

# Étude par analogie électrique, des surpressions engendrées dans une conduite forcée par une perturbation périodique à l'extrémité aval

The investigation by electrical analogy  
methods of pressure surges set up in a penstock  
by a periodic disturbance at the downstream end

PAR J. PIQUEMAL

INGÉNIEUR E.N.S.E.H.T., ATTACHÉ DE RECHERCHES AU C.N.R.S.

*Dans cet article, l'auteur présente un simulateur d'analogie destiné à l'étude des surpressions dans les conduites forcées.*

*Il rappelle d'abord les bases de l'analogie, puis résume les principes généraux de réalisation de l'appareil.*

*Pour illustrer le fonctionnement du simulateur, l'auteur donne, à titre d'exemple, les résultats de l'étude relative aux surpressions engendrées dans une conduite forcée par une perturbation périodique des conditions d'écoulement à l'extrémité aval.*

*La comparaison des résultats fournis par l'appareil à ceux donnés par la méthode graphique de Bergeron confirme l'analogie, tant dans son principe que dans sa réalisation.*

*In this article the author describes an analogic simulator designed for investigating pressure surges in penstocks.*

*He first of all describes the basic principles of the analogy and then summarizes the general principles according to which the apparatus was built.*

*As an example illustrating the operation of the simulator, the author gives results of an investigation concerning the pressure surges set up in a penstock by a periodic disturbance of the flow conditions at the downstream end.*

*A comparison of the results provided by the apparatus with those obtained by the Bergeron graphical method, confirms the validity of the principles and construction of the analogic simulator.*

## CHAPITRE I. — INTRODUCTION

Le passage des aubes d'une roue de turbine devant les directrices du distributeur peut, dans certains cas, engendrer des fluctuations du débit issu de la conduite forcée et de ce fait donner naissance à des surpressions périodiques.

M. le Professeur Escande, dans une étude consacrée à ce sujet (1), s'est préoccupé d'examiner les conséquences de ce phénomène; il a

abouti à des résultats traduisant les variations de l'amplitude des surpressions en fonction des différents paramètres dont elles peuvent dépendre.

Dans cette communication, notre propos n'est pas de revenir sur son étude, mais de montrer comment un tel problème peut trouver sa solution grâce à un simulateur d'analogie électrique.

Avant d'aborder le sujet proprement dit, il nous paraît intéressant de rappeler les bases sur lesquelles repose l'analogie et les principes généraux de réalisation de l'appareil.

(1) L. ESCANDE: « Surpressions engendrées dans une conduite forcée par l'entretien d'une perturbation périodique à l'extrémité aval. » *IV<sup>e</sup> Journées de l'Hydraulique*, Paris 1956.

## CHAPITRE II. — DÉFINITION DE L'ANALOGIE

Les systèmes d'équations différentielles qui régissent la naissance et la propagation, d'une part, des ondes de surpression dans les conduites forcées, d'autre part, des surtensions sur les lignes électriques, définissent cette analogie; ils s'écrivent :

## SYSTÈME HYDRAULIQUE

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial y}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$

## SYSTÈME ÉLECTRIQUE

$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial \theta} = \frac{1}{l} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial i}{\partial z} = c \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases} \quad (2)$$

Dans ces équations, à l'instant  $t$  considéré,  $v$  désigne la vitesse de l'eau dans la section de la conduite située à une distance  $x$  de l'extrémité aval. En ce point, règne la pression  $y$ .  $g$  est l'accélération de la pesanteur,  $a$  la vitesse de propagation des ondes de surpression dans la conduite considérée.

Dans les équations du système électrique,  $i$  désigne l'intensité qui parcourt à l'instant  $\theta$  l'élément de ligne de longueur  $dz$  situé à la distance  $z$  de l'extrémité aval. En ce point la tension est  $u$ ;  $l$  et  $c$  sont les constantes qui caractérisent la ligne considérée; ce sont respectivement le coefficient de self-induction et la capacité relative à l'unité de longueur.

Analytiquement, ces deux systèmes d'équations présentent la même forme.

Si, dans un système d'unités cohérent pour l'un et l'autre phénomène, on réalise :

valeur numérique de  $g/a^2$  = valeur numérique de  $c$   
valeur numérique de  $g$  = valeur numérique de  $1/l$

les deux systèmes admettront la même solution générale.

Si les valeurs numériques des différentes grandeurs intéressées sont égales à l'instant initial  $t=0$ , c'est-à-dire :

valeur numérique de  $v_0$  = valeur numérique de  $i_0$

valeur numérique de  $y_0$  = valeur numérique de  $u_0$

et si, en outre, les conditions aux limites sont

identiques pour les deux phénomènes, on aura à n'importe quel instant  $t=0$  :

valeur numérique de  $y$  = valeur numérique de  $u$   
valeur numérique de  $v$  = valeur numérique de  $i$

Cependant, dans la pratique, les relations précédentes conduisent dans bien des cas à des grandeurs électriques de réalisation peu commode ou incompatibles entre elles.

Considérons donc une deuxième installation semblable, mais fictive, dont les grandeurs caractéristiques sont définies par l'indice (1), telles que :

$$\begin{aligned} v_1 &= kv & x_1 &= px \\ y_1 &= my & a_1 &= qa \\ t_1 &= nt & g_1 &= rg \end{aligned} \quad (3)$$

$k, m, n, p, q, r$ , étant des constantes sans dimensions.

Les grandeurs précédentes vérifient un système de même forme que (1), soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= \frac{g_1}{a_1^2} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial t_1} &= g_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (4)$$

qui, compte tenu de (3), s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{k}{p} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{r}{q^2} \frac{m}{n} \frac{g}{a^2} \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{k}{n} \frac{\partial v}{\partial t} &= r \frac{m}{p} g \frac{\partial y}{\partial x} \end{aligned} \quad (5)$$

En comparant les systèmes (1) et (3), on voit qu'il est nécessaire de réaliser les égalités :

$$\begin{aligned} p &= q \cdot n \\ kq &= mr \end{aligned} \quad (6)$$

Ces relations constituent un système de Cramer de deux équations aux six inconnues  $k, m, n, p, q, r$ .

On voit donc qu'il est toujours possible de remplacer une conduite à caractéristique unique donnée par une conduite semblable, fictive, assurant une représentation du phénomène étudié avec des échelles bien déterminées, que nous appellerons, en accord avec certains auteurs, échelles d'analogie.

On peut donc étudier du point de vue analogique toutes les conduites forcées à caractéristique unique à partir d'un circuit d'analogie associé à l'une d'elles.

REMARQUE :

Il semble que le choix des échelles de représentation ou échelles d'analogie  $k, m, n, p, q, r$  puisse se faire avec un nombre de degrés de liberté égal à quatre. Dans la pratique, ce choix est limité, car la valeur de certaines échelles est imposée; en effet, comme nous le verrons plus loin, nous avons été conduit à donner aux

caractéristiques  $l$  et  $c$ , du circuit d'analogie, des grandeurs constantes, par suite des inconvénients inhérents à l'utilisation de selfs et de capacités variables.

Il en résulte que les valeurs des échelles  $r$  et  $q$  sont imposées.

Finalement, c'est par le choix de deux constantes qu'il est possible de réaliser l'analogie, et le système d'équations (6) s'écrit en mettant en évidence, à l'intérieur des parenthèses, les échelles imposées.

$$p=(q) n \quad (7)$$

$$k=(r/q) m$$

### CHAPITRE III . — RÉALISATION PRATIQUE

#### Installation comportant une conduite à caractéristique unique. — Principe des mesures

Nous avons entrepris, du point de vue de sa réalisation pratique, la transposition, dans le domaine de l'analogie, d'une installation hydraulique comprenant un réservoir à niveau constant, alimentant une conduite à caractéristique unique. L'ensemble de la réalisation correspond au schéma général de la figure 1; elle assure la correspondance analogique :

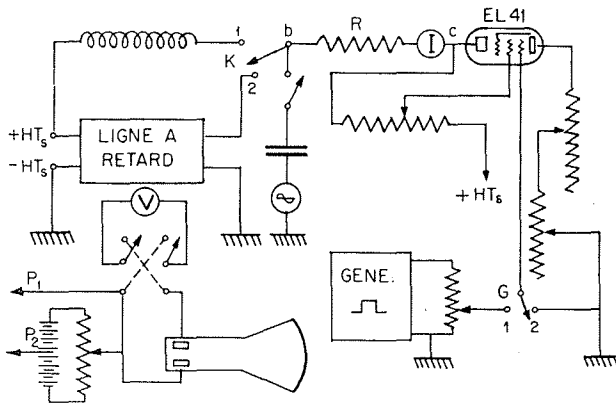


FIG. 1

a) DU RÉSERVOIR A NIVEAU CONSTANT alimentant l'installation hydraulique au moyen d'une alimentation stabilisée  $HT_s$ , dont la tension de sortie réglable est constante, quel que soit le débit fourni;

b) DE LA CONDUITE A CARACTÉRISTIQUE UNIQUE PAR UNE LIGNE A RETARD. — L'emploi d'une ligne réelle a dû être abandonné, par suite des difficultés de réalisation matérielle; nous avons été conduits à la remplacer par une ligne artificielle, ou ligne à retard, qui condense en des

points particuliers la self-induction et la capacité de chaque unité de longueur de la ligne réelle.

Les caractéristiques des éléments qui composent chaque cellule ont été déterminées avec le double souci, d'une part, de se rapprocher au maximum des hypothèses sur lesquelles repose la théorie (résistance de la ligne négligeable devant son impédance caractéristique, résistance de fuite des condensateurs extrêmement élevée), d'autre part, d'obtenir des phénomènes dont les grandeurs (temps de parcours de la ligne par les ondes, valeurs des surtensions) soient aisément mesurables par enregistrement oscillographique.

c) DE LA LOI DE VARIATION DU DÉBIT DANS LA CONDUITE FORCÉE. — Le débit issu d'une conduite forcée peut varier en fonction du temps suivant une loi déterminée; mais à chaque instant, il est fonction de la pression qui règne à l'aval de la conduite.

Dans le simulateur, un dispositif de contrôle de débit constitué par un tube électronique, monté comme l'indique le schéma général, permet la réalisation à volonté des manœuvres les plus couramment envisagées dans les problèmes pratiques. Dans ce but, on applique sur la grille de contrôle une tension variant en fonction du temps suivant une loi de forme convenable.

En outre, ce montage assure la correspondance analogique de la loi de variation du débit issu de la conduite forcée en fonction de la pression. Ce résultat est obtenu en asservissant les variations de tension de la grille écran de la lampe aux variations de tension de la plaque.

### Principe des mesures

Étant donné l'extrême rapidité des phénomènes étudiés, le seul appareil qui permette de les enregistrer fidèlement est l'oscillographe cathodique dont l'emploi est adapté à chaque type de mesure effectuée.

Mais pour pouvoir fixer et observer les phénomènes sur l'écran de l'oscillographe, il faut que toutes les manœuvres considérées soient périodiques. On a donc affaire à un calculateur répétitif.

Nous avons utilisé un oscillographe à deux voies.

#### a) MESURE DES TENSIONS :

Les tensions à mesurer sont directement appliquées aux plaques de déviation verticale de l'oscillographe. Un dispositif de contre-batterie associé à l'oscillographe en assure la lecture.

#### b) MESURE DES COURANTS :

On se ramène au cas précédent en mesurant la chute de tension produite par le passage du courant dans une résistance de mesure R connue avec une bonne précision.

#### c) DÉTERMINATION DES CARACTÉRISTIQUES DE CONTRÔLE DE DÉBIT :

Le débit  $q$  issu d'une conduite forcée varie avec la charge suivant une loi de la forme  $y = \alpha q^2$ .

Dans l'analogie, le montage est tel qu'une loi de forme semblable traduise les variations de la tension  $u$  à l'aval de la ligne en fonction du courant  $i$ , soit  $u = \beta i^2$ .

Nous n'insisterons pas sur le détail des opérations qui, du point de vue expérimental, conduisent très simplement à assurer la correspondance entre les pentes des caractéristiques  $y(q)$  et  $u(i)$  aux points de fonctionnement en régime permanent, compte tenu des échelles d'analogie adoptées.

## CHAPITRE IV. — EXEMPLE D'APPLICATION

### Études des surpressions engendrées dans une conduite forcée par une perturbation périodique à l'extrémité aval

Dans cette série d'expériences, nous avons entrepris, à l'aide du simulateur d'analogie, l'étude des surpressions engendrées dans une conduite forcée par l'entretien de perturbations périodiques des conditions d'écoulement à son extrémité aval.

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, le passage des aubes d'une roue de turbine devant les ouvertures du distributeur peut entraîner une légère fluctuation du débit issu de la conduite forcée et donner aussi naissance à des surpressions.

M. le Professeur Escande, par application de la méthode de Bergeron, a mis en évidence la variation de l'amplitude de ces surpressions en fonction du rapport  $n = T/T'$  de la période T de la conduite, à la période de la perturbation T'.

M. Escande traite le problème en supposant que l'ouverture du distributeur varie autour d'une valeur moyenne  $s_m = (s_1 + s_2)/2$ ; elle est égale à  $s_1$  pendant le temps  $t_1$ , égal à une demi-période  $T/2$ , puis à  $s_2$  pendant le temps  $t_2$  égal à la demi-période suivante.

Cette hypothèse d'une forme rectangulaire de la courbe  $s(t)$  entraîne des surpressions plus

élevées que toute autre, pour un couple de valeurs données  $s_1$  et  $s_2$ , et conduit en même temps aux constructions graphiques les plus simples.

Toutes les constructions graphiques effectuées présentent en commun les données numériques suivantes :

— Débit de régime permanent correspondant à l'ouverture  $s_1$  :

$$q_1 = 10,3 \text{ m}^3/\text{s}$$

— Débit de régime permanent correspondant à l'ouverture  $s_2$  :

$$q_2 = 9,7 \text{ m}^3/\text{s}$$

Pour la conduite considérée :

$$S = 2,5 \text{ m}^2 \quad a/g = 100 \text{ s}$$

Comme l'analogie est réalisée à partir de la vitesse, nous retiendrons :

— Vitesse de régime permanent correspondant à l'ouverture  $s_1$  :

$$v_1 = 4,12 \text{ m/s}$$

— Vitesse de régime permanent correspondant à l'ouverture  $s_2$  :

$$v_2 = 3,88 \text{ m/s}$$

Il est commode d'exprimer les valeurs des vitesses  $v_1$  et  $v_2$  en fonction de la vitesse moyenne :

$$\begin{aligned} v_0 &= (v_1 + v_2)/2 \\ v_1 &= v_0(1 + \lambda) \\ v_2 &= v_0(1 - \lambda) \\ v_1 - v_2 &= [2\lambda/(1 + \lambda)] v_1 \\ v_0 &= 4 \text{ m/s} \quad \lambda = 0,03 \end{aligned} \quad (8)$$

Notons enfin qu'au cours de son étude M. Escande est amené à considérer trois valeurs de la pression statique  $y_0$  et les résultats sont donnés pour :

$$y_0 = 600 \text{ m} \quad y_0 = 200 \text{ m} \quad y_0 = 150 \text{ m}$$

Le simulateur permet de traiter facilement le problème posé. Nous allons examiner comment se traduisent, du point de vue analogique, les principes généraux exposés précédemment.

D'après les lois que nous avons pu établir, les conditions à réaliser sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \text{valeur numérique de } (r/q^2)(g/a^2) &= \\ &= \text{valeur numérique de } c \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{valeur numérique de } rg &= \\ &= \text{valeur numérique de } 1/l \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{valeur numérique de } kv_1 &= \\ &= \text{valeur numérique de } i_1 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{valeur numérique de } kv_2 &= \\ &= \text{valeur numérique de } i_2 \end{aligned} \quad (12)$$

$k, m, n, p, q, r$  étant les échelles d'analogie antérieurement définies.

En outre, une deuxième série de relations définit les pentes des caractéristiques aux points de fonctionnement  $(y_0, v_1)$  et  $(y_0, v_2)$  :

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta i}\right)_1 = 2 \left(\frac{m}{k}\right) \frac{y_0}{v_1} \quad (13)$$

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta i}\right)_2 = 2 \left(\frac{m}{k}\right) \frac{y_0}{v_2} \quad (14)$$

Les caractéristiques du circuit d'analogie  $l = 2,83 \text{ mH}$ ,  $c_1 = 177 \text{ pF}$  et celles de l'installation

hydraulique  $a/g = 100$  nous permettent de calculer le rapport  $k/m$  :

$$k = 2\,510^{-3} \text{ m}$$

Pour plus de commodité, nous choisissons le courant  $i_1$  comme étant celui qui traverse le tube de contrôle de débit EL 41 quand sa grille est à un potentiel constant, que nous prenons égal à celui de la masse. Nous définissons ainsi l'ensemble des réglages à partir du courant  $i_1$ .

Après avoir préalablement procédé au réglage des caractéristiques de fonctionnement du tube, compte tenu des valeurs des pentes ci-dessus définies, il importe de reproduire la loi de variation périodique du débit.

Les manœuvres instantanées sont obtenues en appliquant sur la grille du tube de contrôle de débit une fraction de la tension de sortie d'un générateur de signaux rectangulaires.

Une telle tension varie périodiquement; elle se maintient à une valeur nulle pendant le temps  $t_1$ , puis prend une valeur négative constante pendant le temps  $t_2$  égal au reste de la période. Il en résulte une variation de courant dans le tube EL 41 de la valeur  $i_1$  précédemment définie à une valeur  $i_2$  inférieure à  $i_1$ .

Il suffit de régler l'amplitude et la fréquence, continuellement variables, de ces signaux, à une valeur convenable, pour que soit assurée, à une échelle déterminée, la représentation analogique des phénomènes hydrauliques qui sont à l'origine des surpressions.

D'après (8), la valeur de  $i_2$  doit être telle que :

$$i_1 - i_2 = \frac{2\lambda}{1 + \lambda} i_1$$

$i_1 - i_2$  est déterminé par la chute de tension produite dans la résistance de mesure R, soit :

$$R(i_1 - i_2) = \frac{2\lambda}{1 + \lambda} Ri_1$$

$R(i_1 - i_2)$  est mesuré à l'oscillographe.

REMARQUE :

Notons, qu'avec le type de générateur à signaux rectangulaires utilisé, on peut faire varier de façon continue à l'intérieur d'une même période le rapport  $t_2/t_1 = v$ . Ce rapport est égal à l'unité dans tous les cas envisagés par M. Escande. Le simulateur offrirait donc la possibilité d'étudier, sans aucune complication supplémentaire, les variations de l'amplitude des surpressions pour une valeur du rapport  $t_2/t_1$  quelconque.

## RÉSULTATS

Dans la série d'expériences dont nous donnons les résultats, nous avons retrouvé, aussi bien du point de vue qualitatif que quantitatif, les résultats théoriques de l'étude de M. Escande.

Nous avons noté, en particulier, la nullité des surpressions engendrées par les harmoniques pairs. Par contre, les surpressions prennent la même valeur pour tous les harmoniques impairs. Nous avons vérifié également que le maximum de la surpression est une fonction périodique de  $n$ , de période égale à 2.

Sur le plan qualitatif, nous nous bornerons volontairement à fournir un seul exemple.

La figure 2 représente les variations de la surpression en fonction du temps pour la valeur  $n=8/3$  du rapport  $T/T'$  de la période des fluc-

tuations du débit à la période de la conduite. Cette courbe résulte directement de la construction graphique de Bergeron correspondante.

La figure 3 donne l'oscillogramme pour la même valeur du rapport  $n$  envisagée.

Malgré une légère déformation des signaux, imputable essentiellement à l'utilisation, pour la réalisation de l'analogie, d'une ligne à constantes localisées au lieu d'une ligne à constantes réparties, le simulateur fournit l'aspect qualitatif du phénomène. En effet, l'oscillogramme diffère assez peu de la courbe théorique correspondante.

Sur le plan quantitatif, les figures 4, 5, 6 comparent directement les résultats obtenus par la méthode de Bergeron à ceux fournis par l'appareil.

## DISCUSSION

*Président : M. FERRY*

M. le Président précise que la communication de M. PIQUEMAL n'a pas pour objet une recherche nouvelle, puisqu'il s'agit d'un sujet traité par M. ESCANDE. Elle a pour but essentiel de montrer que, malgré de petites différences avec les hypothèses de calcul, tenant aux conditions de réalisation de l'analogie, la concordance est pratiquement parfaite et certainement supérieure aux besoins de la pratique. Il serait intéressant que M. PIQUEMAL précise quels sont les domaines respectifs du calcul analogique, compte tenu du temps nécessaire à la réalisation du modèle, du calcul graphique ou du calcul au moyen des machines à calculer modernes.

M. PIQUEMAL explique que l'appareil présenté est l'embryon de projets plus prétentieux; dans sa phase actuelle, il permet néanmoins de traiter la majorité des problèmes se rapportant aux conduites à caractéristique unique. Parmi les problèmes actuellement à l'étude, figurent ceux posés par les coups de bélier dans les stations de pompage munies d'un réservoir à air. La plus grosse difficulté étant d'ordre matériel, en particulier pour réaliser la loi  $PV=Cte$  ou  $PV^\gamma=Cte$  pour représenter l'analogie du réservoir à air.

M. le Président pense qu'il serait souhaitable que l'auditoire indique quels sont les problèmes qui paraissent pouvoir être traités avec intérêt par ces méthodes.

M. NOUGARO précise que le Laboratoire d'Hydraulique de Toulouse a orienté certaines études dans le domaine de l'analogie :

- a) Pour les coups de bélier dans les conduites forcées,
- b) pour les oscillations du plan d'eau dans les cheminées d'équilibre,
- c) pour les écoulements de filtration (étude systématique des parafouilles).

L'intérêt des simulateurs correspondants concerne les études préliminaires des projets hydrauliques sur lesquels on peut obtenir un gain appréciable de temps. Le Laboratoire d'Hydraulique travaille d'ailleurs en liaison avec le Centre de calcul par machines à calculer de la Faculté des Sciences de Toulouse, de manière à voir quelle est la méthode la plus utilisable dans les problèmes particuliers posés au Laboratoire.

M. BONNIN demande si le même appareil pourrait éventuellement servir, après modification, à superposer dans une même étude coup de bélier long et coup de bélier de masse.

M. PIQUEMAL pense que c'est possible : c'est un point à préciser ultérieurement.

M. LABBENS souligne l'intérêt du montage analogique de M. PIQUEMAL, en ce qui concerne les équations aux dérivées partielles et demande si l'appareil décrit donne les solutions en tous les points de la conduite et s'il pourrait être utilisé à la résolution d'un problème analogue : celui des surtensions dans un câble tendu soumis à une extrémité à une perturbation brusque, quelque chose comme une machine d'Atwood dont la poulie

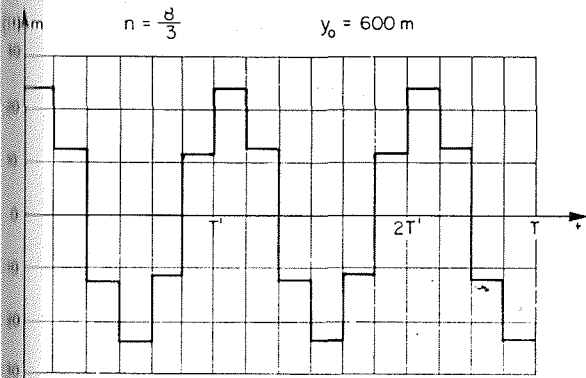


FIG. 2

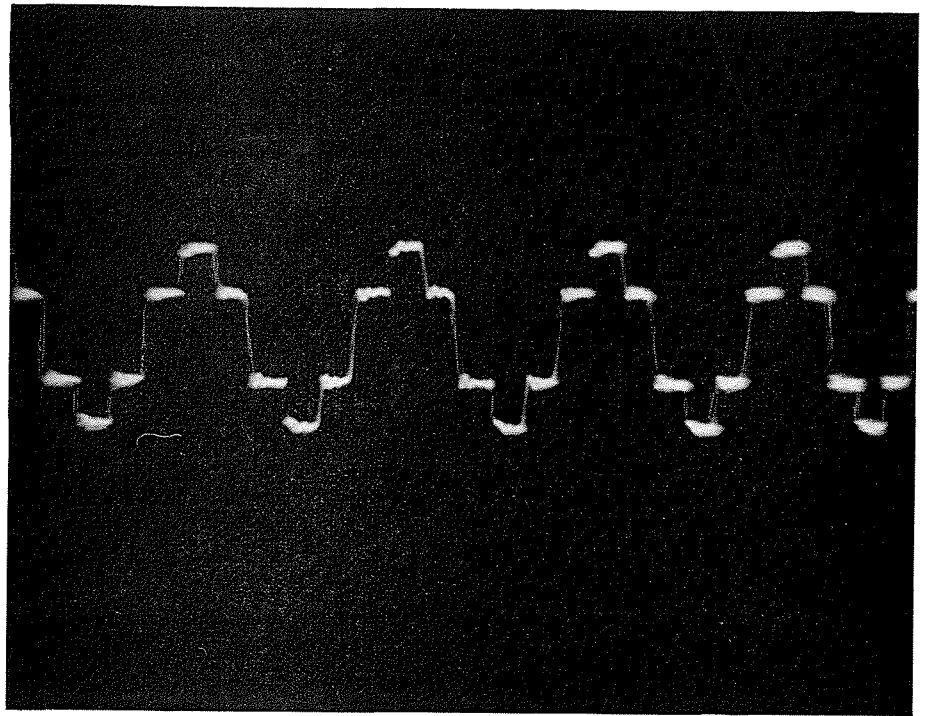


FIG. 3

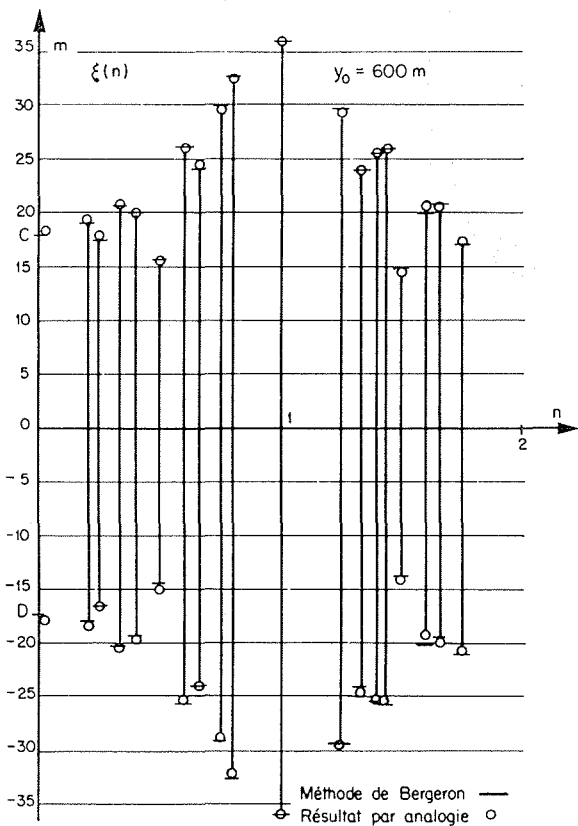


FIG. 4

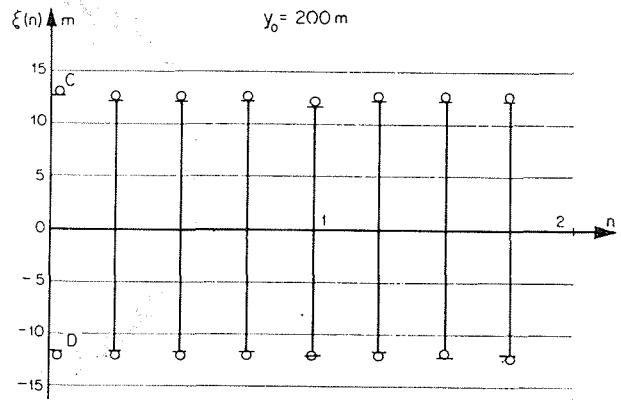


FIG. 5

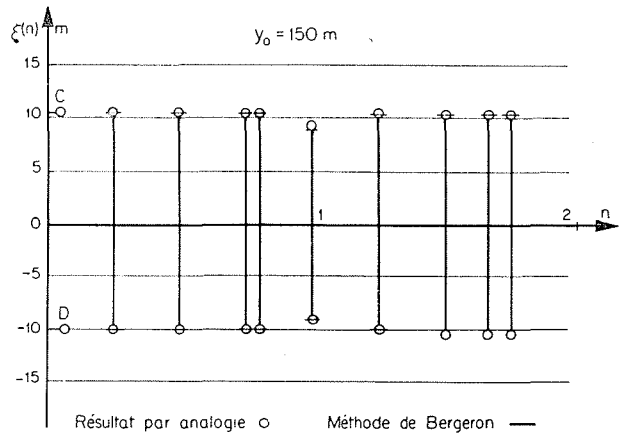


FIG. 6

serait soumise à une accélération ou une décélération brusque.

M. PIQUEMAL répond qu'en ce qui concerne la solution du système d'équation aux dérivées partielles, on ne possède sa valeur qu'en un certain nombre de points; mais le nombre de points égal à 28 dans le modèle présenté est généralement suffisamment grand pour les besoins de la pratique.

M. BOUVARD indique que la même difficulté se retrouve dans toutes les méthodes; autrement les méthodes électroniques par machines à cartes perforées donnent des résultats tout à fait comparables à ceux de la méthode analogique.

Le problème optimum reste posé entre, soit le simulateur, soit la carte perforée, soit même le modèle réduit.

La SO.GR.E.A.H. a acquis une expérience relativement importante dans ces deux dernières méthodes, mais il

ne paraît pas possible de trancher dans tous les cas, en faveur de l'une ou de l'autre de ces deux solutions, l'optimum restant chaque fois un cas d'espèce; mais l'arsenal des méthodes utilisables à résoudre un problème paraît maintenant relativement large.

M. PIQUEMAL précise que les machines du type à cartes perforées sont très intéressantes, car elles permettent de pousser la précision de la résolution mathématique du problème au-delà des besoins de l'industrie ou des recherches; mais l'utilisation de telles machines n'est pas aussi simple qu'on pourrait le croire, surtout lorsqu'on se propose de leur confier la résolution de problèmes nouveaux nécessitant des opérations préliminaires de programmation généralement longues et bien souvent délicates.

M. le Président remercie M. PIQUEMAL de sa communication et clôt la séance.

