Sur une nouvelle démonstration des relations d'Alliévi

A new proof of Allievi's équations

par CH. DUBIN

ingénieur des arts et manufactures

L'établissement des relations d'Alliévi nécessite un certain nombre d'hypothèses simplificatrices admises implicitement ou explicitement par les divers auteurs.
Le but de l'étude qui va suivre est d'examiner ces hypothèses et de nous rendre compte dans quelle mesure elles rendent ces relations plus ou moins approximatives.

Setting up Allievi's equations requires a number of simplifying assumptions which are made implicitly or explicitly by various authors.

The aim of the following study is to examine these hypotheses and to find out to what extent they affect the accuracy of the equations.

Il existe deux méthodes pour aboutir aux équations d'Alliévi :

1° La méthode différentielle qui est employée par Alliévi lui-même et de nombreux autres auteurs (Joukowsky, Jaeger, Escande, etc.);

2° La démonstration directe à l'aide du théorème des quantités de mouvement, donnée notamment par L. Bergeron dans son livre : *Du coup de bélier au coup de foudre.*

Cette dernière démonstration nous paraît plus intéressante parce que plus physique et la démonstration que nous allons donner en découle immédiatement, ainsi d'ailleurs que de la rectification apportée par M. Darrieus.

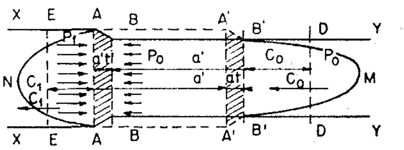
Nous devons remarquer que ces démonstrations laissent planer un doute sur le rôle que peuvent jouer les deux approximations suivantes implicitement admises :

1° La vitesse de l'eau à travers une section transversale est considérée comme constante;

2° Dans une section transversale, on considère la pression comme constante et égale à la pression sur l'axe (cette dernière approximation pouvant être théoriquement importante si le diamètre de la canalisation n'est pas négligeable au regard de la hauteur de chute).

Citons le début de la démonstration du Professeur Bergeron :

« Soit une conduite indéfinie XY de diamètre D et épaisseur e constants, dans laquelle le régime permanent initial est caractérisé par une vitesse d'écoulement C_0 c'est-à-dire un débit $q_0 = C_0 . s$, où s est la section, et une pression h_0 exprimée en hauteur de liquide, c'est-à-dire égale en kilos à $p_0 = \varpi_0 h_0$ où ϖ_0 est le poids spécifique du liquide (fig. 1).



« Supposons maintenant qu'une cause quelconque en X fasse passer la vitesse de C_0 à C_1 et, conséquemment, la pression de h_0 à $h_0 + F$ en un temps t' (ce sera, par exemple, une fermeture de vanne que l'on arrêtera au bout du temps t'). Nous savons que cette variation de régime se propagera vers Y à une célérité a'. Sous la surpression F, le tuyau augmente d'ailleurs de diamètre et, son inertie étant négligeable, cette augmentation de diamètre se propage avec la même célérité absolue a'.

« A un temps quelconque τ, le commencement de la variation de régime se produit donc en B à une distance $\overline{XB} = a' \tau$ et la fin en A à une distance $\overline{XA}=a'(\tau - t')$, c'est-à-dire que la variation de régime produite en X pendant une durée t' s'étale le long de la conduite sur une longueur $a't'$ qui est le front de l'onde, lequel avance de a' par unité de temps en restant identique à lui-même. Une seconde après, le front d'onde est donc en A'B' tel que $\overline{AA'}=\overline{BB'}=a'$.

« Appliquons à ce phénomène le théorème des quantités de mouvement projetées.

« Considérons le volume liquide compris entre la tranche AA d'une part, et la tranche DD située à une distance C_0 de la tranche B'B' d'autre part. Au bout d'une seconde, les mêmes molécules occuperont le volume compris entre la tranche B'B' d'une part et la tranche EE située à une distance C_1 de AA d'autre part. En effet, la tranche DD avance à la vitesse initiale C_0 pendant toute cette seconde et arrive en B'B', tandis que la tranche AA avance à la nouvelle vitesse C_1 et arrive en EE. »

C'est ici qu'apparaît le rôle de la première approximation. En toute rigueur, on devrait dire :

1° Que les molécules situées en B'B' à l'instant 1 proviennent de molécules situées sur un « profil de vitesses » B'MB' à l'instant 0;

2° Que les molécules situées en AA à l'instant 0 seront sur un « profil de vitesse » ANA à l'instant 1.

Poursuivons la démonstration du Professeur Bergeron :

« La variation de quantité de mouvement de l'eau dans la conduite, pendant cette unité de temps, se limite à celle du volume ci-dessus, et cette variation est égale à la somme de toutes les forces appliquées au volume considéré, projetées sur la direction de la vitesse; c'est l'énoncé même du théorème.

« Le volume ABB'D comprend la portion AB de front d'onde dont nous appellerons M la quantité de mouvement, puis le volume $(a'+C_0).s$ dont toutes les molécules sont à la vitesse C_0, de sorte que sa quantité de mouvement, projetée sur l'axe de la conduite, est :

$$[\rho_0 (a'+C_0)s]\ C_0 \qquad (1)$$

où $\rho_0=\varpi_0/g$ est la masse spécifique à la pression $p_0=\varpi_0 . h_0$.

« Le volume venu en EA'B' comprend la portion A'B' de front d'onde dont la quantité de mouvement est restée M puis le volume $(C_1+a')(s+ds)$ dont toutes les molécules sont maintenant à la vitesse C_1, de sorte que leur quantité de mouvement est :

$$[\rho_1 (a'+C_1)\ s]\ C_1 \qquad (2)$$

où ρ_1 est la masse spécifique à la pression $p_1=\varpi_1 h_1$ (l'augmentation de section ds, étant toujours du second ordre par rapport à s, doit être négligée.) »

La quantité de mouvement définie en (1) devrait en toute rigueur s'écrire :

$$I_0=\int [\rho_0 (a'+v) . v]\ ds$$

l'intégrale s'étendant à toute la section s et la vitesse v étant celle qui correspond à un élément ds de cette surface. Intégrale qui peut s'écrire, si on appelle C_0 la vitesse moyenne :

$$I_0=\rho_0\, a'\, C_0 s+\rho_0 \int v^2\, ds$$

On voit que cette valeur est différente de la valeur (1) car on ne peut pas avoir :

$$\int v^2 ds=C_0^2\, s$$

sauf si v est constant (ce qui est contraire à nos hypothèses).

Reprenons donc la démonstration en appliquant le théorème des quantités de mouvement projetées, non plus à l'ensemble des molécules mais aux molécules comprises dans un cylindre horizontal de base ds. Pour ce cylindre élémentaire, nous raisonnerons exactement comme pour la totalité de la conduite, mais en remplaçant les vitesses moyennes par les vitesses vraies, et la variation de quantités de mouvement s'écrira :

$$ds\ [a' (\rho_1\, v_1 - \rho_0\, v_0) - \rho_0\, v_0^2 + \rho_1\, v_1^2] \qquad (3)_b$$

Les forces appliquées à ce volume d'eau sont:

$$(p_0 - p_1)\ ds$$

p_0 et p_1 étant pris à la cote du cylindre horizontal de base ds. On a donc, pour chaque cylindre élémentaire :

$$p_1 - p_0=a' (\rho_0\, v_0 - \rho_1\, v_1)+\rho_0\, v_0^2 - \rho_1\, v_1^2$$

Poursuivons le calcul en nous inspirant de la démonstration de M. Darrieus.

Remarquons que l'on a, entre la vitesse absolue a et la vitesse relative a', la relation :

$$a=a'+\frac{v_0+v_1}{2}$$

ce qui donne :

$$p_1 - p_0=\left(a - \frac{v_0+v_1}{2}\right)(\rho_0\, v_0 - \rho_1\, v_1)+\rho_0\, v_0^2 - \rho_1\, v_1^2$$

ou :

$$p_1 - p_0=a\, (\rho_0\, v_0 - \rho_1\, v_1)+\rho_0\, v_0^2 - \rho_1\, v_1^2+\frac{\rho_1 - \rho_0}{2}\, v_1\, v_0$$

et en posant :

$$\Delta\rho=\rho_1 - \rho_0 \qquad \text{et} \qquad \rho_{moy}=\bar{\rho}=\frac{\rho_0+\rho_1}{2}$$

on obtient :

$$p_1 - p_0 = a\,\bar{\rho}\,(v_0 - v_1) + \bar{\rho}\,\frac{v_0^2 - v_1^2}{2}$$

$$- a\,\Delta\rho\,\frac{v_0 + v_1}{2} - \Delta\rho\,\frac{(v_0 - v_1)^2}{4}$$

Mais l'équation de la conservation de masse donne :

$$a'\,(\rho_0 - \rho_1) + \rho_0\,v_0 - \rho_1\,v_1 = 0$$

ou en reprenant les notations ci-dessus et simplifiant :

$$a\,.\,\Delta\rho = \bar{\rho}\,(v_0 - v_1)$$

Portons cette valeur de $\Delta\rho$ dans $(3)_b$; les deuxième et troisième termes s'annulent et il reste :

$$p_1 - p_0 = a\,\bar{\rho}\,(v_0 - v_1) - \bar{\rho}\,\frac{(v_0 - v_1)^3}{4\,a}$$

$$= a\,\bar{\rho}\,(v_0 - v_1)\left[1 - \frac{(v_0 - v_1)^2}{4\,a^2}\right]$$

Voilà ce qu'en toute rigueur on peut trouver pour le cylindre élémentaire de base ds. Nous pouvons étendre cette relation à toute la conduite grâce uniquement aux approximations suivantes :

1° Nous admettrons que $\bar{\rho}$ varie peu et qu'on peut écrire $\bar{\rho} = \rho$.

Il est facile d'apprécier l'erreur relative commise de ce fait, car la masse spécifique, pour une pression donnée ρ_p, est liée à la masse spécifique ρ à la pression atmosphérique par la relation :

$$\rho_p = \rho\,[1 + (p/\varepsilon)]^3 \;\#\; \rho\,[1 + (3\,p/\varepsilon)]$$

ce qui donne une erreur relative inférieure à 1/1 000 pour une variation de pression de 1 à 12 kg par exemple.

2° Nous négligerons :

$$\frac{(v_0 - v_1)^2}{4\,a^2}$$

(inférieur à $1/10^6$ pour des vitesses inférieures à 2 m) devant l'unité.

Il nous reste alors :

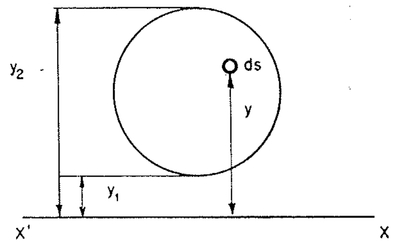
$$p_1 - p_0 = a\,\rho\,(v_0 - v_1)$$

ce qui, étendu à la surface s, donne :

$$\int (p_1 - p_0)\,ds = \int a\,\rho\,(v_0 - v_1)\,ds$$

p_1 et p_0 sont constants sur tous les éléments ds centrés sur un même plan horizontal.

Soit X'X un axe horizontal de référence et ds un élément à une distance Y de X'X (fig. 2).



Si P est la pression sur l'axe de référence, on aura :

$$\int^S p_0\,ds = \int^S (P - \rho\,g\,y)\,ds = P\,s - \rho\,g \int^S y\,ds$$

mais si l'axe de référence passe par le centre de gravité de la section transversale :

$$\int y\,ds \text{ est nul.}$$

Par conséquent, on ne fait aucune approximation et ceci, quel que soit l'ordre de grandeur des diamètres de la conduite par rapport aux hauteurs d'eau, en prenant comme pression la pression qui s'exerce à hauteur du centre de gravité de la section transversale.

Evaluons maintenant :

$$\int a\,\rho\,(v_0 - v_1)\,ds = a\,\rho \int (v_0 - v_1)\,ds$$

mais :

$$\int v_0\,ds = C_0\,s,$$

par suite de la définition même de la vitesse moyenne; donc :

$$a\,\rho \int (v_0 - v_1)\,ds = a\,\rho\,(C_0 - C_1)\,s$$

et finalement :

$$p_1 - p_0 = a\,\rho\,(C_0 - C_1)$$

La démonstration est valable quel que soit le profil de vitesse; elle le reste donc même si on admet que le profil de vitesse en mouvement varié n'a rien à voir avec le profil en mouvement permanent.

Nous avons donc démontré que les hypothèses simplificatrices auxquelles on a recours pour démontrer la formule d'Alliévi n'entraînaient aucune approximation supplémentaire, car, en définitive, « tout se passe comme si » on n'avait pas fait ces hypothèses.