La houle complexe au troisième ordre d'approximation

A third order approximation of complex waves

PAR A. DAUBERT

INGÉNIEUR A L'E.D.F.
DÉTACHÉ AUX LABORATOIRES DE MÉCANIQUE L'É.N.S.E.H.R.G.

On a élaboré une théorie approchée au 3^e ordre d'approximation de la houle complexe en tenant compte d'un état tourbillonnaire du premier ordre. Ceci a permis de préciser la notion de transport de masse qui s'avère importante pour la structure même de l'écoulement, notamment en ce qui concerne la périodicité temporelle. On a également étudié les modifications des célérités dans la houle complexe.

An approximate theory for a third order approximation of complex waves was developed taking into consideration a first order vortex state. This made it possible to get a clear idea of mass transport which is seen to play an important part in the very structure of the flow, especially insofar as periodicity in time is concerned. Modifications of wave speed in the complex waves were also studied.

I. — LE PHÉNOMÈNE ÉTUDIÉ ET SCHÉMATISATION

Nous nous sommes proposé de prolonger les travaux de M. Biesel [1] sur ce qu'il a appelé la houle irrégulière, dans deux directions principales : nous avons introduit un rotationnel — et cela dès le premier ordre — et poussé l'approximation jusqu'au troisième ordre inclusivement.

Avant d'exposer nos calculs et nos résultats, qu'il nous soit permis de bien situer le phénomène dont nous essayons de construire une théorie approchée.

Il s'agit d'un mouvement bidimensionnel d'un liquide parfait et pesant, présentant une surface libre, limité horizontalement en profondeur, le fond pouvant être rejeté à l'infini.

Nous ne faisons *a priori* aucune hypothèse de périodicité spatiale ou temporelle, ce qui différencie ce mouvement de celui étudié par

Mme Dubreil-Jacotin [2] et que nous appellerons houle pure. Nous négligeons les effets de capillarité et ceux qu'entraîne la présence de l'atmosphère.

Nous supposons qu'en première approximation, le mouvement peut être considéré comme la superposition d'un nombre fini de houles pures linéaires. Cette définition du phénomène nous conduit à utiliser la méthode des petits paramètres de Poincaré.

Nous prendrons les amplitudes b_i des houles pures composant la première approximation comme infiniment petits principaux indépendants, et nous calculerons une solution vérifiant les équations de l'hydrodynamique et les conditions aux limites au troisième ordre inclusivement, relativement à l'ensemble des b_i .

II. — LA MISE EN ÉQUATION

On étudiera le mouvement en déterminant les trajectoires des particules. Les variables utilisées sont les coordonnées de repos (x_0, y_0) in-

troduites par M. Miche [3] qui a formé les équations correspondantes.

Les axes fixes sont : Ox dans le plan du li-

quide au repos dans la direction commune de propagation du phénomène, Oy vertical ascendant.

Le domaine des coordonnées de repos est alors la bande horizontale infinie :

$$-\infty < x_0 < +\infty$$

$$-h \leq y_0 \leq 0$$

h pouvant être infini.

Soient :

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, t) \end{cases}$$

les coordonnées à l'époque t d'une particule.

L'équation de continuité et l'expression du rotationnel $b\zeta$ — qui ne contient pas la pression et est indépendante du temps — nous fournissent les équations indéfinies que vérifient les coordonnées x et y . Elles s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{D(x, y)}{D(x_0, y_0)} = 1 \\ \frac{D(x', x)}{D(x_0, y_0)} + \frac{D(y', y)}{D(x_0, y_0)} = b\zeta \end{cases} \quad (1')$$

où :

$$x' = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad y' = \frac{\partial y}{\partial t}$$

Les conditions aux limites donnent, au fond :

$$y(x_0, -h, t) = -h \quad \text{pour} \quad -\infty < x_0 < +\infty, \quad -\infty < t < +\infty \quad (2')$$

et à la surface libre, où la pression p est constante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_0} &= 0 \quad \text{pour} \quad y_0 = 0 \quad \text{ou encore (cf. [3]) :} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + g \right) \frac{\partial x}{\partial x_0} &= 0 \end{aligned} \quad (3')$$

pour :

$$y_0 = 0, \quad -\infty < x_0 < +\infty, \quad -\infty < t < +\infty$$

Les déplacements étant supposés de l'ordre des b_i , nous poserons :

$$\begin{cases} x = x_0 + X(x_0, y_0, t, b_i) \\ y = y_0 + Y(x_0, y_0, t, b_i) \end{cases}$$

X et Y étant deux fonctions analytiques des paramètres b_i de l'ordre des b_i , régulières dans le voisinage des $b_i = 0$.

On cherchera les développements de X et Y limités aux trois premiers ordres. A notre connaissance, la convergence de ce processus d'approximations successives n'a pas été établie.

Les équations en X et Y s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x_0} + \frac{\partial Y}{\partial y_0} &= - \frac{D(X, Y)}{D(x_0, y_0)} \\ - \frac{\partial X'}{\partial y_0} + \frac{\partial Y'}{\partial x_0} &= b\zeta - \frac{D(X', X)}{D(x_0, y_0)} - \frac{D(Y', Y)}{D(x_0, y_0)} \end{aligned} \quad (1)$$

avec les conditions suivantes :

$$Y(x_0, -h, t) = 0 \quad \text{pour} \quad y_0 = -h, \quad -\infty < x_0 < +\infty, \quad -\infty < t < +\infty \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + g \frac{\partial Y}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \frac{\partial X}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \frac{\partial Y}{\partial x_0} &= 0 \\ \text{pour} \quad y_0 = 0, \quad -\infty < x_0 < +\infty, \quad -\infty < t < +\infty \end{aligned} \quad (3)$$

Nous supposons le tourbillon $b\zeta$ analytique par rapport aux b_i , régulier au voisinage des $b_i = 0$ et poserons :

$$b\zeta = \sum_{i=1}^n b_i \zeta_i(y_0, b_1, b_2, \dots, b_n)$$

Il ne dépendra des variables x_0 et y_0 que par y_0 seul.

Au point de vue formel, il suffit de supposer peu de choses sur $b\zeta$, en tant que fonction de y_0 , pour donner un sens aux opérations que nous aurons à effectuer ; par exemple, on peut se contenter d'imposer à $b\zeta$ la condition d'être simplement borné et continu par morceaux. Mais il est douteux que l'on puisse établir la convergence de notre processus d'approximations successives sous des hypothèses aussi générales. Nous admettrons donc, en nous inspirant de [1], que $b\zeta$ est continu au sens de Hölder.

III. — LE CALCUL DES APPROXIMATIONS

La méthode utilisée, avons-nous dit, est celle des petits paramètres de Poincaré. On prend, comme solution du premier ordre du système (1), celle, communément adoptée, du problème linéarisé.

Elle s'écrit :

$$\begin{cases} X = v_0 t - b_1 t - b_i \operatorname{ch} w_i \sin u_i + o(b_i b_j) \\ Y = b_i \operatorname{sh} w_i \cos u_i + o(b_i b_j) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (4_1)$$

Pour ces écritures, on utilise la convention de l'indice muet. Il en sera de même dans toute la suite, sauf mention contraire. On a posé :

$$\begin{aligned} w_i &= \mu_i y_0 + \alpha_i \\ u_i &= \mu_i [x_0 - c_i t + \varphi_i] \\ \mu_i &= 2\pi/\lambda_i \\ \alpha_i &= \mu_i h \\ b_i &= \int_0^{y_0} b \zeta dy_0 \end{aligned} \quad \text{pour } i \text{ fixe}$$

v_0 est une constante absolue, arbitraire, de l'ordre des b_i .

Aux solutions classiques, jusqu'ici supposées irrotationnelles au premier ordre, vient s'ajouter le terme séculaire $(v_0 - b_i) t$ qui provient du rotationnel, supposé ici de l'ordre des b_i .

Les intégrales (4₁) vérifient la condition (2) au premier ordre.

En écrivant la condition (3) avec les valeurs de X et Y données par (4₁), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + g \frac{\partial Y}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \frac{\partial X}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \frac{\partial Y}{\partial x_0} \\ = \mu_i b_i [\mu_i c_i^2 \operatorname{ch} \alpha_i - g \operatorname{sh} \alpha_i] \sin u_i + o(b_i b_j) = 0 \end{aligned} \quad (3_1)$$

Pour que cette condition soit satisfaite au premier ordre, il faut et suffit que les coefficients des $\sin u_i$ soient nuls. On retrouve ainsi la célèbre formule d'Airy pour chacune des composantes linéaires de houle pure.

Avant de poursuivre le calcul des approximations supérieures, précisons les arbitraires dont dépend la solution des équations de l'hydrodynamique que nous allons construire. Les formules résolutives font intervenir les quantités ci-après : $b \zeta$, v_0 , h , b_i , φ_i , μ_i , et c_i . $b \zeta$, h , b_i et φ_i seront des données *a priori*. Les μ_i et c_i seront liés par une relation, conséquence de (3). Et, par conséquent, on pourra encore se donner soit les μ_i , soit les c_i (ou $\mu_i c_i$). Quant à v_0 , sa valeur, arbitraire, n'est pas précisée pour l'instant. Nous reviendrons plus loin sur sa signification.

Nous ne saurions entrer dans le détail du calcul des approximations suivantes. On trouvera un exposé complet de la question dans un ouvrage en préparation (cf. [4]). Voici les grandes lignes de la méthode.

En portant les valeurs de X et Y, données par (4), dans les seconds membres des équations (1), on calcule les termes du deuxième ordre de X et de Y qui permettent de vérifier ces équations au deuxième ordre inclusivement. On obtient ainsi un système linéaire non homogène de deux

équations (1₂), aux dérivées partielles que doivent satisfaire les termes du deuxième ordre de X et Y. On en détermine une solution particulière en variables séparées, vérifiant les équations complètes et la condition (2) au deuxième ordre inclusivement. Ensuite, H étant une fonction harmonique des variables x_0 et y_0 , du deuxième ordre par rapport aux b_i , la solution générale des équations (1₂) homogènes est de la forme :

$$X = - \frac{\partial H}{\partial y_0}$$

$$Y = \frac{\partial H}{\partial x_0}$$

La condition (3), écrite au deuxième ordre inclusivement, permet alors de déterminer la forme de la fonction H. En effet, pour vérifier la condition (3), pour toutes valeurs de x_0 et t , on annule le coefficient des lignes trigonométriques qui y figurent, aux termes du troisième ordre près. L'annulation des coefficients des lignes trigonométriques, autres que $\sin u_i$, se fait en disposant de la fonction H convenablement. Quant aux coefficients des $\sin u_i$, leur annulation fournit des relations (3₂) entre les paramètres μ_i et c_i ($i=1, 2 \dots n$), qui étendent aux ordres supérieurs les relations (3₁) valables au premier ordre.

On achève de déterminer H au moyen de la condition (2). En fait, H n'est alors définie qu'à une fonction harmonique de x_0 et y_0 , indépendante du temps, près. Ceci est dû à l'arbitraire qui subsiste quant à la définition des variables de repos x_0 et y_0 . Ces variables ne sont définies qu'à des transformations arbitraires près de la bande, $0 \geq y_0 \geq -h$ en elle-même, avec conservation des frontières et des aires (*). L'arbitraire qui reste dans H ne traduit rien d'autre que cette indétermination; par conséquent, nous négligeons la fonction harmonique additive correspondante.

En ajoutant à la solution du système (1₂), avec deuxième membre, les dérivées de la fonction H avec les signes convenables, on obtient les termes du deuxième ordre de X et Y; le problème au deuxième ordre est alors résolu.

Le même processus permet de calculer la troisième approximation de la solution qui vérifie les équations et les conditions du problème au troisième ordre inclusivement, par rapport aux b_i . Les calculs sont longs mais élémentaires.

(*) On trouvera dans la thèse de M. Chabert d'Hières [5] tous les détails concernant ces transformations sur les variables de repos.

IV. — LES RÉSULTATS

a) La solution cherchée sous la forme :

$$x = x_0 + X(x_0, y_0, t, b_i)$$

$$y = y_0 + Y(x_0, y_0, t, b_i)$$

se présente de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t - \sigma(y_0) t + \Theta(v_1, v_2, \dots, v_n, y_0, b_i) \\ y &= y_0 + Y(v_1, v_2, \dots, v_n, y_0, b_i) \end{aligned} \quad (5)$$

où :

$$v_i = u_i - \mu_i \sigma(y_0) t$$

$\sigma(y_0)$ est une fonctionnelle du tourbillon $b\zeta$ de l'ordre de $b\zeta$ au moins et du deuxième ordre si $b\zeta$ n'est pas du premier ordre.

En formant les quantités suivantes :

$$V_i = \mu_i [x - (c_i + v_0) t + \varphi_i] \quad (7)$$

pour chaque valeur de i , on constate que (5) traduit en fait une correspondance biunivoque entre les variables :

$$v_1, v_2, \dots, v_n, y_0$$

et :

$$V_1, V_2, \dots, V_n, y$$

sous la forme :

$$\begin{cases} V_1 = v_1 + \mu_1 \Theta \\ V_2 = v_2 + \mu_2 \Theta \\ \dots\dots\dots \\ V_n = v_n + \mu_n \Theta \\ y = y_0 + Y \end{cases} \quad (8)$$

$\Theta(v_1, v_2, \dots, v_n, y_0)$ et $Y(v_1, v_2, \dots, v_n, y_0)$ sont des fonctions des $v_1, v_2, \dots, y_0$, où les v_i n'interviennent que dans les lignes trigonométriques. Θ et Y sont alors des fonctions bornées, et ainsi se trouve levée la difficulté des termes séculaires.

Le temps n'intervient plus explicitement, mais au lieu des deux coordonnées x_0 et y_0 , nous en avons $n+1$, à savoir : $v_1, v_2, \dots, v_n, y_0$. On explique ainsi, en particulier, la très grande simplicité de structure de la houle pure (où $n=1$), car, en passant aux variables V_1, y et v_1, y_0 , on reste dans un espace à deux dimensions ($n+1=2$) et on se trouve alors en présence d'un mouvement bidimensionnel permanent. Nous nous excusons de ne pouvoir publier ici les formules explicites de Θ et de Y valables jusqu'au troisième ordre inclusivement, par suite de leur longueur et de leur complexité. Mais nous serions heureux de les communiquer directement à toutes personnes qu'elles intéresseraient.

Nous allons cependant, à partir de cette correspondance que nous avons établie, pouvoir donner quelques résultats intéressants.

Les formules (8) peuvent s'inverser sous la forme :

$$\begin{cases} v_1 = V_1 + \mu_1 \Theta(V_1, V_2, \dots, V_n, y) \\ v_2 = V_2 + \mu_2 \Theta(V_1, V_2, \dots, V_n, y) \\ \dots\dots\dots \\ v_n = V_n + \mu_n \Theta(V_1, V_2, \dots, V_n, y) \\ y_0 = y + Y_0(V_1, V_2, \dots, V_n, y) \end{cases} \quad (9)$$

En substituant ces valeurs des v_i et y_0 dans les expressions des composantes de la vitesse de la particule (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{\partial}{\partial t} x(v_1, v_2, \dots, v_n, y_0) \text{ et} \\ W_0 = \frac{\partial}{\partial t} y(v_1, v_2, \dots, v_n, y_0), \end{cases} \quad (10)$$

obtenues en dérivant, par rapport au temps, les formules (5), on obtient les expressions du champ des vitesses en variables d'Euler sous la forme :

$$\begin{cases} U = U(V_1, V_2, \dots, V_n, y) \\ W = W(V_1, V_2, \dots, V_n, y) \end{cases} \quad (11)$$

b) Etudions le cas de la houle pure : $n=1$. Considérons l'hodographe du mouvement de la particule (x_0, y_0) . Ses équations paramétriques — le paramètre étant t , intervenant par v_1 —, sont données par le système (10). On constate que c'est une courbe fermée, parcourue dans le temps $T_1(y_0) = 2\pi/\mu_1 [c_1 + \sigma(y_0)]$. Cette période $[T_1(y_0)]$ de révolution est une fonction de la position de repos de la particule.

Si on considère, à présent, en un point (x, y) de l'écoulement, le lieu de l'extrémité du vecteur vitesse, on a une courbe fermée dont les coordonnées du point courant, paramétrées en fonction du temps par l'intermédiaire de V_1 , sont données par (11). La période de parcours de la courbe est alors $T'_1 = 2\pi/\mu_1 (c_1 + v_0)$, indépendante de la profondeur.

Le champ des vitesses en variables d'Euler possède une période globale, pour toute la masse fluide, alors que les vitesses des particules ont une période fonction de la profondeur moyenne de la particule.

Ce résultat un peu paradoxal ne se comprend bien que lorsque l'on a introduit les variables v_i et V_i , et établi leur correspondance. Le trans-

port de masse, au sens où Lévi-Civita l'entend, repose sur les équations (11) alors que le plus souvent, en matière de houle, on parle du transport de masse donné par les équations (10), ou leurs intégrales (5). Pour les uns, c'est un débit élémentaire, pour les autres, c'est une dérive des particules.

En effet, si nous interprétons le sens de $v_0 - \sigma(y_0)$ dans les équations (5), nous en tirons deux conséquences :

1° La présence du terme séculaire $[v_0 - \sigma(y_0)]t$ dans x [cf. équations (5)], traduit une dérive horizontale de la particule.

2° Cette dérive horizontale, mise à part, on pourrait être tenté de croire — en considérant, par exemple, la solution de M. Miche [3] —, qu'il existe une période au bout de laquelle toutes les particules, quelle que soit leur profondeur, reviendraient à leur cote initiale. Cette éventualité ne se produit pas, en général, comme le prouve la présence du terme $\mu_i \sigma(y_0) t$ dans les v_i en fonction desquels s'exprime y dans (5).

Il y a une exception remarquable à ces deux propriétés, c'est la houle de Gertsner et sa généralisation en profondeur finie. L'existence de ce dernier régime a été établie par Mme Dubreil [2] et ses lois approchées ont été explicitées par J. Kravtchenko et A. Daubert [6].

Aussi, pour éviter toute confusion, nous appellerons $\sigma(y_0)$ la dérive différentielle, et v_0 la dérive en masse.

c) Cette mise au point étant faite pour la houle pure, revenons à la houle complexe. Aucune des courbes définies par (10) et par (11) n'est fermée. Le champ des vitesses, même exprimé en fonction de x et y par l'intermédiaire des V_i et de y , ne possède plus, en général, de période temporelle ou spatiale.

Il nous semble utile de faire ici une mise en garde. Supposons que nous considérions une houle complexe telle que :

$$\begin{aligned} \mu_2 (c_2 + v_0) &= 2 \mu_1 (c_1 + v_0) \\ \mu_3 (c_3 + v_0) &= 3 \mu_1 (c_1 + v_0) \\ &\dots\dots\dots \text{ où } i \text{ n'est pas un} \\ \mu_i (c_i + v_0) &= i \mu_1 (c_1 + v_0) \quad \text{indice} \\ &\dots\dots\dots \text{ de sommation} \\ \mu_n (c_n + v_0) &= n \mu_1 (c_1 + v_0) \end{aligned}$$

Une telle houle posséderait alors, en variable d'Euler, la période $T'_1 = 2\pi/\mu_1 (c_1 + v_0)$. Mais suivons une particule (x_0, y_0) ; les composantes de sa vitesse :

$$\begin{cases} U_0 = U_0(v_1, v_2 \dots v_n, y_0) \\ W_0 = W_0(v_1, v_2 \dots v_n, y_0) \end{cases}$$

données par (10), ne possèdent pas de période temporelle — comme c'était le cas dans la houle pure —, car les relations :

$$\mu_i (c_i + v_0) = i \mu_1 (c_1 + v_0)$$

sont, en général, incompatibles avec :

$$\mu_i [c_i + \sigma(y_0)] = i \mu_1 [c_1 + \sigma(y_0)]$$

Il semble qu'il y ait là une difficulté. On peut se demander, en effet, comment une houle complexe, telle que nous l'avons représentée, peut être engendrée par un batteur dont le mouvement est périodique. Faute de place, nous ne pouvons discuter plus en détail cette question. Nous renverrons le lecteur à [4] pour ce point.

d) Outre les formules (5), le calcul, comme nous l'avons indiqué au § 3, donne n relations entre les paramètres μ_i et c_i ($i=1, 2 \dots n$). Ainsi la donnée des μ_i détermine la valeur des c_i ; inversement, des $T''_i = 2\pi/\mu_i c_i$, on déduit les μ_i . Ces relations, que nous ne pouvons publier faute de place, donnent la correction apportée à la formule d'Airy.

Dans le cas de l'onde pure, il est bien connu qu'une houle de longueur d'onde donnée se propage avec une célérité bien déterminée, si l'on a défini, au préalable, les axes fixes, par rapport au repère lié à l'onde relativement auquel l'écoulement est permanent.

Dans le cas de la houle complexe où $i=1, 2 \dots n$, les variables $V_1, V_2 \dots V_n$ montrent qu'il n'est plus possible de choisir un système d'axes par rapport auquel le mouvement soit permanent. Il s'ensuit que la notion de célérité perd tout sens physique. Nous n'engagerons pas la discussion sur ce que l'on appelle les vitesses de groupe ou de phase en théorie linéaire. Mais nous allons définir la notion de pseudo-célérité qui est susceptible de rendre service. Pour cela, on établira d'abord l'équation cartésienne de la surface libre. Si on fait $y_0=0$ dans le système (8) et si on calcule, dans les n premières équations, les v_i en fonction des V_i , pour substituer les expressions ainsi obtenues dans la $(n+1)^{\text{ème}}$ équation, on obtient l'équation cartésienne de la surface libre y_L . En groupant dans cette équation tous les termes où n'intervient qu'une seule et même valeur i_0 de l'indice i , on les identifie à l'équation cartésienne d'une houle pure d'amplitude b_{i_0} , de longueur d'onde $\lambda_{i_0} = 2\pi/\mu_{i_0}$ se propageant avec la célérité $(c_{i_0} + v_0)$. Aussi nous dirons que l'ensemble de ces termes représente une pseudo-houle pure composante. Nous appellerons pseudo-

célérité correspondante la quantité $(c_0 + v_0)$. Vue sous cet angle, la surface libre peut être considérée comme engendrée par la superposition de n pseudo-houles pures et d'un certain nombre de pseudo-houles d'interaction, induites par les précédentes. Chaque pseudo-houle d'interaction est représentée dans y_L par l'ensemble des termes caractérisés par les mêmes valeurs des indices (i_0, j_0, k_0) , deux au moins de ces dernières étant distinctes. Elle est induite par les pseudo-houles pures d'indice i_0, j_0, k_0 . Son amplitude, sa longueur d'onde, sa phase et sa pseudo-célérité sont déterminées par les caractéristiques des pseudo-houles pures qui l'ont induite.

Du fait de la non-linéarité des équations, les houles pures ne peuvent donc pas se propager simultanément et indépendamment les unes des autres. Elles sont nécessairement accompagnées par des éléments de liaison non linéaires qui constituent les pseudo-houles d'interaction. Et de plus, elles sont elles-mêmes altérées par leur présence mutuelle, dans leur forme et leur célérité. Ce qui précède montre les difficultés qu'il y aura à appliquer les formules à l'interprétation des essais. En effet, dans la houle complexe, aucune des quantités μ_i , c_i ou $\mu_i c_i$ n'est mesurable. En supposant qu'on sache les mesurer dans des zones où les houles ne sont pas encore mélan-

gées, on peut se demander ce que deviennent ces quantités dans la zone de la houle complexe.

Supposons en effet que, dans un canal très long, on engendre à une extrémité nord, par exemple, une houle courte de longueur d'onde $\lambda_1 = 2\pi/\mu_1$ se propageant vers l'extrémité sud. En même temps, un autre batteur identique, à l'extrémité sud, crée une houle de mêmes caractéristiques se propageant vers le nord. On modifie le batteur nord au bout de quelques instants et on lui fait engendrer une houle longue rotationnelle. Les trois trains de houle se trouveront mélangés en un certain point du canal, puisque la houle longue, se propageant plus vite que la courte, rattrapera cette dernière. Si l'on suppose que les longueurs d'onde se conservent, les formules reliant μ_i et c_i (cf. § 4 d) montrent alors que, dans la zone de mélange, les deux houles courtes ont des pseudo-célérités qui ne sont pas symétriques.

Cette théorie approchée révèle des aspects nouveaux de la houle complexe, qui montrent combien l'expérimentateur devra être prudent dans ce domaine. Des essais ont été entrepris dans cette voie au Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Institut Polytechnique de Grenoble [7] et se poursuivent encore.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) BIESEL (F.). — « Equations générales au 2^e ordre de la houle irrégulière. » *La Houille Blanche*, n° 3, mai-juin 1952, pp. 372-376.
- (2) DUBREUIL-JACOTIN (Mme). — « Sur la détermination rigoureuse des ondes permanentes périodiques d'ampleur finie. » Thèse de doctorat ès sciences mathématiques. *Journal de Mathématiques*, 13, 1954, pp. 267-291.
- (3) MICHE (M.). — « Mouvements ondulatoires de la mer en profondeur constante ou décroissante. » *Annales des Ponts et Chaussées*, 114^e année, 1944, 4^e, 2 V., pp. 25-61.
- (4) DAUBERT (A.). — Thèse de doctorat de spécialité du 3^e cycle. — A paraître dans les *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air*.
- (5) CHABERT D'HIÈRES (G.). — Notes des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 244, pp. 2474-2476.
- (6) KRAVTCHEKO (J.) et DAUBERT (A.). — *La Houille Blanche*, n° 3, juillet-août 1957, pp. 408-429.
- (7) KRAVTCHEKO (J.) et SANTON (L.). — *Congrès de l'A.I.R.H., Lisbonne*, juillet 1957.

DISCUSSION

Président : M. GIBRAT

M. le Président souligne l'importance du travail de M. DAUBERT, non seulement pour l'étude de la houle en canal avec tous ses prolongements théoriques, que l'on sent extrêmement riches, mais encore pour aider l'interprétation des enregistrements de houle en mer, actuellement très difficiles à analyser par séries de Fourier.

M. le Président se demande si les séries de fonctions orthogonales, autres que $\sin y/x$, utilisées par les électroniciens pour l'étude des bruits de fond, ne se prêteraient pas mieux à l'analyse des houles que les

sinus ou les cosinus, hyperboliques ou non, que l'on utilise actuellement.

M. KRAVTCHEKO répond qu'à chaque type de problème aux limites relevant de la méthode de Fourier correspond une classe de fonctions adaptées à la question et qui assurent la meilleure convergence des séries représentatives. Les équations différentielles et les conditions aux limites définissant les fonctions et les valeurs propres dépendent justement du problème posé. C'est pourquoi les séries de Bessel-Fourier, utilisées par

M. Fontanet, sont les mieux adaptées à la question qu'il s'est posée. Mais dans le problème du port circulaire, étudié par M. Mac Nown dans sa thèse de Grenoble (sur un modèle mis à sa disposition par la SOGREAH) les fonctions propres sont d'une tout autre espèce; il en est de même du problème des seiches du second ordre dans un port rectangulaire, étudié par MM. Gaillard et Takano au Laboratoire de Mécanique des Fluides de Grenoble à la suite d'une suggestion de M. LARRAS.

De plus, la méthode des fonctions propres ne peut être utilisée en toute rigueur que pour certains types de problèmes linéaires; le problème traité par M. DAUBERT ne l'est pas, mais les approximations de divers ordres le sont, en sorte que la méthode en cause est encore valable.

M. le Président rapproche l'étude de M. DAUBERT des formules que l'on utilisait à l'époque où il passait son certificat d'astronomie supérieure à la Sorbonne, pour étudier le mouvement de la lune et, appréciant la patience qu'il a fallu à M. DAUBERT pour établir ses formules, il lui demande de les expliquer en quelques mots.

M. DAUBERT donne les explications suivantes :

1° Convention de l'indice muet; il n'y a aucun signe Σ de sommation; les sommations doivent se faire chaque fois qu'un indice a été intégré deux fois dans le même terme et l'indice prend toutes les valeurs entières de 1 à n , n étant fini; les termes b_i représentent les amplitudes.

2° Les termes $v_0 t - \sigma(y_0) t$ sont les termes « vitesse d'entraînement ». La signification de w_i est la suivante :

$$w_i = \mu_i y_0 + \alpha_i, \quad \alpha_i = \mu_i h$$

h = profondeur du canal; μ_i = le nombre d'ondes; c_i = la célérité; $b \zeta$ = le rotationnel qui n'est fonction que de y_0 ; φ_i = la phase. Les amplitudes et les phases sont arbitraires.

3° v_0 se détermine quand on définit les axes par rapport auxquels on étudie le mouvement, et dont dépend la célérité de la houle pure (définition de la célérité à partir d'un système d'axes par rapport auquel le mouvement est permanent).

4° Les termes μ_i et c_i sont reliés par une relation qu'impose le problème.

5° En ce qui concerne la sommation suivant la convention de l'indice muet, il y a des valeurs que les indices ne peuvent pas prendre parfois; par exemple :

— un indice : $i \neq j$ signifie que la sommation doit exclure le cas où i et j sont égaux;

6° Un crochet :

$$\left[\begin{array}{c} i : i \\ i \neq j \end{array} \right]$$

évite d'écrire le même terme lorsque l'on fait le changement de μ_i en $-\mu_i$ et b_i en $-b_i$. Des indices composés suivis de deux ou trois crochets sont employés avec des significations ou des buts analogues.

M. KRAVTCHEKO, parlant au nom de M. BIESEL et en son nom personnel, remercie M. le Président des paroles élogieuses qu'il leur a adressées à la suite des communications de MM. FONTANET et DAUBERT, qui leur font l'honneur de suivre leurs cours du 3^e Cycle d'Hydrodynamique à Grenoble. Il en exprime leur satisfaction de professeurs et ajoute que les paroles de M. GIBRAT constituent pour eux le plus précieux des encouragements pour poursuivre leur effort désintéressé, mais pénible.

M. KRAVTCHEKO insiste sur quelques aspects particuliers du travail de M. DAUBERT :

1° M. DAUBERT interprète, pour la première fois, semble-t-il, en hydraulique, les termes séculaires qui permettent d'expliquer les très curieux phénomènes liés à la propagation des ondes complexes de gravité. Si, par exemple, on porte son attention sur l'équation théorique de la surface libre, on constate que le profil de l'onde résulte de la superposition d'un certain nombre de profils indéformables, mais se déplaçant avec des célérités différentes, en sorte que la surface libre résultant n'a pas une forme invariable. Certains de ces profils élémentaires se trouvent être ceux des houles pures. Groupons alors les termes du vecteur déplacement qui engendrent ce profil et lions à celui-ci un système d'axes : les termes considérés engendreront un mouvement relatif qui ne sera pas permanent, à cause, justement, de la présence des termes séculaires, variables avec la profondeur. C'est en cela, notamment, que la houle complexe diffère profondément de la houle pure; et cette circonstance, comme M. DAUBERT l'a souligné, rend l'étude expérimentale des oscillations complexes du liquide, fort malaisée.

2° M. DAUBERT a apporté un complément important à la théorie de M. BIESEL en précisant la notion de liaison non linéaire entre les houles élémentaires composantes d'une houle complexe.

3° La dissymétrie des lois de propagation de deux houles d'égale amplitude, mais de sens contraire, constitue un exemple très suggestif des complications résultant de la non-linéarité des équations du phénomène. M. KRAVTCHEKO a douté de la validité de cette conclusion de M. DAUBERT jusqu'à son entretien avec M. BIESEL — qui l'a fait changer d'avis.

M. le Président remercie beaucoup M. KRAVTCHEKO de ces explications.

M. MICHE, après avoir exprimé à M. DAUBERT tout l'intérêt qu'il a pris à l'exposé de ses recherches, remarque que la méthode employée : utilisation de coordonnées du type de Lagrange et approximations successives, est celle qu'il avait adoptée lors de ses premières recherches sur la houle en 1944, son avantage, entre autres, étant de fournir directement les équations des trajectoire des particules. Cependant, il pose la question de savoir s'il faudrait continuer dans cette voie relativement complexe pour obtenir, par exemple, des théorèmes d'existence, d'un intérêt plus immédiat maintenant, puisque M. DAUBERT a généralisé la méthode jusqu'au 3^e ordre d'approximation. D'autre part, les termes séculaires sont-ils une infirmité de la méthode, c'est-à-dire du mode d'approximation? Y a-t-il notamment des termes séculaires modifiant la surface libre, de telle sorte que celle-ci présenterait des oscillations dont les composantes verticales croitraient indéfiniment au cours du temps? M. MICHE ne le pense pas, mais voudrait obtenir des apaisements sur ce point. Dans le mode de présentation de Mme Dubreil-Jacotin par exemple, l'équivalent de ces termes n'existe pas.

M. DAUBERT répond qu'il n'y a pas de surélévation indéfinie de la surface libre avec le temps : dans ce calcul du troisième ordre, il apparaît, dès le premier ordre, un terme séculaire qui a une influence sur les termes suivants : par exemple, pour $x = vt$ au premier ordre, il apparaît au second ordre des termes en $-vt \sin(t + \varphi)$ et au troisième ordre, des termes en $v^2 t^2 \cos(t + \varphi)$. Autrement dit, ces termes se regroupent sous la forme $\cos(t + vt + \varphi)$.

M. KRAVTCHEKO rappelle que, de par la définition même de la houle, il ne peut y avoir de termes sécu-

lares verticaux vrais (autres que les termes parasites, décrits par M. DAUBERT). Mais la théorie de Mme Dubreil-Jacotin montre qu'en axes fixes, il y a presque toujours transport de masse et cela, en général, dès le premier ordre; la houle de Gertsner et sa généralisation en profondeur finie exceptées, il n'existe pas d'onde périodique de gravité dont les trajectoires soient fermées et décrites dans le temps égal à la période de l'onde. Le terme de transport de masse (de premier ordre pour les houles tourbillonnaires au premier ordre), négligé par M. MICHE, a été introduit par M. DAUBERT dans sa solution du problème de la houle complexe, exacte au 3^e ordre.

M. MICHE rappelle qu'il n'avait pas eu besoin, dans sa théorie du second ordre limitée à l'étude de la houle ou du clapotis en mer, d'introduire, pour la houle, des courants d'entraînement du premier ordre, mais du second seulement, car l'expérience, en accord avec les résultats théoriques antérieurement connus, montre qu'ils sont effectivement petits ainsi que le rotationnel. Ce ne serait plus exact très près du fond, mais la théorie des fluides parfaits est alors insuffisante de toute façon. Si l'on revient à l'hydrodynamique classique, la solution rigoureuse de Gerstner par exemple comporte un rotationnel du second ordre seulement et, de même, la houle irrotationnelle, un courant d'entraînement du second ordre. Ceci étant, il n'y avait plus nécessité, dans l'exposé définitif de sa méthode, de faire état des termes séculaires qu'il avait obtenus lors de ses premières recherches et avait d'ailleurs interprétés comme M. DAUBERT, mais avec moins de certitude, puisqu'il s'était limité au second ordre. Ces remarques ne diminuent aucunement l'intérêt théorique ou même pratique de ces nouvelles recherches, car dans un courant d'eau, par exemple, dans lequel une houle progresse, les courants d'entraînement sont du premier ordre et il apparaîtra des termes séculaires dès le second ordre. De toute façon, si l'on fait un calcul au 3^e ordre, on aura des termes séculaires même en se bornant à des courants d'entraînement du second ordre. Il est donc très

appréciable que les recherches de M. DAUBERT aient permis de résoudre judicieusement la difficulté créée par la présence de ces termes.

Au point de vue de l'utilité pratique de ces théories auxquelles M. MICHE attache une grande importance, il constate que bien que la méthode par approximations successives soit, pour l'instant, hypothétique, en l'absence de preuve de convergence des séries obtenues, plusieurs vérifications, récentes ou non, ont montré l'intérêt de la théorie du second ordre comparée à celle, classique, du premier ordre : par exemple, valeur de la surélévation du niveau moyen, pulsations de pression sur le fond, forme de la ligne d'eau selon les contrôles de M. Santon. Il serait très souhaitable de pouvoir montrer, par la voie expérimentale, que l'approximation du 3^e ordre accroît encore éventuellement le domaine d'utilisation possible des formules, et ceci constituerait un test tangible de l'intérêt immédiat des résultats nouveaux de M. DAUBERT.

M. DAUBERT estime que la méthode préconisée par M. MICHE pour l'étude de la houle pure s'avère être à peu près la seule qui soit utilisable pour la houle irrégulière qui n'est pas permanente par rapport à un système d'axes, car elle permet, avec les variables utilisées par M. MICHE, de se ramener à un domaine fixe.

M. MICHE ajoute que pour la houle pure irrotationnelle, on a prouvé, au moyen du système de coordonnées d'Euler, la convergence des séries obtenues pour une amplitude suffisamment faible (Lévi-Civita et Struik) mais qu'à l'emploi, ces méthodes, négligeant au surplus le rotationnel, sont nettement moins pratiques que celles admettant comme paramètres les coordonnées au repos des particules (variables du type de Lagrange).

M. le Président remercie M. DAUBERT et souligne que l'importante discussion déclenchée par son travail est sûrement pour lui la meilleure appréciation du grand intérêt qu'il comporte.