q_{MG} , Q_{MA} , $Q_{MA'}$, sur la figure 5 pour $R_0=0$ et sur la figure 9 pour $R_0=10$ m.

Remarque

Les comparaisons précédentes permettent de se rendre compte du degré d'approximation que l'on obtient en négligeant, dans le calcul, les variations de la charge au-dessus du déversoir et en considérant une contre-pression moyenne constante.

Nous avons voulu nous rendre compte également des degrés de précision comparés du calcul analytique et de la méthode graphique, en nous plaçant dans le cas d'un seuil de longueur infinie pour lequel on a $h_1=0$ et pour lequel, par conséquent, le caractère approximatif de la méthode analytique disparaît.

Dans ce but, nous avons, à partir des mêmes données numériques que ci-dessus, en nous limitant au cas de $R_0=0$ et en considérant successivement les quatre débits d'apport :

$$Q_a = \begin{cases} 0 & \text{m}^3/\text{s} \\ 1,5 & \text{m}^3/\text{s} \\ 3 & \text{m}^3/\text{s} \\ 4,5 & \text{m}^3/\text{s} \end{cases} \quad \text{avec } A=3 \text{ m}$$

effectué les constructions graphiques correspondantes.

FIG. 9

Les tableaux VIII à XI donnent, en fonction de Q_a , calculées respectivement par la méthode graphique, puis par la méthode analytique, les deux valeurs à comparer :

- du débit maximum Q_M ,
- du volume total déversé Ω_d ,
- de la durée θ' du déversement avec $W>0$,

TABLEAU VIII
 $Q_a=0\text{ m}^3/\text{s}$ $R_0=0\text{ m}$

	MÉTHODE		Ecart en %
	graphique	analytique	
$Q_M\text{ m}^3/\text{s} \dots\dots$	7,65	7,61	— 0,52
$\theta'\text{ s} \dots\dots\dots$	194	191,6	— 1,23
$\theta''\text{ s} \dots\dots\dots$			
$\theta\text{ s} \dots\dots\dots$	194	191,6	— 1,23
$\Omega_d\text{ m}^3 \dots\dots\dots$	581,6	580	— 0,27

TABLEAU IX
 $Q_a=1,5\text{ m}^3/\text{s}$ $R_0=0\text{ m}$

	MÉTHODE		Ecart en %
	graphique	analytique	
$Q_M\text{ m}^3/\text{s} \dots\dots$	7,78	7,78	0
$\theta'\text{ s} \dots\dots\dots$	175	177,8	1,6
$\theta''\text{ s} \dots\dots\dots$	64,8	63,1	— 2,6
$\theta\text{ s} \dots\dots\dots$	239,8	240,9	0,46
$\Omega_d\text{ m}^3 \dots\dots\dots$	760	774,8	1,95

TABLEAU X
 $Q_a=3\text{ m}^3/\text{s}$ $R_0=0\text{ m}$

	MÉTHODE		Ecart en %
	graphique	analytique	
$Q_M\text{ m}^3/\text{s} \dots\dots$	7,85	7,88	0,38
$\theta'\text{ s} \dots\dots\dots$	151,5	154	1,65
$\theta''\text{ s} \dots\dots\dots$	143,5	143,8	0,21
$\theta\text{ s} \dots\dots\dots$	295	297,8	0,95
$\Omega_d\text{ m}^3 \dots\dots\dots$	977	988,7	1,2

TABLEAU XI
 $Q_a=4,5\text{ m}^3/\text{s}$ $R_0=0\text{ m}$

	MÉTHODE		Ecart en %
	graphique	analytique	
$Q_M\text{ m}^3/\text{s} \dots\dots$	7,93	7,93	0
$\theta'\text{ s} \dots\dots\dots$	119	120,3	1,09
$\theta''\text{ s} \dots\dots\dots$	340	349	2,65
$\theta\text{ s} \dots\dots\dots$	459	469,3	2,25
$\Omega_d\text{ m}^3 \dots\dots\dots$	1238	1255	1,37

— de la durée θ'' du déversement avec $W < 0$,
— de la durée $\theta = \theta' + \theta''$ du déversement total
ainsi que les erreurs relatives correspondantes :

$$\frac{Q_{MA} - Q_{MG}}{Q_{MG}}, \quad \frac{\Omega_d_A - \Omega_d_G}{\Omega_d_G}, \text{ etc.}$$

Conclusion

Comme on le voit, la méthode analytique basée sur l'hypothèse A conduit à des divergences appréciables. Au contraire, les écarts correspondant à l'emploi de la méthode analytique reposant sur l'hypothèse A' demeurent toujours très faibles, et, de plus, en ce qui concerne l'élément essentiel, c'est-à-dire le volume déversé Ω_d , ils sont dans le sens de la sécurité.

On peut donc conclure en faveur de la méthode analytique basée sur l'hypothèse A', d'une précision comparable à celle de la méthode graphique classique et d'un emploi plus simple et plus rapide.

Par ailleurs, les comparaisons effectuées entre la méthode analytique et la méthode graphique, dans le cas du seuil de longueur infinie pour lequel la méthode analytique devient rigoureuse, montrent que les résultats obtenus présentent le même caractère de précision.

CHAPITRE II

CAS OU L'APPORT DE DÉBIT S'EFFECTUE AU-DESSOUS DE L'ÉTRANGLEMENT

Dans le chapitre précédent, nous avons exposé une méthode analytique pour le calcul approché des chambres d'équilibre déversantes dans lesquelles un débit d'apport arrive à la partie su-

périeure de l'ouvrage, ou, de façon plus précise, au-dessus de l'étranglement dans le cas où la chambre comporte un tel dispositif.

Nous exposons maintenant les résultats que

nous avons obtenus, en collaboration avec M. Dialinas, dans l'étude du même problème lorsque le débit d'apport débouche dans la chambre, au-dessous de l'étranglement (fig. 10).

FIG. 10

Phase préliminaire au déversement

Les notations restant les mêmes qu'au chapitre I, les équations fondamentales des oscillations s'écrivent dans ce cas entre grandeurs relatives :

$$v (dv/dz) + z + \varepsilon p + \varepsilon' r = 0$$

$$w = v - w_a$$

$$p = p_0 w^2 = p_0 (v - w_a)^2$$

$$r = r_0 v^2$$

ε et ε' ayant pour valeur absolue l'unité et pour signe celui de w pour ε , celui de v pour ε' .

On remarque que, pendant toute la phase préliminaire au déversement, W et V restent positifs et l'on a :

$$\varepsilon = \varepsilon' = +1$$

Les équations des oscillations ne sont pas intégrables analytiquement, mais la méthode graphique déjà rappelée (1) permet de déterminer la valeur w_1 de w à l'instant où débute le déversement.

On en déduit les valeurs $W_1 = w_1 W_0$ et $Q_1 = f W_1 = w_1 Q_0$ de la vitesse W_1 dans le canal d'amenée et du débit Q_1 débouchant de ce canal dans la chambre d'équilibre à l'instant où commence le déversement.

(1) Loc. cit., p. 2, note 1.

Etude du déversement dans l'hypothèse d'un seuil de longueur infinie

Dans l'hypothèse d'un seuil déversant de longueur infinie, les équations générales s'écrivent :

$$\frac{L}{g} \frac{dW}{dt} + A + \varepsilon P + \varepsilon' R = 0$$

$$Q_d = Q_c + Q_a$$

$$P = P_0 \frac{Q_c^2}{Q_0^2} \quad R = R_0 \frac{(Q_c + Q_a)^2}{Q_0^2}$$

Q_d et Q_c désignant le débit déversant et le débit du canal d'amenée à l'instant t .

Au début, ε et ε' sont positifs : ε' le restera jusqu'à la fin du déversement tandis que ε deviendra négatif un peu avant la fin de celui-ci quand W changera de signe.

On a donc l'équation :

$$\frac{L}{gf} \frac{dQ_c}{dt} + A + P_0 \frac{Q_c^2}{Q_0^2} + R_0 \frac{(Q_c + Q_a)^2}{Q_0^2} = 0$$

dont on tire :

$$dt = - \frac{L Q_0^2}{gf} \frac{dQ_c}{(P_0 + R_0) Q_c^2 + 2 R_0 Q_a Q_c + A Q_0^2 + R_0 Q_a^2}$$

L'intégrale de cette fraction rationnelle donne, en prenant comme origine du temps le début du déversement :

$$t = T' \left[\arctg \frac{(P_0 + R_0) Q_1 + R_0 Q_a}{\sqrt{\Delta'}} - \arctg \frac{(P_0 + R_0) Q_c + R_0 Q_a}{\sqrt{\Delta'}} \right] \quad (18)$$

avec :

$$\Delta' = (P_0 + R_0) A Q_0^2 + P_0 R_0 Q_a^2 \quad \text{et} \quad T' = \frac{L Q_0^2}{gf \sqrt{\Delta'}}$$

— Δ' étant le discriminant toujours négatif du trinôme dénominateur de l'expression intégrée.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \arctg \frac{(P_0 + R_0) Q_c + R_0 Q_a}{\sqrt{\Delta'}} \\ = \arctg \frac{(P_0 + R_0) Q_1 + R_0 Q_a}{\sqrt{\Delta'}} - \frac{t}{T'} \end{aligned} \quad (19)$$

et le débit déversant Q'_d :

$$\begin{aligned} Q'_d = \frac{\sqrt{\Delta'}}{P_0 + R_0} \frac{(P_0 + R_0) Q_1 + R_0 Q_a - \sqrt{\Delta'} \operatorname{tg}(t/T')}{\sqrt{\Delta'} + [(P_0 + R_0) Q_1 + R_0 Q_a] \operatorname{tg}(t/T')} \\ + \frac{P_0}{P_0 + R_0} Q_a \end{aligned} \quad (20)$$

Ce débit est évidemment maximum et égal à :

$$Q_M = Q_1 + Q_a \quad (21)$$

à l'instant zéro du début du déversement, d'après l'hypothèse de base, relative au seuil.

Les relations (18), (19), (20) sont valables jusqu'à l'instant θ' où Q_c s'annule, instant donné, d'après (18) par :

$$\theta' = T' \left[\arctg \frac{(P_0 + R_0) Q_1 + R_0 Q_a}{\sqrt{\Delta'}} - \arctg \frac{R_0 Q_a}{\sqrt{\Delta'}} \right] \quad (22)$$

ou :

$$\theta' = T' \arctg \frac{(P_0 + R_0) Q_1 \sqrt{\Delta'}}{\Delta' + \mu R_0 Q_a} \quad (22')$$

en posant :

$$\mu = (P_0 + R_0) Q_1 + R_0 Q_a$$

Le volume déversé, de 0 à θ' , est donné par :

$$\Omega'_a = \int_0^{\theta'} Q'_a dt$$

L'intégration, compte tenu de la valeur (20) de Q'_a , s'effectue en posant :

$$u = \operatorname{tg} t/T'$$

ce qui donne :

$$dt = T' \frac{du}{1+u^2}$$

et, en appelant u' la valeur de u à l'instant θ' :

$$u' = \operatorname{tg} \theta'/T' = \frac{(P_0 + R_0) Q_1 \sqrt{\Delta'}}{\Delta' + \mu R_0 Q_a}$$

et :

$$\Omega'_a = \frac{1}{R_0 + P_0} \left[\frac{L Q_0^2}{g f} \operatorname{Log} \left(\frac{\sqrt{\Delta'} + \mu u'}{\sqrt{\Delta'} (1 + u'^2)} \right) + P_0 Q_a \theta' \right] \quad (23)$$

W , Q_c et ϵ deviennent négatifs, après l'instant θ' , et l'équation à intégrer s'écrit, pendant toute la durée du déversement :

$$\frac{L}{g f} \frac{dQ_c}{dt} + A - P_0 \frac{Q_c^2}{Q_0^2} + R_0 \frac{(Q_c + Q_a)^2}{Q_0^2} = 0$$

on en tire :

$$dt = - \frac{L Q_0^2}{g f} \cdot \frac{dQ_c}{(R_0 - P_0) Q_c^2 + 2 R_0 Q_a Q_c + A Q_0^2 + R_0 Q_a^2} \quad (24)$$

Le second membre est une fraction rationnelle et le discriminant Δ'' du trinôme constituant le dénominateur a pour valeur :

$$\Delta'' = (P_0 - R_0) A Q_0^2 + P_0 R_0 Q_a^2 \quad (25)$$

Trois solutions sont possibles selon que Δ'' est positif, négatif ou nul.

CAS N° 1 : $\Delta'' > 0$:

Ce cas, qui sera toujours réalisé, d'après (25), si P_0 est supérieur ou égal à R_0 , condition suffisante mais non nécessaire, correspond à :

$$(P_0 - R_0) A Q_0^2 + P_0 R_0 Q_a^2 > 0$$

ou :

$$Q_a^2 > \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{R_0} \right) A Q_0^2 \quad (26)$$

Dans ce cas, l'intégration de (24) conduit, en prenant comme nouvelle origine du temps l'instant θ' , à l'expression :

$$t = \frac{T''}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{\beta [\alpha + (R_0 - P_0) Q_c]}{\alpha [\beta - (R_0 - P_0) Q_c]} \right) \quad (27)$$

avec :

$$T'' = \frac{L Q_0^2}{g f \sqrt{|\Delta''|}}, \quad \alpha = \sqrt{\Delta''} + R_0 Q_a, \quad \beta = \sqrt{\Delta''} - R_0 Q_a$$

on en déduit :

$$Q_c = - (A Q_0^2 + R_0 Q_a^2) \frac{e^{2t/T''} - 1}{\alpha e^{2t/T''} + \beta} \quad (28)$$

et le débit déversant Q''_a :

$$Q''_a = Q_a + Q_c = Q_a - (A Q_0^2 + R_0 Q_a^2) \frac{e^{2t/T''} - 1}{\alpha e^{2t/T''} + \beta} \quad (29)$$

Q''_a ne peut que décroître, et il est d'ailleurs facile, en formant la dérivée de Q''_a par rapport au temps, de vérifier que celle-ci est négative.

La valeur initiale de Q''_a étant positive, le débit déversant ne peut s'annuler si, quand t tend vers l'infini, la limite $Q''_{a\infty}$ de Q''_a est positive, c'est-à-dire si l'on a :

$$Q''_{a\infty} = Q_a - \frac{A Q_0^2 + R_0 Q_a^2}{\alpha} > 0$$

ou :

$$Q''_{a\infty} = \frac{P_0 Q_a - \sqrt{\Delta''}}{P_0 - R_0} > 0 \quad (30)$$

ou, en remplaçant Δ'' par sa valeur :

$$P_0 \left(\frac{Q_a}{Q_0} \right)^2 > A \quad (31)$$

Cette condition peut être obtenue directement, en remarquant qu'en l'absence de déversement, dans le régime permanent final, le débit d'apport Q_a traverse le canal d'amenée dans le sens négatif, en créant une perte de charge $P_0(Q_a/Q_0)^2$ forcément inférieure à A puisque, sans cela, le

plan d'eau, dans la chambre, serait plus haut que le seuil du déversoir et il y aurait déversement.

On peut également remarquer que le débit déversant limite et le débit limite correspondant Q_{cl} dans le canal d'amenée :

$$Q_{cl} = -(Q_a - Q''_{al})$$

vérifient la relation :

$$P_0 \frac{Q_{cl}^2}{Q_0^2} = A + R_0 \frac{Q''_{al}^2}{Q_0^2} \quad (32)$$

qui exprime l'égalité de deux expressions différentes de la pression sous l'étranglement, dans le régime permanent final.

Examinons maintenant l'hypothèse inverse, celle où le déversement cesse, au bout d'un temps θ'' , compté à partir de θ' pris comme origine, et où l'on a, d'après ce qui précède :

$$P_0 \left(\frac{Q_a}{Q_0} \right)^2 < A \quad (33)$$

En annulant le second membre de (12), on obtient :

$$\theta'' = \frac{T''}{2} \text{Log} \left(\frac{AQ_0^2 + Q_a \sqrt{\Delta''}}{AQ_0^2 - Q_a \sqrt{\Delta''}} \right) \quad (34)$$

Le volume déversé, pendant θ'' , a pour valeur :

$$\Omega''_d = \int_0^{\theta''} Q''_d dt$$

En remplaçant Q''_d par son expression (29) et en faisant le changement de variable classique :

$$e^{2t/T''} = u \quad dt = \frac{T''}{2} \frac{du}{u}$$

on obtient une fraction rationnelle dont l'intégration conduit à l'expression finale :

$$\frac{1}{P_0 - R_0} \left[(\sqrt{\Delta''} + P_0 Q_a) \theta'' + \frac{LQ_0^2}{gf} \text{Log} \left(\frac{\sqrt{\Delta''} - P_0 Q_a}{\sqrt{\Delta''} - R_0 Q_a} \right) \right] \quad (35)$$

CAS N° 2 : $\Delta'' < 0$:

Remarquons, tout d'abord, que la condition $\Delta'' \leq 0$ peut s'écrire :

$$(P_0 - R_0) AQ_0^2 + P_0 R_0 Q_a^2 \leq 0$$

ce qui exige $P_0 < R_0$ et peut encore se mettre sous la forme :

$$P_0 \frac{Q_a^2}{Q_0^2} \leq A \left(1 - \frac{P_0}{R_0} \right) \quad (36)$$

Cette condition entraîne *a fortiori* la suivante :

$$P_0 \frac{Q_a^2}{Q_0^2} < A \quad (33)$$

déjà mise en évidence pour le non-déversement dans le régime permanent final.

Le cas de $\Delta'' < 0$, que nous étudions actuellement, correspond donc à :

$$Q_a^2 < \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{R_0} \right) AQ_0^2 \quad (37)$$

L'intégration de (24) conduit alors, en prenant comme nouvelle origine du temps l'instant θ' , à l'expression :

$$t = T'' \left[\text{arc tg} \frac{R_0 Q_a}{\sqrt{-\Delta''}} - \text{arc tg} \frac{R_0 Q_a + (R_0 - P_0) Q_c}{\sqrt{-\Delta''}} \right] \quad (38)$$

On en déduit :

$$Q_c = \frac{\sqrt{-\Delta''}}{R_0 - P_0} \cdot \frac{R_0 Q_a - \sqrt{-\Delta''} \text{tg}(t/T'')}{\sqrt{-\Delta''} + R_0 Q_a \text{tg}(t/T'')} - \frac{R_0 Q_a}{R_0 P_0} \quad (39)$$

et le débit déversant :

$$Q''_d = Q_c + Q_a = \frac{\sqrt{-\Delta''}}{R_0 - P_0} \frac{R_0 Q_a - \sqrt{-\Delta''} \text{tg}(t/T'')}{\sqrt{-\Delta''} + R_0 Q_a \text{tg}(t/T'')} - \frac{P_0 Q_a}{R_0 - P_0} \quad (40)$$

s'annule à l'instant θ'' , compté à partir de θ' :

$$\theta'' = T'' \text{arc tg} \left(\frac{\sqrt{-\Delta''} Q_a}{AQ_0^2} \right) \quad (41)$$

Le volume déversé Ω''_d , pendant la durée θ'' , est :

$$\Omega''_d = \int_0^{\theta''} Q''_d dt$$

En faisant le changement de variable :

$$\text{tg} \left(\frac{t}{T''} \right) = u$$

on obtient une fraction rationnelle dont l'intégration fournit la valeur de Ω''_d :

$$\Omega''_d = \frac{1}{R_0 - P_0} \cdot \left\{ \frac{LQ_0^2}{gf} \left\{ \text{Log} \left[\frac{AQ_0^2 + R_0 Q_a^2}{\sqrt{A^2 Q_0^4 - \Delta'' Q_a^2}} \right] - \frac{P_0 Q_a}{\sqrt{-\Delta''}} \text{arc tg} \left(\frac{\sqrt{-\Delta''} Q_a}{AQ_0^2} \right) \right\} \right\} \quad (42)$$

CAS N° 3 : $\Delta'' = 0$:

Ce cas constitue la limite entre les deux précédents et il correspond à :

$$Q_a^2 = \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{R_0} \right) A Q_0^2 \quad (43)$$

Comme nous l'avons déjà indiqué (relations 36 et 33), il n'y a pas, dans ce cas, de déversement dans le régime permanent final.

Les formules correspondant à ce cas peuvent être obtenues à partir des précédentes, en passant à la limite pour $\Delta' = 0$, comme nous nous en sommes assurés.

Les calculs sont, toutefois, assez laborieux et il est beaucoup plus simple de traiter directement le problème.

En intégrant l'équation (24) dans ce cas où le discriminant du trinôme dénominateur (Δ'') est nul, on obtient :

$$t = \frac{L Q_0^2}{g f} \left[\frac{1}{R_0 Q_a + (R_0 - P_0) Q_c} - \frac{1}{R_0 Q_a} \right] \quad (44)$$

$$Q_c = - \frac{1}{R_0 - P_0} \cdot \frac{R_0^2 Q_a^2 g f t}{L Q_0^2 + R_0 Q_a g f t} \quad (45)$$

$$Q_a'' = Q_a - \frac{1}{R_0 - P_0} \cdot \frac{R_0^2 Q_a^2 g f t}{L Q_0^2 + R_0 Q_a g f t} \quad (46)$$

$$\theta'' = \frac{L Q_0^2}{g f} \cdot \frac{R_0 - P_0}{R_0 P_0} \cdot \frac{1}{Q_a} \quad (47)$$

$$\Omega''_a = \frac{L Q_a^2}{g f} \left[\frac{1}{R_0 - P_0} \operatorname{Log} \left(\frac{R_0}{P_0} \right) - \frac{1}{R_0} \right] \quad (48)$$

Extension des formules précédentes au cas d'un seuil déversant de longueur finie

Nous avons montré au chapitre I qu'on pouvait, avec une excellente approximation, passer des formules concernant le seuil déversant de longueur infinie à la cote A à celles qu'il convenait d'appliquer pour un seuil de même cote mais de longueur finie.

h_1 désignant la charge nécessaire pour l'écoulement, en régime permanent, au-dessus du déversoir, du débit maximum Q_M , nous avons vu qu'il suffit de remplacer, dans les formules générales établies pour le déversement au-dessus du seuil de longueur infinie, le terme A par le terme A' défini comme suit :

$$A' = A + 0,5 h_1$$

A' représente sensiblement la valeur moyenne de la contre-pression due à la pesanteur pendant le déversement.

Il convient d'observer, en effet, que dans toutes ces formules générales, exception faite pour la condition (33), le terme A n'intervient que pour caractériser la contre-pression due à la cote du plan d'eau dans la chambre.

Au contraire, dans la condition (33), A repré-

sente effectivement la cote du seuil du déversoir, considérée comme position du plan d'eau à partir de laquelle commence le déversement : c'est pourquoi, pour cette condition et pour elle seule, A doit être conservé et ne doit pas être remplacé par A'.

Pour la même raison, le calcul de Q_1 , antérieur au début du déversement, ne change pas et fait toujours intervenir A.

Conclusion de l'étude théorique

Résumons les résultats obtenus pour l'étude du volume déversé à la suite d'une manœuvre de fermeture complète instantanée intéressant le débit maximum Q_0 des turbines.

En premier lieu, par la méthode graphique que nous avons indiquée (1), on détermine la valeur du débit Q_1 qui débouche dans la chambre d'équilibre à l'instant où le plan d'eau atteint la cote A du seuil du déversoir.

En second lieu, on étudie la phase du déversement.

Si l'on a :

$$P_0 \frac{Q_a^2}{Q_0^2} > A \quad (31)$$

un déversement subsiste dans le régime permanent final, et le volume déversé est infini.

Si, au contraire, on a :

$$P_0 \frac{Q_a^2}{Q_0^2} < A \quad (32)$$

le déversement est limité.

Dans cette dernière hypothèse, trois cas sont à envisager selon les valeurs relatives du carré du débit d'apport Q_a^2 et de l'expression E définie par :

$$E = \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{R_0} \right) A Q_0^2 \quad (49)$$

auxquelles correspondent des expressions différentes de la durée totale $\theta = \theta' + \theta''$ du déversement et du volume total déversé $\Omega_a = \Omega'_a + \Omega''_a$.

Remarquons que θ' et Ω'_a demeurent les mêmes dans les trois cas et sont donnés par :

$$\theta' = T' \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(P_0 + R_0) Q_1 \sqrt{\Delta'}}{\Delta' + \mu R_0 Q_a}$$

avec :

$$\Delta' = (P_0 + R_0) A Q_0^2 + P_0 R_0 Q_a^2$$

(1) *Loc. cit.*, p. 2, note 1.

$$T' = \frac{LQ_0^2}{gf \sqrt{\Delta'}}$$

$$\mu = (P_0 + R_0) Q_1 + R_0 Q_a$$

$$\Omega'_a = \frac{1}{R_0 + P_0} \left[\frac{LQ_0^2}{gf} \operatorname{Log} \left(\frac{\sqrt{\Delta'} + \mu u'}{\sqrt{\Delta'}(1 + u'^2)} \right) + P_0 Q_a \theta' \right]$$

avec :

$$u' = \frac{(P_0 + R_0) Q_1 \sqrt{\Delta'}}{\Delta' + \mu R_0 Q_a}$$

1^{er} CAS : $Q_a^2 > E$:

$$\theta'' = \frac{T''}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{AQ_0^2 + Q_a \sqrt{\Delta''}}{AQ_0^2 - Q_a \sqrt{\Delta''}} \right)$$

avec :

$$\Delta'' = (P_0 - R_0) AQ_0^2 + P_0 R_0 Q_a^2$$

$$T'' = \frac{LQ_0^2}{gf \sqrt{|\Delta''|}}$$

$$\Omega''_a = \frac{1}{P_0 - R_0}$$

$$\left[(\sqrt{\Delta''} + P_0 Q_a) \theta'' + \frac{LQ_0^2}{gf} \cdot \operatorname{Log} \left(\frac{\sqrt{\Delta''} - P_0 Q_a}{\sqrt{\Delta''} - R_0 Q_a} \right) \right]$$

2^e CAS : $Q_a^2 < E$:

$$\theta'' = T'' \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{-\Delta''} Q_a}{AQ_0^2} \right)$$

$$\Omega''_a = \frac{1}{R_0 - P_0} \cdot \frac{LQ_0^2}{gf} \left\{ \operatorname{Log} \left[\frac{AQ_0^2 + R_0 Q_a^2}{\sqrt{A^2 Q_0^4 - \Delta'' Q_a^2}} \right] - \frac{P_0 Q_a}{\sqrt{-\Delta''}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{-\Delta''} Q_a}{AQ_0^2} \right) \right\}$$

3^e CAS : $Q_a^2 = E$:

$$\theta'' = \frac{LQ_0^2}{gf} \cdot \frac{R_0 - P_0}{R_0 P_0} \cdot \frac{1}{Q_a}$$

$$\Omega''_a = \frac{LQ_0^2}{gf} \left[\frac{1}{R_0 - P_0} \operatorname{Log} \left(\frac{R_0}{P_0} \right) - \frac{1}{R_0} \right]$$

Comparaison avec la méthode graphique

Nous nous sommes limité au cas du seuil de longueur infinie à la cote A; dans ces conditions, la méthode analytique est rigoureuse et la comparaison avec la méthode graphique a seulement pour but de mettre en évidence les degrés de précision comparés des deux procédés.

Nous avons considéré le cas d'une usine correspondant aux données suivantes :

$$L = 4.138 \text{ m}$$

$$f = 3,464 \text{ m}^2$$

$$Q_0 = 8 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$P_0 = 8,5 \text{ m}$$

$$F = 5,55 \text{ m}^2$$

$$R_0 = 10 \text{ m}$$

$$A = 3 \text{ m}$$

Les tableaux XII à XVI donnent en fonction de Q_a , calculées respectivement par la méthode

TABLEAU XII

$$Q_a = 0 \text{ m}^3/\text{s} \quad R_0 = 10 \text{ m}$$

	MÉTHODE		Ecart en %
	graphique	analytique	
$Q_M \text{ m}^3/\text{s} \dots\dots$	7,04	7,02	0,3
$\theta' \text{ s} \dots\dots\dots$	150	149,3	— 0,47
$\theta'' \text{ s} \dots\dots\dots$			
$\theta \text{ s} \dots\dots\dots$	150	149,3	— 0,47
$\Omega_a \text{ m}^3 \dots\dots\dots$	375	370	— 1,34

TABLEAU XIII

$$Q_a = 1,5 \text{ m}^3/\text{s} \quad R_0 = 10 \text{ m}$$

	MÉTHODE		Ecart en %
	graphique	analytique	
$Q_M \text{ m}^3/\text{s} \dots\dots$	5,72	5,82	1,8
$\theta' \text{ s} \dots\dots\dots$	112	110	— 1,8
$\theta'' \text{ s} \dots\dots\dots$	61	60,8	— 0,33
$\theta \text{ s} \dots\dots\dots$	173	170,8	— 0,7
$\Omega_a \text{ m}^3 \dots\dots\dots$	447,5	451,15	0,82

TABLEAU XIV

$$Q_a = 3 \text{ m}^3/\text{s} \quad R_0 = 10 \text{ m}$$

	MÉTHODE		Ecart en %
	graphique	analytique	
$Q_M \text{ m}^3/\text{s} \dots\dots$	4,55	4,528	— 0,44
$\theta' \text{ s} \dots\dots\dots$	74	73,40	— 0,81
$\theta'' \text{ s} \dots\dots\dots$	127,5	126,86	— 0,5
$\theta \text{ s} \dots\dots\dots$	201,5	200,26	— 0,62
$\Omega_a \text{ m}^3 \dots\dots\dots$	525,5	515	— 2

TABLEAU XV

$Q_a=4\text{ m}^3/\text{s}$ $R_0=10\text{ m}$

	MÉTHODE		Ecart en %
	graphique	analytique	
$Q_M\text{ m}^3/\text{s} \dots\dots$	3,65	3,616	— 0,83
$\theta'\text{ s} \dots\dots\dots$	53	52,46	— 1
$\theta''\text{ s} \dots\dots\dots$	199	198,29	— 0,36
$\theta\text{ s} \dots\dots\dots$	252	250,75	— 0,5
$\Omega_d\text{ m}^3 \dots\dots\dots$	579	571,07	— 1,38

TABLEAU XVI

$Q_a=4,5\text{ m}^3/\text{s}$ $R_0=10\text{ m}$

	MÉTHODE		Ecart en %
	graphique	analytique	
$Q_M\text{ m}^3/\text{s} \dots\dots$	3,16	3,18	0,6
$\theta'\text{ s} \dots\dots\dots$	44	43,5	— 1
$\theta''\text{ s} \dots\dots\dots$	274	290,1	5,9
$\theta\text{ s} \dots\dots\dots$	318	333,6	5
$\Omega_d\text{ m}^3 \dots\dots\dots$	606,3	589,5	— 2,8

graphique, puis par la méthode analytique, les deux valeurs à comparer :

- du débit maximum Q_M ,
- du volume total déversé Ω_d ,
- de la durée θ' du déversement avec $W>0$,
- de la durée θ'' du déversement avec $W<0$,
- de la durée $\theta=\theta'+\theta''$ du déversement total ainsi que les erreurs relatives correspondantes :

$$\frac{Q_{MA} - Q_{MG}}{Q_{MG}} \quad , \quad \frac{\Omega_{dA} - \Omega_{dG}}{\Omega_{dG}} \text{ , etc.}$$

les indices $_{MA}$ et $_{MG}$ caractérisant les valeurs obtenues respectivement par le calcul analytique d'une part, et par la méthode graphique d'autre part.

On voit par l'examen de ces tableaux que la concordance est toujours très grande : c'est seulement dans le cas de $Q_a=4,5\text{ m}^3/\text{s}$ que l'écart sur θ atteint 5 % en raison des conditions particulières qui diminuent à la fois la précision du graphique et du calcul numérique, ce dernier faisant intervenir alors des différences de nombres très voisins l'un de l'autre.

Conclusion

La méthode proposée conduit donc à des résultats d'une précision tout à fait comparable à ceux de la méthode graphique, et son emploi est notablement plus rapide que celui de cette dernière.