Perméabilité des digues en enrochements aux ondes de gravité périodiques *

The perviousness of rock fill breakwaters to periodic gravity waves *

(SUITE)

(Cf. *la Houille Blanche*, n° 6, 1957)

PAR B. LE MÉHAUTÉ

INGÉNIEUR E.N.S.E.H.T. — INGÉNIEUR A LA SOGREAH

(Actuellement Professeur Adjoint à l'Ecole Polytechnique de Montréal)

AVANT-PROPOS et NOTATIONS.

PREMIÈRE PARTIE. — ÉTUDE DES LOIS DE L'ÉCOULEMENT PÉRIODIQUE DANS UN MASSIF PERMÉABLE.

Chap. I. *Equations du mouvement.*

Chap. II. *Intégration de l'équation générale du mouvement.*

Chap. III. *Perméabilité d'un massif long soumis à une onde incidente.*

Chap. IV. *Massif de largeur faible par rapport à la longueur d'onde.*

DEUXIÈME PARTIE. — ÉTUDE DES LOIS DE SIMILITUDE DE LA PERMÉABILITÉ D'UN MASSIF EN ENROCHEMENTS.

Chap. I. *Position du problème. Difficultés d'une semblable étude.*

Chap. II. *Etablissement des règles de similitude de l'écoulement à travers un massif perméable.*

Chap. III. *Similitude des écoulements dans un massif en enrochements en régime permanent.*

Chap. IV. *Possibilité d'application des règles de similitude.*

Chap. V. *Applications pratiques aux digues en enrochements.*

Remarques.

TROISIÈME PARTIE. — RECHERCHES EXPÉRIMENTALES.

Chap. I. *Appareillage expérimental : 1) Canaux à houle. 2) Appareillage de mesure. 3) Les mesures des caractéristiques du massif.*

Chap. II. *Résultats expérimentaux obtenus avec des massifs de largeur constante.*

Chap. III. *Description physique des phénomènes et examen des résultats expérimentaux.*

Chap. IV. *Vérification des lois de similitude.*

Chap. V. *Calculs de profils de digues en enrochements et résultats d'essais.*

Chap. VI. *Précision des résultats : 1) Erreur sur la connaissance des lois de l'écoulement. 2) Erreurs expérimentales. 3) Erreurs sur la connaissance des conditions naturelles.*

CONCLUSION.

PREFACE and HEADINGS.

PART 1. STUDY OF THE PERIODIC FLOW LAWS IN A PERMEABLE STRUCTURE.

Chapter I. *Equations of movement.*

Chapter II. *Integration of the general equation of movement.*

Chapter III. *Permeability of an extended structure subjected to an incident wave.*

Chapter IV. *Small width structure in relation to wave length.*

PART 2. STUDY OF THE SIMILITUDE LAWS FOR PERMEABILITY IN A ROCK FILLED STRUCTURE.

Chapter I. *Posing the problem. Difficulties of a similarity study.*

Chapter II. *Establishing the rules for flow similarity through a permeable structure.*

Chapter III. *Flow similitude in a rock filled structure in permanent regime.*

Chapter IV. *Possible application of similitude laws.*

Chapter V. *Practical application to rock fill dykes.*

COMMENTS.

PART 3. EXPERIMENTAL RESEARCH.

Chapter I. *Experimental equipment : a) Wave flumes. b) Instrument equipment. c) Measuring the characteristics of the structure.*

Chapter II. *Results obtained from tests on constant width structures.*

Chapter III. *Physical description of the phenomena and analysis of test results.*

Chapter IV. *Verification of the similitude laws.*

Chapter V. *Calculation of rock fill dyke profiles and test results.*

Chapter VI. *Accuracy of results : a) Error associated with the flow laws. b) Experimental errors. c) Error from uncertain knowledge of the true life conditions.*

CONCLUSION.

* Thèse présentée devant la Faculté des Sciences de l'Université de Grenoble pour l'obtention du titre d'Ingénieur-Docteur.

Cf. ERRATA, p. 115.

ERRATA

PERMÉABILITÉ DES DIGUES EN ENROCHEMENTS AUX ONDES DE GRAVITÉ PÉRIODIQUES

M. Le Méhauté nous a fait parvenir une liste d'ultimes additions et rectifications, dont celles concernant la première partie de sa thèse parue dans notre numéro 6/1957, nous sont malheureusement parvenues après le tirage. Nous prions donc nos lecteurs de trouver ci-après lesdites corrections.

Page	Colonne	Ligne	Au lieu de :	Lire :
905	1	9	...similitude de Reynolds...	...similitude des pertes de charge, fonction du nombre de Reynolds...
905	2	14 17	$\Psi_1(U)$ $\Psi^2(U)$	$\vec{\Psi}_1(U)$ $\vec{\Psi}_2(U)$
906	1	11	$\hat{\Gamma}$: déphasage introduit par présence du massif dans la transmission de la digue;	$\hat{\Gamma}$ déphasage introduit par la présence du massif dans la transmission à travers la digue;
906	2	7° en remontant	$\left(\frac{\vec{\partial n}}{\partial u} = 0\right)$	$\left(\frac{\vec{\partial u}}{\partial u} = 0\right)$
907	1	en note	$\Psi_2(U)$	$\vec{\Psi}_2(U)$
907 910 911	2 1 1	partout » »	Ψ_1 Ψ_2	$\vec{\Psi}_1$ $\vec{\Psi}_2$
908	2	9	...que l'angle de $[\vec{u}]$ avec $[\vec{u}]$ (ou $\vec{U}$)...	...que l'angle de $\vec{u}$ avec $[\vec{u}]$ (ou $\vec{U}$)...
912	1	1	$\frac{1}{\varphi} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \frac{p}{\varphi} + gz \right)$	$\frac{1}{\varphi} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{p}{\varphi} + gz \right)$
912	2	11	$\omega = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$	$\varphi = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$
914	2	4° en remontant	$\frac{D}{\varepsilon} \left[\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial t^2} \right] + \dots\dots\dots = \left[\frac{\partial \varphi_h}{\partial t} \right]_{x=l}$	$\frac{D}{\varepsilon} \left[\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial t^2} \right] + \dots\dots\dots = \left[\frac{\partial \varphi_h}{\partial t} \right]_{x \geq l}$
915	1	4	$[H_1]_{x < 0} \dots\dots\dots = [H_2]_{x > l}$	$[H_1]_{x \leq 0} \dots\dots\dots [H_2]_{x \geq l}$
915	1	5	$\left[\frac{\partial \varphi_c}{\partial t} \right]_{x=0} = \dots\dots\dots$	D'où : $\left[\frac{\partial \varphi_c}{\partial t} \right]_{x=0} = \dots\dots\dots$
917	1	30	$\dots\dots\dots z'' + 1$	$\dots\dots\dots z'' + l$
918	2	23	$= R t \omega e^{i(\omega t + \xi)} = 0$	$= R t \omega e^{i(\omega t + \xi)} = 0$

DEUXIÈME PARTIE

ÉTUDE DES LOIS DE SIMILITUDE DE LA PERMÉABILITÉ D'UN MASSIF EN ENROCHEMENTS

CHAPITRE I

POSITION DU PROBLÈME. DIFFICULTÉS D'UNE SEMBLABLE ÉTUDE

Si $2a$ est l'amplitude de l'onde incidente, $2a_t$ l'amplitude de l'onde transmise à travers l'ouvrage, est-il possible, par simple mesure sur modèle réduit de ces quantités, de connaître le coefficient de transmission $t = (2a_t / 2a)$ de l'ouvrage nature?

Si E est l'échelle des dimensions linéaires des amplitudes des ondes incidentes et transmises, ceci implique que l'on ait :

$$2a' = 2a \times E$$

$$2a'_t = 2a_t \times E$$

l'indice ' étant relatif au modèle (similitude de Froude).

Pour obtenir ces conditions, il faut :

- 1) respecter les phénomènes extérieurs et aux limites du massif (déferlement, suintement...);
- 2) respecter le phénomène d'amortissement des ondes à travers le massif en enrochements.

La première condition impose que l'amplitude et la longueur des ondes incidentes, et la forme générale des ouvrages (pente des parements...) soient en similitude géométrique (similitude de Froude). Sans doute faut-il attribuer aux phénomènes de déferlement par exemple un « effet d'échelle », mais qui reste faible (*).

La deuxième condition nécessite la connaissance des lois de l'écoulement en milieu perméable et l'établissement de règles de similitude répondant principalement aux conditions de Reynolds.

Or, le problème de l'écoulement de l'eau dans les noyaux des ouvrages maritimes est particu-

lièrement délicat, si on veut obtenir une certaine précision du fait, en particulier, des circonstances suivantes :

1. Aux conditions de similitude de Froude régissant l'ensemble du modèle et l'étude des houles, s'opposent celles des forces de frottement qui tiennent compte des lois de l'écoulement à travers les massifs poreux et qui sont également appliquées dans cette étude. Or, on sait qu'il est impossible en général de rendre compatibles les similitudes de Froude et celle des pertes de charge, fonction du nombre de Reynolds.

2. Dans la nature, toutes les houles superposées sont, indépendamment de leurs caractéristiques propres, dans le même état de turbulence. Ceci correspond pratiquement à un régime généralement turbulent ou, au moins, transitoire.

Sur modèle, les lois de l'écoulement relèvent du régime laminaire ou transitoire, et dépendent alors directement des caractéristiques de la houle unique reproduite.

3. Les digues sont en général constituées de catégories d'enrochements de granulométrie et de porosité différentes, et présentent par suite un caractère d'hétérogénéité marqué.

4. Les difficultés mentionnées ci-dessus sont encore accrues par le fait que l'écoulement dans le massif n'est pas permanent, mais a des vitesses qui varient à chaque instant et même changent de sens. Cette dernière circonstance rend très délicate l'application de distorsions spéciales destinées à corriger le modèle.

5. Enfin la différence de niveau de part et d'autre de la digue ne dépend pas seulement des caractéristiques de la digue, mais aussi de la configuration des lieux au voisinage de celle-ci.

Faut-il donc abandonner tout espoir de trouver une solution à ce problème? Nous ne le croyons pas, car il est pratique courante en hydraulique d'adjoindre aux ressources de la

(*) Tous les essais effectués dans ce sens ont montré que l'effet d'échelle était négligeable. On sait d'ailleurs y remédier en augmentant artificiellement la rugosité de l'ouvrage à l'aide de grillage.

théorie celles de l'art de l'ingénieur. Ainsi, sans prétendre à la rigueur absolue, arrive-t-on à s'approcher très près de la vérité.

Nous sommes en droit, en effet, de faire de nombreuses hypothèses simplificatrices, d'autant plus qu'il est illusoire de chercher ici une grande précision : les modifications des digues dans le temps, par suite du tassement des matériaux et de l'action accidentelle des houles, influent sensiblement sur la valeur de l'amortissement.

De plus, les ondes sont mal analysées dans la nature; il est difficile, *a fortiori*, de reproduire leur complexité et leur irrégularité sur modèle.

L'étude suivante ne donne donc qu'une idée approchée des lois de similitude à respecter. Cependant, les renseignements quantitatifs obtenus, sensiblement exacts en valeurs relatives, doivent donner une idée suffisante de la valeur de cet amortissement.

CHAPITRE II

ÉTABLISSEMENT DES RÈGLES DE SIMILITUDE DE L'ÉCOULEMENT A TRAVERS UN MASSIF PERMÉABLE

Nous avons vu que le mouvement de l'eau à travers un massif en enrochements était régi par l'équation :

$$\frac{D}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + 1/\varphi \vec{\text{grad}} p + \vec{\text{grad}} gz + R \vec{U} = 0$$

L'équation du mouvement dans le modèle réduit sera :

$$\frac{D'}{\varepsilon'} \frac{\partial \vec{U}'}{\partial t'} + 1/\varphi' \vec{\text{grad}} p' + \vec{\text{grad}} gz' + R \vec{U}' = 0$$

Or, aux limites du massif, les vitesses spécifiques U , se raccordant par continuité aux mouvements extérieurs en similitude de Froude, doivent elles-mêmes être en similitude de Froude :

$$U' = \sqrt{E} U \quad (1)$$

ce qui entraîne :

$$T' = \sqrt{E} T \quad (2)$$

De même, on doit avoir (similitude de Froude) :

$$\begin{aligned} p' &= E p & 1/\varphi' \vec{\text{grad}} p' &= 1/\varphi \vec{\text{grad}} p \\ z' &= E z & \vec{\text{grad}} gz' &= \vec{\text{grad}} gz \end{aligned}$$

On en déduit les deux conditions :

$$\begin{aligned} \frac{D}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{D'}{\varepsilon'} \frac{\partial U'}{\partial t'} \\ R U &= R' U' \end{aligned}$$

Soit, compte tenu des égalités (1) et (2) :

$$\frac{D}{\varepsilon} = \frac{D'}{\varepsilon'} \quad (3)$$

$$R \sqrt{E} = R' \quad (4)$$

Il va de soi que la condition $\varepsilon = \varepsilon'$ est toujours réalisable. Il s'ensuit que D doit être égal à D' . Or, rappelons que D est une fonction de $[(Ud/\nu), (d^2/T\nu), \varepsilon]$. Il faut donc, théoriquement, s'assurer que le régime d'écoulement est sensiblement le même sur le modèle et dans la nature : pratiquement, le problème est plus simple, car D varie très peu et il suffit de choisir une échelle pas trop petite pour respecter cette condition.

Les forces d'inertie à travers l'ouvrage seront donc conservées en assurant au modèle le même indice de vide que le massif de la nature. Cette condition est pratiquement facile à réaliser.

La condition $R' = \sqrt{E} R$ exprimant la conservation des forces de frottement est l'expression de la similitude de Reynolds.

C'est dans la réalisation pratique de cette condition que réside la difficulté de l'étude. Il nous faut donc chercher à connaître la valeur du coefficient de viscosité fictif R en fonction des caractéristiques du milieu.

Pour cela, nous appliquerons les règles obtenues pour les écoulements permanents et nous en verrons les possibilités d'application aux mouvements périodiques.

CHAPITRE III

SIMILITUDE DES ÉCOULEMENTS DANS UN MASSIF EN ENROCHEMENTS
EN RÉGIME PERMANENT

Nous avons vu que la loi de l'écoulement en milieu perméable était assez bien représentée par la loi :

$$\frac{\Delta H}{\Delta l} = C \left(\frac{Ud}{\nu} \right) f(\varepsilon) \frac{U^2}{2gd} \quad (5)$$

L'égalité des gradients de pression imposée par la condition de similitude s'écrit :

$$\frac{\Delta H}{\Delta l} = \frac{\Delta H'}{\Delta l'}$$

soit, d'après l'équation ci-dessus :

$$C \cdot f \cdot \frac{U^2}{2gd} = C' \cdot f' \cdot \frac{U'^2}{2gd'}$$

Avec $U^2/U'^2 = E$ (similitude de Froude) et $\varepsilon = \varepsilon'$ entraînant : $f = f'$, on obtient, après simplification :

$$\frac{C}{d} = \frac{EC'}{d'} \quad (6)$$

Notons que cette condition aurait pu s'obtenir directement à partir des relations (4) et compte tenu de l'égalité :

$$R = \frac{C(Ud/\nu)}{2\varphi} f(\varepsilon) \frac{U}{d}$$

Pour que cette condition soit réalisée, posons *a priori* :

$$d' = KEd$$

K étant le « coefficient de grossissement » ou de distorsion du matériau.

L'égalité (6) devient, compte tenu de la valeur de :

$$\frac{U'd'}{\nu} = \frac{Ud}{\nu} \times KE^{3/2}$$

$$KC \left(\frac{Ud}{\nu} \right) = C \left(KE^{3/2} \frac{Ud}{\nu} \right) \quad (7)$$

Cette équation implicite donne le coefficient de grossissement du matériau en fonction de l'échelle et du nombre de Reynolds.

Il est pratique de remplacer le nombre de Reynolds par d'autres variables plus accessibles aux observations.

L'équation (5) s'écrit encore, en multipliant les deux nombres par le produit :

$$2gd f(\varepsilon) \left(\frac{d}{\nu} \right)^2$$

$$\frac{\Delta H}{\Delta l} \frac{2g}{\nu} d^3 f(\varepsilon) = \left(\frac{Ud}{\nu} \right)^2 C \left(\frac{Ud}{\nu} \right) \quad (8)$$

FIG. 6. — Abaque général de la similitude des perméabilités ($d_{\text{modèle}} = KE d_{\text{nature}}$)

Coefficient de grossissement des matériaux K, en fonction :
de l'échelle E du modèle, de la charge H, de la largeur du massif l,
de la granulométrie d, de la porosité ε .

L'élimination de Ud/ν entre les équations (7) et (8) donne directement K en fonction de l'échelle E et du groupement de variables :

$$\frac{\Delta H}{\Delta l} \cdot \frac{2g}{\nu^2} \cdot d^3 \cdot f(\varepsilon)$$

Le résultat de ces calculs est figuré sur l'abaque ci-joint calculé pour une valeur du coefficient cinématique de viscosité $\nu=0,01$ (fig. 6).

Lorsque dans la nature le régime est laminaire (et *a fortiori* sur le modèle), l'égalité des gradients de pression, compte tenu de la valeur particulière de la fonction $C=C^{\text{te}}/Ud$ s'écrit, toutes simplifications faites :

$$\frac{U}{d^2} = \frac{U'}{d'^2}$$

ce qui donne successivement :

$$\frac{d'}{d} = \sqrt{\frac{U'}{U}} = \sqrt[4]{E}$$

On trouve facilement que le coefficient de grossissement K est alors égal à :

$$K = \frac{1}{E^{3/4}}$$

donc indépendant du nombre de Reynolds et du gradient de charge.

Ces deux relations simples présentent un certain intérêt pour l'étude des milieux poreux : elle permet de reproduire des écoulements sur modèle en similitude de Froude, c'est-à-dire en respectant les débits et les pertes de charge. Or, le procédé usuel basé sur le tracé des lignes de courant et le calcul des débits d'infiltration ne permettait pas de reproduire ces conditions. On peut donc représenter correctement sur un même modèle le débit qui s'infiltre à travers un batardeau par exemple, et à travers une dérivation provisoire.

Notre méthode s'étend à tout type d'écoulement.

Si l'écoulement est turbulent sur le modèle, et *a fortiori* dans la nature, l'égalité du gradient de charge s'écrit, en simplifiant à l'extrême pour ne garder que les termes essentiels :

$$\frac{U^2}{d} = \frac{U'^2}{d'}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{d'}{d} = \frac{U^2}{U'^2} = E$$

et $K=1$. Nous retrouvons bien la similitude de Froude totale.

Si maintenant l'écoulement dans la nature est turbulent et laminaire sur le modèle, on démontre facilement que les courbes $K=C^{\text{te}}$ sont des fonctions de forme :

$$\frac{1}{E} = C^{\text{te}} \left[\frac{\Delta H}{\Delta l} d^3 f(\varepsilon) \right]^{1/6}$$

Il est aussi possible de respecter la similitude des pertes de charge et les débits sur un modèle distordu.

λ étant l'échelle horizontale du modèle et μ l'échelle verticale, nous avons alors la condition :

$$\frac{\mu}{\lambda} \frac{\Delta H}{\Delta l} = \frac{\Delta H'}{\Delta l'}$$

qui s'écrit encore, avec $(U^2/U'^2)=\mu$:

$$\frac{\lambda C'}{d'} = \frac{C}{d}$$

Si l'on pose *a priori* $d'=KEd$, on a l'équation :

$$KC \left(\frac{Ud}{\nu} \right) = C \left(K \lambda \mu^{1/2} \frac{Ud}{\nu} \right)$$

On peut donc utiliser l'abaque précédent à condition de remplacer l'échelle E du modèle non distordu par l'expression $(\lambda \mu^{1/2})^{2/3}$ du modèle distordu.

CHAPITRE IV

POSSIBILITÉ D'APPLICATION DES RÈGLES DE SIMILITUDE

La formule précédente n'est valable en toute rigueur que pour les écoulements en charge, le gradient de vitesse spécifique étant nul, aux effets de parois près; il n'en est pas de même dans un écoulement à surface libre.

1. ECOULEMENT CONTINU A SURFACE LIBRE (fig. 7) :

Nous avons vu que le coefficient de grossissement du matériau dépend du nombre de Reynolds de l'écoulement, donc de la vitesse spéci-

fique. En toute rigueur, il faudrait donc faire varier le coefficient de grossissement d'un point à l'autre du massif, puisque la section (donc la vitesse) varie; or :

FIG. 7. — Ecoulement permanent à surface libre dans un massif d'enrochements.

- 1° On connaît mal la répartition des vitesses;
- 2° On conçoit la difficulté pratique de réaliser de tels massifs en modèle réduit;
- 3° L'influence des variations de vitesses dans l'espace introduit une correction tout à fait négligeable sur la détermination du coefficient de grossissement du matériau;
- 4° La détermination d'un seul coefficient K est suffisamment précise par rapport à la connaissance des lois et des données sur les granulométries employées dans la nature, les effets de tassement, etc.;
- 5° L'unique coefficient K employé pour construire le modèle n'empêche pas de retrouver une répartition des vitesses presque identique à celle de la nature.

On peut donc conclure qu'en régime continu l'application des règles de similitude précédemment établies s'appliquent avec une précision équivalente à celle de la connaissance des lois des écoulements en milieu perméable.

2. ECOULEMENT PÉRIODIQUE :

Voyons maintenant comment nous pouvons envisager l'application de ces règles au régime périodique.

Lorsque le régime est laminaire dans la nature, le coefficient de grossissement K est indépendant du nombre de Reynolds, donc de la charge. La construction du modèle en vue de l'étude de régime périodique est donc théoriquement possible (mais les forces capillaires faussent alors le résultat).

En toute rigueur dans le cas général, le coefficient de grossissement K devrait varier avec le temps. Il nous faut donc adopter des valeurs « efficaces » permettant de respecter les effets moyens au cours d'une période.

Or, dans un massif en charge, en régime visqueux, à une charge sinusoïdale correspondent des vitesses sinusoïdales. En régime turbulent, à cette même charge correspond une courbe de vi-

tesse périodique qui, développable en série de Fourier, contient des harmoniques impaires dues à la non-linéarité du frottement.

De plus, près de la surface libre, lorsque l'amplitude est grande par rapport à la profondeur, la dissymétrie de l'écoulement introduit des harmoniques paires (fig. 8).

Si l'on se limite au premier terme de la série de Fourier donnant $U(t)$, une résistance linéaire correspondant au régime laminaire donne (analogie électrique) une valeur efficace :

$$U_e = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{1,414}$$

U_e étant la valeur efficace et U_m la valeur maximum de la vitesse.

Une résistance quadratique correspondant au régime turbulent donne :

$$U_e = \frac{U_m}{8\sqrt{1/3}} = \frac{U_m}{1,388}$$

FIG. 8. — Ecoulement périodique à surface libre dans un massif d'enrochements.

Si l'on avait pris plus simplement la valeur moyenne, on aurait :

$$U_e = \frac{2 U_m}{\pi} = \frac{U_m}{1,570}$$

La différence entre ces trois notions de valeurs efficaces, correspondant à différents régimes de turbulence, est très faible et l'on peut prendre par exemple :

$$U_e = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Mais nous avons vu que le coefficient K est donné en fonction du groupement de variables :

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} d^3 f(\varepsilon)$$

au lieu de Ud/ν .

Il faut donc prendre au lieu de :

$$\frac{U_e d}{\nu} ; \frac{\Delta H_e}{\Delta t} d^3 f(\varepsilon)$$

avec, par exemple :

$$H_e = \frac{H_m}{\sqrt{2}} = \frac{a(1+r)}{\sqrt{2}}$$

$2a$ étant l'amplitude de la houle incidente et r le coefficient de réflexion de la digue $a(1+r)$ est approximativement l'amplitude du clapotis partiel sur la digue.

En fait, le problème se présente rarement aussi simplement. Si cette façon de procéder est

valable pour ces massifs de faibles largeurs relatives, elle ne peut être valable pour les massifs longs, l'amplitude du mouvement variant d'un point à l'autre du massif.

Ceci nous conduit à étudier maintenant le cas pratique des digues en enrochements.

CHAPITRE V

APPLICATIONS PRATIQUES AUX DIGUES EN ENROCHEMENTS

Les précédentes théories s'appliquent sans difficulté à un massif de largeur constante et de granulométrie homogène, les variables H_e , l , d et ε étant alors bien déterminées.

Le cas général de digues en enrochements est moins bien défini : la largeur varie avec la profondeur, des couches de matériaux hétérogènes se superposent d'une façon complexe, enfin des phénomènes quadratiques sur les parois en pente de la digue, tel que le déferlement, ont des effets non négligeables sur le coefficient de transmission.

Pour déterminer K , nous allons donc étudier successivement comment choisir :

- 1) l'indice de vide ε ,
- 2) la granulométrie d ,
- 3) la largeur l ,
- 4) la largeur efficace H_e .

1. L'INDICE DE VIDE ε :

L'indice de vide est en général très mal connu lors de la réalisation d'une digue en enrochements.

Faute de données précises sur ce paramètre (dont l'importance est pourtant considérable pour le problème qui nous occupe), nous prendrons les valeurs suivantes pour les différents matériaux utilisés dans la construction des digues :

- moellons (de 5 à 100 kg) 25 %
- tout-venant de carrière (de 20 à 500 kg) 30 %
- blocs de 1^{re} catégorie (de 500 à 2 000 kg) 35 %
- blocs de 2^e catégorie (de 2 000 à 5 000 g) 38 %
- blocs de 3^e catégorie
(supérieurs à 5 000 kg) 40 %

Notons, à titre de référence, quelques chiffres.
A Marseille, le tout-venant a un indice de vide

de 31 %, à Cherbourg il n'aurait que 25 %, à Djidjelli une digue en blocs artificiels de 21 m³ aurait un indice de vide de 39 % (aussi y a-t-il à l'intérieur du port une agitation sensible).

Nous avons vu qu'il fallait que l'indice de vide sur le modèle soit le même que dans la nature. Cette condition suppose donc que les courbes granulométriques modèle et nature dans une représentation en pourcentage cumulé doivent se déduire l'une de l'autre par une translation parallèle à l'axe des granulométries (condition d'ailleurs suffisante mais non nécessaire).

Il y a donc une condition « hydrostatique » dans le choix des granulométries du modèle, dont le but est de respecter l'indice de vide.

2. LE DIAMÈTRE d :

Il y a aussi une condition « hydrodynamique », condition que nous avons établie pour des matériaux de granulométrie homogène et dont le résultat peut être résumé par la formule :

$$d_{\text{modèle}} = KEd_{\text{nature}}$$

Cette formule reste valable pour des matériaux de granulométries hétérogènes à condition de connaître la granulométrie nature « caractéristique » d_c à laquelle les calculs doivent se référer.

La granulométrie caractéristique d_c doit être déterminée à partir de la courbe granulométrique du mélange. Or, la loi de turbulence est caractérisée par le nombre de Reynolds Ud/ν dans laquelle d représente la granulométrie, représentation commode et bien définie. Mais en fait, ce sont les dimensions des interstices qui régissent les écoulements. Quand l'interstice moyen est une fonction simple du diamètre des enrochements (lorsque la granulométrie est uniforme), on peut dans ce cas définir le nombre de Reynolds au moyen du diamètre de l'enrochement.

Mais avec un matériau de granulométrie hétérogène, les grains de très faible granulométrie viennent combler les interstices, et la distance entre grains est du même ordre de grandeur que les grains de faible diamètre. En conséquence, le nombre de Reynolds qui caractérise le degré de turbulence de l'écoulement devient égal à Ud_c/ν , d_c étant le diamètre moyen des grains les plus petits.

C'est sans doute pour cette raison que Terzaghi donne, comme diamètre caractéristique, le diamètre correspondant à 10 % de la courbe granulométrique en pourcentage cumulé.

Pratiquement, on peut prendre le diamètre défini par le centre de gravité de la courbe de fréquence des grains. Les diamètres équivalents résultant de l'application de cette définition correspondent pratiquement à des valeurs comprises entre 8 et 16 % sur les courbes granulométriques en pourcentage cumulé. Le diamètre caractéristique de Terzaghi constitue donc bien un ordre de grandeur acceptable pour le problème qui nous occupe.

3. LA LARGEUR l :

Chaque zone granulométrique de la digue nécessite une évaluation grossière des longueurs fictives de parcours de l'eau l à travers le massif.

Traisons tout d'abord le cas du régime permanent (charge constante), la transmission des ondes longues n'étant qu'une succession de régimes permanents.

Pour déterminer les parcours de l'eau, il est possible, mais onéreux pour le but recherché, de photographier sur un premier modèle de dégrossissage les trajectoires des particules fluides à travers la digue suivant un procédé bien connu pour l'étude des infiltrations (grains de permanganate ou de fluorescéine), en réglant de part et d'autre de la digue une légère différence de niveau.

Il est plus simple de tracer directement le parcours approximatif en faisant appel au bon sens et à l'intuition en suivant ces quelques idées directrices :

1. Les parties inférieures des massifs correspondant à de faibles granulométries (tout-venant) peuvent être considérées comme étanches par rapport aux couches supérieures.
2. Les blocs artificiels arrimés sont pratiquement étanches, les chanfreins ou vides destinés à réduire les sous-pressions ayant un effet négligeable sur le débit.

Les parcours une fois déterminés, il faut connaître la largeur fictive l qui, pour chaque gra-

nulométrie, fixe la vitesse de l'eau sous la charge H .

Si nous utilisons une analogie électrique, les couches granulométriques sont pour chaque ligne de courant des résistances en série qui limitent le débit-courant sous la charge-tension H .

Nous avons vu que les coefficients de grossissement K sont fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement dans chacune de ces couches granulométriques. Or, la vitesse, donc le nombre de Reynolds, dépend non seulement de la couche considérée, mais aussi des couches adjacentes qui, elles aussi, ajoutent leurs effets pour limiter la vitesse U sous la charge totale H , ce qui revient à connaître la répartition du gradient $\Delta H/\Delta l$ pour chaque couche superposée (fig. 9).

FIG. 9. — Massif d'enrochements de granulométries variées. Schéma de principe.

Admettons que la vitesse U soit la même pour toutes ces couches superposées (cas où les sections totales et les indices de vide sont les mêmes). La perte de charge totale à travers le massif s'écrit :

$$H = \frac{U^2}{2g\varepsilon^5} \sum \frac{l_j}{d_j} C \left(\frac{Ud_j}{\nu} \right)$$

En régime turbulent, $C=C^{te}$, donc la perte de charge H se répartit comme l_j/d_j , et si l'on veut calculer la longueur équivalente l qui donnerait avec la granulométrie d_i la même valeur de U sous la charge H , il faut faire la somme :

$$l = l_i + \sum \frac{l_j d_i}{d_j}$$

En régime laminaire, où $C=C^{ste}/d$, la perte de charge se répartit entre les couches comme l_j/d_j^2 et la longueur équivalente tenant compte de l'effet des couches adjacentes est obtenue en faisant la somme :

$$l = l_i + \sum l_j \left(\frac{d_i}{d_j} \right)^2$$

En conclusion, la largeur fictive l assurant la même vitesse U avec la granulométrie d_i que

l'ensemble des couches superposées de granulométrie d_j est égale à la somme de la largeur réelle l_i de la couche i et des largeurs des autres couches j multipliées par le rapport des granulométries à la puissance n (n est fonction de Ud/ν : $n=1$ lorsque l'écoulement est turbulent, et $n=2$ lorsqu'il est laminaire).

$$l = l_i + \sum l_j \left(\frac{d_i}{d_j} \right)^n$$

Lorsque la longueur d'onde diminue et lorsque l'amplitude augmente (cas des houles), cette façon de procéder devient illusoire, car la composante verticale des vitesses n'est plus du tout négligeable devant la composante horizontale. De plus, l'amplitude du mouvement diminue fortement dans le sens de propagation des ondes.

Dans ce cas, un modèle de dégrossissage est utile pour mesurer les parcours de l'eau et en déduire les critères de turbulence.

2. LA CHARGE EFFICACE H_e :

Nous avons vu que l'on pouvait prendre pour la charge efficace H_e la valeur $a(1+r)/\sqrt{2}$. Le coefficient de réflexion r est facilement obtenu à partir de la pente de la digue et de la cambrure de l'onde incidente (cf. (17)). Par cette formule simple, nous supposons que le niveau de l'eau du côté port est toujours au repos.

Nous reviendrons sur ce problème après avoir obtenu l'aide des résultats d'essais expérimentaux; nous examinerons simplement ici le problème du choix de l'amplitude et des périodes des ondes qu'il convient d'étudier.

Le cas d'une houle ou d'une onde longue régulière, d'amplitude $2a$ bien définie, ne présente pas de difficulté.

Mais le problème est souvent plus complexe : les ondes longues d'amplitude faible sont celles qui sont le mieux transmises à l'intérieur du port (nos théories et nos essais confirment ce qui aurait pu être tout simplement basé sur le bon sens). Ce sont donc ces types d'ondes qui doivent le plus retenir notre attention. Or, ces ondes longues d'amplitude extrêmement faible, quelle que soit leur origine (de quelques centimètres) ne sont pas toujours suffisantes pour assurer dans le noyau de l'ouvrage une complète turbulence. Mais, sauf par temps exceptionnellement calme, la turbulence dans la digue est due à la houle superposée aux ondes longues et dont l'amplitude peut être considérable. L'onde longue « profite » donc de cette turbulence et son amortissement doit être étudié en tenant compte de cette houle superposée (l'amortisse-

ment des ondes longues est donc beaucoup plus efficace en période de tempête).

Par conséquent, pour étudier la transmission des ondes longues, on doit calculer le coefficient de grossissement K en prenant comme charge efficace l'amplitude de la houle superposée.

L'essai sera effectué en reproduisant sur le modèle une onde qui aura la période de l'onde longue étudiée pour respecter les effets d'inertie et l'amplitude de la houle superposée pour respecter les frottements.

REMARQUES

Les méthodes que nous avons exposées peuvent sembler d'une application complexe, bien que parfois arbitraires. Aussi nous voudrions terminer cette étude sur une note plus optimiste.

Nous verrons tout d'abord que l'application pratique de ces considérations peut être faite très rapidement, une grossière erreur sur les valeurs des longueurs de parcours n'ayant qu'une très faible répercussion sur la valeur du coefficient de grossissement K qui dépend surtout de l'indice de vide ϵ et de la granulométrie d .

Les principales lacunes ne sont donc pas tant dans la théorie que nous venons d'exposer que dans la connaissance des valeurs de la nature, en particulier de l'indice de vide. De plus, les lois générales des écoulements en milieu perméable sont aussi quantitativement mal connues.

Enfin, la réalisation pratique des modèles ainsi calculés est délicate; il faut, par approximations successives, régler à la fois un indice de vide et un diamètre caractéristique. Nous reviendrons sur ce problème dans le chapitre suivant.

L'application de la théorie des lois de similitude des digues en enrochements n'est donc à mettre en cause qu'en tout dernier lieu et l'on peut dire une fois de plus que la technique du modèle réduit devance les connaissances générales et permet d'orienter les recherches dans la nature.

Ajoutons enfin qu'un modèle de digue construit suivant la similitude de Froude totale (le coefficient de grossissement K étant pour toutes les granulométries égal à l'unité) permettrait de reproduire d'une façon valable :

1. Les phénomènes à la paroi où la turbulence est généralement notable et les blocs de carapace suffisamment gros pour que dans tous les cas $K=1$;
2. L'amplitude de l'onde réfléchie.

Si l'on remarque que ces deux phénomènes prennent déjà la majeure partie de l'énergie incidente, même s'il y a une erreur dans l'amortissement interne, la valeur de l'énergie transmise s'en trouve très peu affectée puisque nous avons reproduit convenablement les phénomènes essentiels.

Il est évident que l'étude de la transmission des ondes sera d'autant plus valable que l'échelle du modèle sera grande, puisque les structures des écoulements sur le modèle et dans la nature se présentent alors avec de plus faibles différences. (Cette remarque sur l'échelle est encore vraie, si nous appliquons les règles de similitude exposées ici, l'erreur diminuant en sens inverse de l'échelle.)

En conclusion, pour étudier la valeur de la transmission des ondes de gravité périodique à travers la digue, on peut appliquer la similitude de Froude totale, avec une échelle la plus grande possible. Le résultat ainsi obtenu est légèrement inférieur à la réalité, mais la précision de ce résultat est compatible avec la précision des données nature.

Cependant, si l'on veut parfaire l'effet d'amortissement à travers la digue, il faut appliquer, pour les parties les plus étanches de la digue (noyau de tout-venant), la similitude dont nous avons donné ici les règles avec toute la précision que nous permettraient les données actuelles sur les pertes de charge dans les massifs en enrochements.

TROISIÈME PARTIE

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES

CHAPITRE I

APPAREILLAGE EXPÉRIMENTAL

1. — CANAUX A HOULE.

Tous les essais ont été effectués en canal à houle, suivant le dispositif schématisé sur la figure 10. Nous n'entrerons pas dans la description détaillée d'un tel dispositif qui a maintes fois été donnée (Cf. [18]). Nous nous contenterons d'indiquer les caractéristiques essentielles des deux canaux utilisés.

Dans le premier canal, nous avons effectué les essais dans les conditions suivantes :

- Profondeur d'eau h 100 cm
- Largeur du canal 60 cm
- Périodes du générateur d'ondes. 0,6 à 3,5 s

Le deuxième canal utilisé pour vérifier les lois de similitude présente les caractéristiques :

- Profondeur d'eau h 10 cm
- Largeur du canal 15 cm
- Périodes du générateur d'ondes. 0,3 à 2,5 s

Le canal permet donc d'étudier au $1/10^e$, en similitude de Froude, les mêmes cas.

Les ondes transmises à travers le massif étant extrêmement peu cambrées, leur absorption est difficile. Nous avons dû apporter un soin particulier à la réalisation des ouvrages absorbants. Après avoir essayé divers dispositifs, nous avons utilisé des copeaux de paille disposés sur une

FIG. 10. — Schéma de l'installation d'essais.

Période 2 S. — Granulométrie : 1,8 cm

Période 3 S. — Granulométrie : 5,9 cm

Fig. 11, — Exemples photographiques de plusieurs massifs essayés.

FIG. 11 bis
Exemples photographiques
de
plusieurs massifs essayés

Période 3 S.
Granulométrie : 5,9 cm

grande longueur suivant une densité croissant dans le sens de l'acheminement de l'onde incidente. Les copeaux pris dans le mouvement des ondes ajoutent leur résistance interne et leurs propres frottements aux frottements de l'eau. L'augmentation progressive de la densité des copeaux limite au maximum les réflexions (Cf. [19]).

Malgré tout le soin apporté à cette partie de l'installation, une erreur systématique, fonction de la période, entache parfois la valeur du coefficient de transmission, suivant la phase des réflexions successives entre l'ouvrage absorbant et le massif. Cette erreur, dans le cas le plus défavorable, peut être chiffrée à 3 %.

2. APPAREILLAGE DE MESURE.

Les mesures ont porté essentiellement sur

les amplitudes des nœuds et des ventres du clapotis partiel devant l'ouvrage et sur l'amplitude de l'onde progressive transmise.

Pour cela, trois appareils ont été utilisés :

1. Une pointe de mesure à œil cathodique a permis une mesure rapide et précise des amplitudes les plus grandes. Elle nécessite toutefois la recherche préliminaire, par tâtonnement, de l'emplacement des nœuds et des ventres du clapotis partiel devant l'ouvrage. Par contre, derrière le massif, il est possible de mesurer l'amplitude de l'onde transmise en n'importe quel point, puisque cette onde est progressive pure.
2. Un enregistreur graphique de houle (E.G.H.) a été utilisé pour mesurer les amplitudes plus faibles. Un charriot porte-sonde, qui se déplace sur un rail parallèle à l'axe des canaux,

a permis d'enregistrer directement l'amplitude des nœuds et des ventres du mouvement (Cf. [20]).

3. Lorsque les amplitudes sont extrêmement faibles (de l'ordre du mm), les effets capillaires sur la sonde à capacité de l'E.G.H. faussent les résultats des mesures. Aussi, dans ce cas, avons-nous utilisé une pointe vibrante à résistance qui permet de pallier cet inconvénient. Il a ainsi été possible de mesurer avec précision des amplitudes de l'ordre de 1/10 de mm. Cet appareil n'a été utilisé que derrière le massif pour la mesure des ondes progressives, l'appareil étant fixé sur les bords du canal à houle (Cf. [21]).

3. LES MESURES DES CARACTÉRISTIQUES DU MASSIF.

Ces mesures ont pour but de déterminer :

- a) Les dimensions du massif : les enrochements sont contenus entre deux grillages verticaux de distance réglable, dont il est facile de mesurer l'écartement (fig. 11);

- b) La granulométrie des matériaux : les matériaux les plus gros ont été triés un à un par pesée, et les plus fins par tamisage. Leur granulométrie a été déterminée, après mesure de leur densité, de deux façons :

I. Par pesée, le diamètre étant défini par le diamètre de la sphère de même poids;

II. Par mesure de leur vitesse de chute libre en eau calme.

Les résultats obtenus par ces deux méthodes sont sensiblement identiques.

- c) L'indice de vide : l'indice de vide a tout d'abord été déterminé, pour les matériaux les plus gros, dans des récipients étalonnés par l'introduction d'un volume d'eau mesuré dans une éprouvette graduée.

Pour les matériaux les plus fins, cette méthode ne peut convenir, à cause des poches d'air qui restent entre les graviers; aussi a-t-on procédé par pesée, après détermination de la densité au picnomètre : la mesure des dimensions des massifs et la pesée du volume de matériau constituant chaque massif nous a permis de retrouver cet indice de vide.

CHAPITRE II

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX OBTENUS AVEC DES MASSIFS DE LARGEUR CONSTANTE

Les essais ont porté sur la mesure des amplitudes du clapotis partiel aux ventres A et aux nœuds B devant l'ouvrage, et des amplitudes de l'onde transmise $2a_t$. Nous en avons déduit les valeurs de l'onde incidente :

$$2a = \frac{A+B}{2}$$

de l'onde réfléchie :

$$2a_r = \frac{A-B}{2}$$

et des coefficients de réflexion :

$$r = \frac{2a_r}{2a} = \frac{A-B}{A+B}$$

et de transmission :

$$t = \frac{2a_t}{2a} = \frac{2 \times 2a_t}{A+B}$$

Remarquons que les formules donnant les valeurs des ondes incidentes et réfléchies ne sont valables qu'en première analyse, et qu'elles ne sauraient être utilisées lorsque le facteur :

$$(2a/L)(L/h)^3$$

est grand : il faut alors tenir compte des termes du deuxième ordre.

Les variables sont :

1. — La largeur du massif l ;
2. — La profondeur d'eau h ;
3. — La granulométrie des enrochements d ;
4. — L'indice de vide ϵ ;
5. — La période de l'onde incidente T ;
6. — L'amplitude de l'onde incidente $2a$.

Les conditions d'essais et les résultats numériques sont donnés dans les tableaux ci-après.

Pour des commodités d'expérimentation, nous avons effectué nos essais pour chaque massif, à période constante, en faisant varier l'amplitude (fig. 12 et 13).

Des courbes expérimentales tracées dans ces conditions nous déduirons, par un simple changement d'axe, celles à amplitude incidente constante.

FIG. 13. — Résultats d'essais.

ESSAI N° 1 $h=60 \text{ cm}$; $l=8 \text{ cm}$; $d=5,9 \text{ cm}$; $T=0,6 \text{ s}$

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	$r^2 + l^2$
8	1	2	4,5	3,5	0,39	0,78	0,756
15	5	3	10	5	0,25	0,50	0,312
21	6	6	13,5	7,5	0,41	0,55	0,377
22	8	7	15	7	0,40	0,47	0,474

ESSAI N° 2 $h=60 \text{ cm}$; $l=8 \text{ cm}$; $d=5,9 \text{ cm}$; $T=1 \text{ s}$

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	$r^2 + l^2$
15	5	7,5	10	5	0,75	0,50	0,812
27	10	13	18,5	8,5	0,703	0,46	0,706
45	20	23	32,5	12,5	0,708	0,385	0,648
81	42	33	61,5	19,5	0,537	0,317	0,390
105	55	45	80	25	0,562	0,312	0,413
123	70	47,5	96,5	26,5	0,492	0,275	0,317

ESSAI N° 3

 $h=60$ cm; $l=8$ cm; $d=5,9$ cm; $T=1,5$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
14	7	9	10,5	3,5	0,857	0,333	0,845
22	12	15	17	5	0,883	0,294	0,864
43	24	26	33,5	9,5	0,776	0,283	0,682
79	43	40	61	18	0,655	0,295	0,517
118	57	55	87,5	30,5	0,628	0,349	0,516
158	75	67,5	116,5	41,5	0,579	0,356	0,461
195	95	80	145	50	0,552	0,345	0,423
230	100	90	165	65	0,545	0,394	0,452
280	140	105	210	70	0,50	0,335	0,360

ESSAI N° 6

 $h=60$ cm; $l=15$ cm; $d=5,9$ cm; $T=1$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
28	13	11	20,5	7,5	0,537	0,366	0,421
75	25	28	50	25	0,56	0,500	0,563
94	46	29	72,5	26,5	0,40	0,366	0,293
150	80	40	115	35	0,348	0,304	0,213

ESSAI N° 4

 $h=60$ cm; $l=8$ cm; $d=5,9$ cm; $T=2$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
16	10	12	13	3	0,923	0,231	0,903
35	20	24	27,5	7,5	0,873	0,272	0,836
72	45	42,5	58,5	13,5	0,727	0,231	0,581
111	60	57,5	85,5	25,5	0,673	0,298	0,541
141	77	70	109	32	0,642	0,293	0,498
178	94	80	136	42	0,588	0,447	0,545
197	102	80	149,5	47,5	0,536	0,318	0,388
243	132	100	187,5	55,5	0,533	0,296	0,371
261	137	105	199	62	0,528	0,315	0,375
278	148	107,5	213	65	0,505	0,305	0,358
285	146	112,5	215,5	69,5	0,523	0,323	0,377
302	143	115	222,5	79,5	0,517	0,357	0,371
316	161	125	238,5	75	0,524	0,315	0,373

ESSAI N° 7

 $h=60$ cm; $l=15$ cm; $d=5,9$ cm; $T=2$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
25	8	13	16,5	8,5	0,788	0,515	0,885
48	20	25	34	14	0,735	0,412	0,709
80	36	36	58	22	0,621	0,379	0,529
110	45	45	77,5	32,5	0,580	0,42	0,513
135	60	55	97,5	37,5	0,564	0,384	0,466
160	65	60	112,5	47,5	0,533	0,422	0,462
195	75	72,5	135	60	0,537	0,444	0,485
214	84	75	149	65	0,503	0,436	0,443
242	106	80	174	68	0,460	0,391	0,364
266	100	82,5	183	83	0,451	0,453	0,408
282	112	90	197	85	0,457	0,432	0,394
314	128	100	221	93	0,452	0,420	0,380

ESSAI N° 5

 $h=60$ cm; $l=8$ cm; $d=5,9$ cm; $T=2,5$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
14	8	9	11	3	0,818	0,273	0,742
23	16	16	19,5	3,5	0,821	0,179	0,704
34	21	25,5	27,5	6,5	0,926	0,263	0,914
57	32	35,5	44,5	12,5	0,798	0,281	0,715
77	44	46	60,5	16,5	0,76	0,273	0,652
117	60	59	88,5	28,5	0,667	0,335	0,555
142	73	70	107,5	39,5	0,651	0,367	0,558
186	92	85	139	47	0,612	0,338	0,488
226	110	95	168	58	0,566	0,345	0,439
282	128	105	205	77	0,513	0,376	0,403
325	152	117,5	238,5	86,5	0,493	0,363	0,375

ESSAI N° 8

 $h=100$ cm; $l=44$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=1$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
17,5	5,5	3,7	10,5	5	0,352	0,476	
29,5	8,5	5	19,25	10,75	0,260	0,557	0,387
40	14	7	27,25	13,25	0,257	0,486	0,294
75	20,5	10	43,8	23,3	0,228	0,582	0,391
86	24,5	11	53,75	29,25	0,205	0,544	0,337
118	35	13,25	75	40	0,178	0,533	0,316
148	39	14,75	89	50	0,166	0,562	0,338

ESSAI N° 9

 $h=100$ cm; $l=44$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=1,5$ s

A	B	$2 a_l$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
22,5	5	6,75	13,25	8,75	0,56	0,66	0,748
40	9	10,75	24,5	15,5	0,438	0,632	0,602
43,2	10,1	11,7	26,6	16,55	0,439	0,622	0,579
70	15	17	42,5	29	0,40	0,682	0,625
113	29	23,5	71	42	0,331	0,592	0,459
152	37	28,5	94,5	57,5	0,305	0,608	0,460
174	48	31	111	63	0,279	0,567	0,401
227	59	36,5	143	84	0,255	0,587	0,397
231	61	33,5	146	85	0,229	0,582	0,391
285	82	42,25	183,5	101,5	0,231	0,553	0,355

ESSAI N° 12

 $h=100$ cm; $l=44$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=3$ s

A	B	$2 a_l$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
9,6	3,4	4,9	6,5	3,1	0,753	0,476	0,794
20,8	8,4	10	14,6	6,2	0,685	0,424	0,694
45	17,5	18,5	31,2	13,7	0,593	0,439	0,545
71	25	26	48	25	0,542	0,479	0,524
94	31,5	31,25	62,7	31,25	0,498	0,498	0,596
124	38	37,5	81	37,5	0,463	0,516	0,496
167	48,5	45,7	107,8	45,7	0,424	0,531	0,482
211	59	51,25	135	51,25	0,379	0,550	0,461
252	73,5	59	162,7	59	0,363	0,563	0,433
300	88	63,75	194	63,75	0,329	0,548	0,403
340	100	68,5	220	68,5	0,311	0,547	0,394
407	130	78,5	268,5	78,5	0,292	0,545	0,351

ESSAI N° 10

 $h=100$ cm; $l=44$ cm; $d=5,8$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=2$ s

A	B	$2 a_l$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
9,3	1,7	3,05	5,5	3,8	0,555	0,690	0,784
18,4	4,5	6,3	11,8	7,35	0,583	0,578	0,674
31,4	8,3	10,9	19,8	11,4	0,553	0,527	0,595
60	16	18,6	36,9	20,9	0,504	0,586	0,597
97	27,5	27,2	61,75	34,25	0,440	0,554	0,501
137	40	34,7	87	47	0,399	0,539	0,450
165	45,5	39,5	103,25	58,75	0,381	0,569	0,469
199	53	44,5	124,5	71,5	0,357	0,573	0,555
221	61	48	141	80	0,342	0,567	0,438
257	66	51	161,5	95,5	0,316	0,592	0,451
286	78	56	177	104	0,316	0,588	0,446

ESSAI N° 13

 $h=100$ cm; $l=44$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=3,5$ s

A	B	$2 a_l$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
8,8	3,3	5,05	6,05	2,75	0,83	0,454	0,895
19,9	7,7	10,5	13,8	6,1	0,76	0,442	0,773
36,5	13,5	17,5	25	11,5	0,7	0,46	0,712
55	19,15	23	37,25	17,75	0,617	0,477	0,608
74	25	29,5	49,5	24,5	0,597	0,495	0,601
93	34	31	63,5	29,5	0,488	0,464	0,454
94	32,5	35	63,25	30,75	0,552	0,486	0,541
113	39	39,5	76	37	0,52	0,487	0,601
138	50	40,5	94	44	0,432	0,468	0,406
166	58	45,5	112	53	0,407	0,473	0,390
185	65	54,5	125	60	0,436	0,480	0,420
192	67	50,5	129,5	62,5	0,39	0,482	0,384

ESSAI N° 11

 $h=100$ cm; $l=44$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=2,5$ s

A	B	$2 a_l$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
15	4,2	6,1	9,6	5,4	0,636	0,563	0,720
30,5	9	11,7	19,75	10,75	0,592	0,544	0,647
58	18	20	38	20	0,526	0,526	0,552
89	27	27	58	31	0,466	0,534	0,503
114,5	34	32,5	74,25	40,25	0,438	0,542	0,486
146	41	38	93,5	52,5	0,407	0,562	0,480
190	50	44,75	120	70	0,373	0,583	0,489
235	59	50,75	142	88	0,355	0,619	0,409
281	66	55,5	173,5	107,5	0,319	0,620	0,486
330	78	60,25	204	136	0,295	0,667	0,532
380	90	66,5	235	145	0,283	0,620	0,461

ESSAI N° 14

 $h=100$ cm; $l=84$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=1$ s

A	B	$2 a_l$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
18	5	1,35	11,5	6,5	0,117	0,565	0,333
29,5	9,5	2,1	19,5	10	0,107	0,513	0,275
51,3	17,1	2,6	34,2	17,1	0,076	0,500	0,256
79	22	3,3	50,5	28,5	0,065	0,565	0,323
90	26	3,4	58	32	0,059	0,551	0,307
110	32	3,6	71	39	0,051	0,549	0,304
140	41	4,3	90,5	49,5	0,048	0,547	0,301

ESSAI N° 15 $h=100$ cm; $l=84$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=1,5$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	$r^2 + t^2$
14,5	4,9	3,7	9,7	4,8	0,381	0,495	0,390
22,5	7,5	5,5	15	7,5	0,366	0,500	0,384
44	13	8,5	28,5	15,5	0,298	0,543	0,384
70	18	11	44	26	0,250	0,591	0,412
104	27	14	65,5	38,5	0,213	0,587	0,390
135	36	16,2	85,5	49,5	0,189	0,579	0,371
169	45	17,7	107	62	0,165	0,579	0,362
230	55	20,6	142,5	87,5	0,145	0,614	0,398
270	78	22,7	174	96	0,130	0,551	0,320

ESSAI N° 18 $h=100$ cm; $l=84$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=3$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	$r^2 + t^2$
13,7	2,7	4,5	8,2	5,5	0,549	0,671	0,752
27,7	7,3	9,2	17,5	10,2	0,525	0,582	0,615
58	14,2	16,4	36,1	21,9	0,453	0,606	0,573
88	22	22,2	55	33	0,402	0,600	0,522
120	28,5	26,2	74,2	45,75	0,353	0,616	0,504
150	34,5	31,5	92,2	57,7	0,337	0,625	0,504
201	48	37,25	124,5	76,5	0,299	0,615	0,469
245	57	41,1	151	94	0,272	0,622	0,461
292	71	44,4	181,5	110,5	0,246	0,609	0,431
340	90	48,5	215	125	0,225	0,581	0,388
389	112	52,1	250,5	138,5	0,208	0,552	0,348
436	141,5	56,6	288,7	147,2	0,196	0,511	0,299

ESSAI N° 16 $h=100$ cm; $l=84$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=2$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	$r^2 + t^2$
9,6	0,8	2,1	5,2	4,4	0,404	0,846	0,879
15,8	2,1	3,9	8,95	6,85	0,436	0,765	0,775
30	6	7,5	18	12	0,417	0,666	0,617
83	19	16,75	51	32	0,328	0,627	0,501
119	27	20,7	73	46	0,283	0,630	0,476
144	34	23,7	89	55	0,268	0,618	0,454
154	35,5	24,6	94,5	59,25	0,259	0,625	0,458
176	43	26,9	109,5	66,5	0,245	0,607	0,428
204	50	29,7	127	77	0,234	0,606	0,422
225	56	31,2	140,5	84,5	0,222	0,601	0,410
271	69	33,5	170	101	0,197	0,594	0,391
290	74	34,7	182	108	0,191	0,593	0,388

ESSAI N° 19 $h=100$ cm; $l=84$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=3,5$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	$r^2 + t^2$
3,9	0,4	1,15	2,15	1,75	0,535	0,813	0,947
9,3	2,0	3,4	5,65	3,65	0,602	0,646	0,779
21,7	6,3	7,8	14	7,7	0,557	0,550	0,612
33,5	9	11,45	21,2	12,2	0,540	0,575	0,622
46	12,2	15	29,1	16,9	0,515	0,580	0,601
59	16	18,1	37,5	21,5	0,482	0,573	0,560
78	20,5	22,2	49,2	28,7	0,451	0,583	0,543
98	26,5	26,2	62,2	35,7	0,421	0,573	0,505
120	34	29,9	77	43	0,388	0,558	0,461
142	41	32,9	91,5	50,5	0,359	0,551	0,432
165	50	35,8	107,5	57,5	0,333	0,536	0,396
191	60	39,6	125,5	65,5	0,315	0,521	0,370
212	69,5	41,75	140,7	71,2	0,297	0,506	0,344

ESSAI N° 17 $h=100$ cm; $l=84$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=2,5$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	$r^2 + t^2$
19	3,2	5,1	11,1	7,9	0,459	0,712	0,718
38	7,5	9,7	22,7	15,2	0,426	0,669	0,629
74	17	16,6	45,5	28,5	0,365	0,626	0,525
113	25	22,3	69	44	0,323	0,638	0,511
138	31	25,9	84,5	53,5	0,306	0,632	0,493
163	36,5	27,6	99,75	63,25	0,276	0,634	0,478
210	46	31,7	128	82	0,247	0,640	0,471
265	60	36,1	162,5	102,5	0,222	0,631	0,447
308	70	38,8	189	119	0,205	0,630	0,440
353	80	40,8	216,5	136,5	0,188	0,630	0,432
375	84	42,8	229,5	145,5	0,186	0,634	0,437

ESSAI N° 20 $h=100$ cm; $l=124$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=1$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	$r^2 + t^2$
14,5	5,4	0,15	9,9	4,5	0,151	0,454	0,206
25,8	7,8	0,4	16,8	9	0,023	0,536	0,287
45	15	1	30	15	0,033	0,500	0,251
67	21	1,2	44	23	0,027	0,523	0,274
86	23,5	1,3	54,7	21,2	0,023	0,571	0,326
100	24	1,4	62	38	0,022	0,613	0,376
117	28	1,5	72,5	44,5	0,020	0,614	0,377
146	34	1,6	90	56	0,017	0,622	0,387

ESSAI N° 21 $h=100$ cm; $l=124$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=1,5$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
7,4	1,8	0,9	4,6	2,8	0,196	0,610	0,409
18,6	5,6	2,8	12,1	6,5	0,231	0,537	0,341
37	10,7	4,7	23,8	13,1	0,197	0,551	0,342
71	18,7	7,1	49,9	26,2	0,158	0,584	0,366
110	28	8,8	69	41	0,127	0,595	0,370
139,5	35,5	10,2	87,5	52	0,116	0,594	0,366
180	45	11,4	112,5	67,5	0,101	0,606	0,370
210	52	12	131	79	0,092	0,603	0,372
241	68	12,9	154,5	86,5	0,084	0,560	0,321
276	83	13,6	179,5	96,5	0,076	0,538	0,295

ESSAI N° 22 $h=100$ cm; $l=124$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=2$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
9,3	1,4	1,8	5,4	3,9	0,333	0,722	0,632
16,5	3,1	3,4	9,8	6,7	0,347	0,684	0,588
31,6	6,8	6,4	19,2	12,4	0,333	0,647	0,530
63,4	13,4	10,8	38,4	25	0,281	0,651	0,503
91	19,5	13,8	55,3	35,7	0,249	0,646	0,480
121	26	16,2	73,5	47,5	0,220	0,647	0,467
144	33,7	18,2	88,8	55,2	0,204	0,622	0,429
189	45	20,4	117	72	0,174	0,616	0,410
217	50	21,3	133,5	83,5	0,159	0,626	0,417
249	59	23	154	95	0,149	0,617	0,403
277	70	23,9	173,5	103,5	0,138	0,597	0,375
296	78	25	187	109	0,134	0,583	0,417

ESSAI N° 23 $h=100$ cm; $l=124$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=2,5$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
12,9	1,3	2,8	7,1	5,8	0,394	0,817	0,823
21,4	2,9	4,6	12,2	9,2	0,377	0,754	0,710
41,5	7,8	8,6	24,7	16,8	0,348	0,680	0,584
81	16,1	14,1	48,6	32,4	0,290	0,667	0,529
105,8	22,6	16,7	64,2	41,6	0,260	0,648	0,488
132	27,5	19,7	79,7	52,2	0,247	0,655	0,490
182	38,5	23,2	110,2	71,8	0,210	0,651	0,468
213	45,5	24,2	129,5	84	0,187	0,649	0,456
260	55	26,5	157,5	102,5	0,168	0,651	0,452
312	71	29,2	191,5	120,5	0,152	0,630	0,420
344	88	30,3	216	128	0,140	0,593	0,371
384	96	31,9	240	144	0,133	0,601	0,379

ESSAI N° 24 $h=100$ cm; $l=124$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=3$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
8,5	0,9	2,2	4,7	3,8	0,468	0,808	0,872
14,5	2,3	4	8,4	6,1	0,476	0,726	0,754
30,3	6	8,1	18,2	12,2	0,445	0,671	0,648
63	13	14,6	38	25	0,384	0,658	0,580
96	20,3	19,2	58,2	37,8	0,330	0,650	0,531
131,5	28,5	23	80	51,5	0,287	0,644	0,497
170	39	27	104,5	65,5	0,258	0,627	0,460
220	50	30,7	135	85	0,228	0,630	0,449
270	66	33,6	168	102	0,200	0,607	0,408
314	84	36,3	199	115	0,182	0,578	0,367
356	103	39	229	126,5	0,170	0,551	0,332
411	121	40,6	266	145	0,152	0,546	0,321
487	140	43,1	313,5	173,5	0,138	0,554	0,325

ESSAI N° 25 $h=100$ cm; $l=124$ cm; $d=5,9$ cm; $\varepsilon=40$ %; $T=3,5$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
4	0,2	0,95	2,1	1,9	0,451	0,905	1,02
9,9	1,3	2,9	5,6	4,3	0,518	0,767	0,856
22,4	4	6,7	13,2	9,2	0,507	0,697	0,743
34,6	6,9	10,2	20,7	13,8	0,492	0,666	0,685
48,2	10,5	12,8	29,3	18,8	0,436	0,641	0,601
61,1	13,7	15,3	37,4	23,7	0,409	0,634	0,569
81	18,5	18,8	49,7	31,2	0,378	0,627	0,536
101	25	21,8	63	38	0,346	0,603	0,483
122	32	24,8	77	45	0,322	0,584	0,445
144,5	41,5	27,7	93	51,5	0,298	0,553	0,394
169	50,5	29,2	109,7	59,2	0,266	0,540	0,362
194	60	31,3	127	67	0,246	0,527	0,338
219	70	33,2	144,5	74,5	0,230	0,516	0,319

ESSAI N° 26 $h=60$ cm; $l=2$ cm; $d=1,9$ cm; $T=0,6$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	$2 a$	r	r^2+t^2
7	4	1,5	5,5	1,5	0,273	0,273	0,149
9	6	4	7,5	1,5	0,533	0,200	0,325
12	8	6	10	2	0,60	0,200	0,400
15	12	9	13,5	1,5	0,667	0,111	0,455
18	10	8,5	14	4	0,607	0,286	0,449

ESSAI N° 27 $h=60$ cm; $l=2$ cm; $d=1,9$ cm; $T=1$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
11	7	7,5	9	2	0,833	0,222	0,743
22	12	11,5	17	5	0,677	0,294	0,544
30	17	16,5	23,5	6,5	0,703	0,276	0,569
41	25	19	33	8	0,576	0,242	0,390
58	28	25	43	15	0,582	0,349	0,459
78	41	29	59,5	18,5	0,487	0,311	0,333
82	45	34	66	21	0,515	0,318	0,366
92	50	36	71	21	0,507	0,296	0,344
91	52	37	71,5	21,5	0,517	0,301	0,358

ESSAI N° 30 $h=60$ cm; $l=2$ cm; $d=1,8$ cm; $T=2,5$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
12	8	8	10	2	0,85	0,2	0,762
24	17	16	20,5	3,5	0,83	0,171	0,717
43	24	23	33,5	9,5	0,73	0,283	0,614
64	39	32	51,5	12,5	0,67	0,243	0,506
93	44	42	68,5	24,5	0,635	0,358	0,531
126	56	52	91	35	0,605	0,385	0,513
161	75	62	118	43	0,56	0,363	0,446
206	92	71	149	57	0,517	0,382	0,413
245	115	82	180	65	0,483	0,361	0,363
282	133	88	207,5	74,5	0,453	0,359	0,335
355	135	95	245	110	0,428	0,445	0,385

ESSAI N° 28 $h=60$ cm; $l=2$ cm; $d=1,9$ cm; $T=1,5$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
20	11	12,5	15,5	4,5	0,807	0,290	0,734
38	20	24,5	59	9	0,846	0,31	0,811
56	31	30	43,5	12,5	0,690	0,287	0,558
73	38	37,5	55,5	17,5	0,676	0,316	0,556
95	51	43	73	22	0,589	0,301	0,438
125	71	55	98	27	0,562	0,276	0,391
154	62	60	108	46	0,556	0,426	0,489
190	80	70	135	55	0,518	0,407	0,434
225	100	77	162,5	62,5	0,473	0,384	0,371
246	106	90	176	70	0,51	0,397	0,420

ESSAI N° 31 $h=100$ cm; $l=24$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=1$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
14,1	3,0	2,0	8,6	5,6	0,232	0,651	0,478
25,4	6,8	3,7	16,1	9,3	0,230	0,577	0,386
48	12,2	5,9	30,1	17,9	0,196	0,594	0,391
68	18,5	7,5	43,3	24,7	0,173	0,571	0,355
81	23	8,4	52	29	0,162	0,558	0,337
98	26	9,5	62	36	0,153	0,581	0,361
123	28	11	75,5	47,5	0,146	0,629	0,417
147	32	12,2	89,5	57,5	0,136	0,643	0,432

ESSAI N° 29 $h=60$ cm; $l=2$ cm; $d=1,8$ cm; $T=2$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
17	11	11	14	3	0,822	0,214	0,720
32	21	20	26,5	5,5	0,792	0,207	0,671
51	26	28	38,5	12,5	0,78	0,325	0,713
75	41	38	58	17	0,72	0,293	0,598
108	51	53	79,5	28,5	0,667	0,358	0,572
144	66	61	105	39	0,582	0,371	0,475
176	82	71	129	47	0,55	0,364	0,435
214	111	79	162,5	51,5	0,487	0,317	0,338
249	130	90	189,5	59,5	0,475	0,314	0,323
280	141	101	210,5	69,5	0,48	0,33	0,339
330	157	107	243,5	86,5	0,438	0,354	0,317

ESSAI N° 32 $h=100$ cm; $l=24$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=1,5$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
7,5	1,5	2,0	4,5	3,0	0,445	0,667	0,643
18,1	5,3	5,1	11,7	6,4	0,436	0,547	0,489
37,5	10,6	9,4	24,1	13,5	0,390	0,560	0,465
79,5	22,5	16,8	51	28,5	0,329	0,559	0,421
112	30,5	21,4	71,3	40,8	0,300	0,572	0,417
155	37,5	25,5	96,3	58,8	0,264	0,611	0,443
187	44	28,8	115,5	71,5	0,249	0,619	0,445
216	50	31,2	133	83	0,234	0,624	0,444
250	60	33,3	155	95	0,215	0,613	0,422
266	67	35,3	166,5	99,5	0,212	0,598	0,402

ESSAI N° 33 $h=100$ cm; $l=24$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=2$ s

A	B	$2 a_l$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
4,3	0,8	1,25	2,55	1,75	0,490	0,685	0,709
12,4	3,8	4,3	8,1	4,3	0,530	0,531	0,564
27,8	9,6	9,1	18,7	9,1	0,486	0,486	0,472
57,2	16,8	15,5	37	20,2	0,418	0,546	0,475
84	24,6	21	54,3	29,7	0,386	0,546	0,447
110	30	24,6	70	40	0,351	0,571	0,449
133	35,5	28,2	84,3	48,8	0,334	0,578	0,446
157	41	31,2	99	58	0,314	0,586	0,443
177	46,5	34,3	111,8	65,3	0,306	0,584	0,435
221	55	38,1	138	83	0,276	0,601	0,437
238	59	40,5	148,5	89,5	0,272	0,602	0,437
256,5	67,5	42,3	163	95,5	0,259	0,586	0,411

ESSAI N° 36 $h=100$ cm; $l=24$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=3,5$ s

A	B	$2 a_l$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
0,75	0,1	0,25	0,42	0,32	0,595	0,762	0,935
3,55	1,4	1,8	2,47	1,07	0,728	0,433	0,718
12,3	5	5,9	8,6	3,6	0,685	0,418	0,645
29	10,1	11,6	19,5	9,4	0,594	0,482	0,586
46,6	16,5	16,8	31,5	15	0,533	0,476	0,511
80,5	26	25,1	53,2	27,2	0,471	0,511	0,484
124	42,5	33,1	83,2	40,7	0,397	0,489	0,397
177,5	60,5	42,1	119	58,5	0,354	0,492	0,367
208	70	46,1	139	69	0,332	0,496	0,356
234	79	49,3	156,5	77,5	0,314	0,495	0,344

ESSAI N° 34 $h=100$ cm; $l=24$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=2,5$ s

A	B	$2 a_l$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
4,8	1,3	1,75	3,05	1,75	0,573	0,573	0,657
12,8	4,6	5,2	8,7	4,1	0,597	0,471	0,579
31	11	10,5	21	10	0,500	0,476	0,477
66	20,5	19	43,2	22,7	0,439	0,526	0,470
103,5	28	25,3	65,7	37,7	0,384	0,574	0,477
139,5	35,5	30,4	87,5	52	0,347	0,594	0,473
175	42,4	34,8	108,7	66,3	0,320	0,610	0,474
219	52,5	37,9	135,7	83,2	0,279	0,613	0,454
263	63	42,2	163	100	0,259	0,613	0,443
298	67	45,8	182,5	115,5	0,251	0,633	0,466
329	75	48,9	202	127	0,242	0,628	0,453
380	80	52,5	230	150	0,228	0,652	0,477

ESSAI N° 37 $h=100$ cm; $l=42$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=1$ s

A	B	$2 a_l$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
11	2,4	0,1	6,7	4,3	0,014	0,642	0,414
25,3	6,7	0,85	16	9,3	0,053	0,582	0,339
49,6	14,2	1,75	31,9	17,7	0,054	0,555	0,311
70,1	19,5	2,5	44,8	25,3	0,055	0,565	0,322
82,5	23,8	2,85	53,15	29,35	0,053	0,552	0,307
103	26,4	3,15	64,7	38,3	0,048	0,592	0,352
116,4	30	3,35	73,2	43,2	0,045	0,59	0,350

ESSAI N° 35 $h=100$ cm; $l=24$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=3$ s

A	B	$2 a_l$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
3,0	1,1	1,3	2,05	0,95	0,633	0,463	0,616
8,7	3,5	3,9	6,1	2,6	0,639	0,426	0,590
19,7	8,2	8,4	13,9	5,7	0,604	0,410	0,553
49,3	17,4	16,2	33,4	16	0,485	0,479	0,465
55,3	26,1	23,3	55,7	29,6	0,418	0,531	0,457
161	42	34,5	101,5	59,5	0,340	0,586	0,459
257	68	45,1	162,5	94,5	0,277	0,581	0,414
367	101	54,3	234	133	0,232	0,569	0,377
424	123	59,2	273,5	150,5	0,216	0,551	0,350
470	141	62,7	305,5	164,5	0,205	0,538	0,331

ESSAI N° 38 $h=100$ cm; $l=42$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=1,5$ s

A	B	$2 a_l$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
20,2	4,1	2,8	12,15	8,05	0,230	0,662	0,492
43,6	8,7	5,55	26,15	17,45	0,211	0,663	0,484
82,8	15,8	9,1	49,3	33,5	0,185	0,68	0,496
110,8	22,3	11	66,55	44,25	0,165	0,665	0,470
139	29,9	12,6	84,45	54,55	0,149	0,645	0,439
178,4	43,5	14,5	111,15	67,25	0,130	0,605	0,383
201	51,9	15,7	126,45	74,55	0,124	0,591	0,364
227	57,2	16,95	142,1	84,9	0,119	0,597	0,370
250,5	62,7	18,5	156,6	93,9	0,118	0,60	0,373

ESSAI N° 39 $h=100$ cm; $l=42$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=2$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
12,5	1,9	2,4	7,2	5,3	0,334	0,736	0,653
23,4	4,9	4,5	14,25	9,25	0,318	0,738	0,645
46,6	10,2	8,2	28,4	18,2	0,289	0,641	0,494
70,9	15,3	11,25	43,1	27,8	0,261	0,645	0,484
99	20,4	14	59,7	39,3	0,234	0,658	0,487
126,4	24,6	16,45	75,5	50,9	0,218	0,674	0,501
151,2	29	18,25	90,1	61,1	0,202	0,678	0,500
177,2	33,3	19,55	105,25	71,95	0,186	0,683	0,501
203,1	38,8	21,15	120,95	82,15	0,175	0,68	0,493
226	45,6	22,1	135,8	90,2	0,163	0,665	0,468
252,3	51,8	23,6	152,05	100,25	0,155	0,659	0,458

ESSAI N° 40 $h=100$ cm; $l=42$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=2,5$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
4,9	0,5	1,05	2,7	2,2	0,389	0,815	0,815
14,9	2,8	3,5	8,85	6,05	0,396	0,685	0,626
29,8	6,7	6,6	18,25	11,55	0,362	0,633	0,531
53,3	14,9	12,05	34,1	19,2	0,354	0,563	0,442
108,2	20,7	16,5	64,35	43,75	0,256	0,681	0,529
140,5	26,2	18,7	83,35	57,15	0,222	0,686	0,519
174,9	33,5	21,3	104,2	70,7	0,202	0,677	0,499
202	36,9	22,8	119,45	82,55	0,191	0,732	0,572
274,2	49,7	26,6	161,95	112,25	0,164	0,695	0,509
314,5	59	28	186,75	127,75	0,152	0,685	0,492
356,2	66,8	30	211,5	144,7	0,142	0,686	0,491
377	77,6	31,1	227,3	149,7	0,137	0,66	0,454

ESSAI N° 41 $h=100$ cm; $l=42$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=3$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
19,6	5	5,1	12,3	7,3	0,414	0,593	0,523
46,2	11	10,1	28,6	17,6	0,352	0,615	0,502
86	18	15,3	52	34	0,294	0,654	0,514
128	26	19,4	77	51	0,251	0,662	0,501
170,5	33,5	23,5	102	68,5	0,230	0,671	0,503
226	47,5	27,4	136,7	89,2	0,200	0,653	0,466
277	63	30,5	170	107	0,179	0,629	0,427
336	79	33,2	207,5	128,5	0,160	0,619	0,408
382	97	35,7	239,5	142,5	0,149	0,595	0,376
458	114	37,5	286	172	0,131	0,601	0,378
525	141	40,8	333	192	0,122	0,576	0,346

ESSAI N° 42 $h=100$ cm; $l=42$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=3,5$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
1	0	0,15	0,5	0,5	0,300	1,000	1,09
4,2	0,8	1,25	2,5	1,7	0,500	0,680	0,712
10	2,6	3,3	6,3	3,7	0,523	0,587	0,618
23,1	5,9	6,9	14,5	8,6	0,475	0,593	0,578
37,3	9,1	9,7	23,2	14,1	0,418	0,607	0,543
49,1	12,1	12	30,6	18,5	0,392	0,604	0,518
62	15,4	14,3	38,7	23,3	0,369	0,602	0,498
82,6	20,8	17,4	51,7	30,9	0,336	0,598	0,470
104	30,6	20,3	67,3	36,7	0,301	0,545	0,388
127	36,4	23,1	81,7	45,3	0,282	0,554	0,386
152	43,2	25,5	97,6	54,4	0,261	0,557	0,378
180	52	28,6	116	64	0,246	0,551	0,364
213	62	30,9	137,5	75,5	0,224	0,549	0,351
238	73	33	155,5	82,5	0,212	0,531	0,326

ESSAI N° 43 $h=100$ cm; $l=62$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=1$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
66	25	—	45,5	20,5	—	0,451	0,203
79	30	0,1	54,5	24,5	0,001	0,450	0,202
92	33	0,2	62,5	29,5	0,003	0,472	0,222
112	37	0,4	74,5	37,5	0,005	0,504	0,254
147	48	0,6	97,5	49,5	0,006	0,508	0,258
170	55	0,9	112,5	57,5	0,008	0,511	0,261

ESSAI N° 44 $h=100$ cm; $l=62$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=1,5$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
28	5,8	2,2	16,9	11,1	0,130	0,657	0,448
58	11	3,5	34,5	23,5	0,101	0,682	0,475
104	20	5,4	62	42	0,087	0,677	0,465
140	29	6,7	84,5	55,5	0,079	0,657	0,437
174	45	7,5	109,5	64,5	0,068	0,589	0,351
201	57	8,3	129	72	0,064	0,558	0,315
209	64	9	136,5	72,5	0,065	0,531	0,286
238	78	10,2	158	80	0,064	0,507	0,261

ESSAI N° 45 $h=100$ cm; $l=62$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=2$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
22	4	2,6	13	9	0,200	0,692	0,518
44	8,4	4,7	26,2	17,8	0,179	0,679	0,493
89	16	7,7	52,5	36,5	0,146	0,696	0,505
123	22	9,9	72,5	50,5	0,136	0,696	0,503
158	28	11,4	93	65	0,122	0,699	0,503
176	34	12,6	105	71	0,120	0,676	0,471
203	40	13,6	121,5	81,5	0,112	0,670	0,461
248	47	14,5	147,5	100,5	0,098	0,681	0,473
268	53	15,4	160,5	107,5	0,095	0,669	0,456
297	60	16,3	178,5	118,5	0,091	0,662	0,446
319	71	17,6	195	124	0,090	0,635	0,411

ESSAI N° 47 $h=100$ cm; $l=62$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=3$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
1,6	0,1	0,1	0,85	0,75	0,117	0,882	0,791
5,2	1,2	0,5	3,2	2	0,156	0,625	0,415
11,2	2,7	1,9	6,9	4,2	0,275	0,609	0,446
25	6	4,3	15,5	9,5	0,277	0,613	0,452
39	9,4	6,1	24,2	14,8	0,252	0,612	0,438
55	13	7,1	34	21	0,208	0,618	0,425
70	16	8,9	43	27	0,185	0,563	0,351
95	20	11,1	57,5	37,5	0,193	0,652	0,462
120	25	12,3	72,5	47,5	0,169	0,655	0,457
147	32	13,9	89,5	57,5	0,155	0,643	0,437
176	39	15,2	107,5	68,5	0,141	0,637	0,425
214	48	16,4	131	83	0,125	0,634	0,417
250	57	17,5	153,5	96,5	0,114	0,629	0,408
279	68	18,6	173,5	105,5	0,107	0,608	0,381

ESSAI N° 46 $h=100$ cm; $l=62$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=2,5$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
17,5	2,8	2,3	10,2	7,3	0,225	0,715	0,562
36	7,5	4,6	21,7	14,2	0,212	0,654	0,472
56	12	6,7	34	22	0,197	0,647	0,457
75	17	8,2	46	29	0,178	0,630	0,428
94	21	9,6	57,5	36,5	0,166	0,634	0,429
127	28	11,4	77,5	49,5	0,147	0,638	0,428
158	32	12,7	95	63	0,133	0,663	0,457
189	39	14,4	114	75	0,126	0,658	0,448
236	46	15,6	141	95	0,110	0,674	0,466
275	58	17	166,5	108,5	0,102	0,652	0,435
325	68	18,9	196,5	128,5	0,096	0,654	0,436
362	79	20,2	220,5	141,5	0,091	0,643	0,421

ESSAI N° 48 $h=100$ cm; $l=62$ cm; $d=1,8$ cm; $\varepsilon=38$ %; $T=3,5$ s

A	B	$2 a_t$	$2 a$	$2 a_r$	t	r	r^2+t^2
1,7	0,1	0,1	0,9	0,8	0,111	0,888	0,800
6,2	1,2	0,6	3,7	2,5	0,162	0,675	0,481
17	4	2,8	10,5	6,5	0,267	0,619	0,454
42	12	6,6	27	15	0,244	0,555	0,367
72	23	9,5	47,5	24,5	0,200	0,516	0,306
97	31	11,7	64	33	0,183	0,516	0,299
121	39	13,4	80	41	0,167	0,512	0,290
158	52	15,5	105	53	0,147	0,505	0,276
191	66	17,2	128,5	62,5	0,133	0,486	0,254
224	76	18,6	150	74	0,124	0,494	0,259
257	88	20,3	172,5	84,5	0,117	0,490	0,253
288	100	21,2	194	94	0,109	0,485	0,247
318	116	22,5	217	101	0,103	0,466	0,227
351	125	24,5	238	113	0,103	0,475	0,236

CHAPITRE III**DESCRIPTION PHYSIQUE DES PHÉNOMÈNES
ET EXAMEN DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX**

Dans ce chapitre, après la description physique du phénomène, nous expliquerons la validité des théories émises dans la première partie de notre ouvrage (en réservant l'étude des lois de similitude pour le chapitre suivant). Puis nous essayerons de donner des formules prati-

ques basées à la fois sur ces théories et nos résultats d'expérience.

Cette méthode, bien que ne satisfaisant pas pleinement la rigueur mathématique, nous semble en effet plus efficace, car, étant donné la complexité des phénomènes en jeu, nous som-

mes rapidement limités dans nos calculs et les approximations auxquelles nous sommes conduits ne sont pas toujours valables.

Pour représenter les phénomènes physiques, nous tâcherons d'établir une formule plus propre à vérifier nos expériences, à en exprimer les lois et à satisfaire les besoins de la pratique. La théorie mathématique permet toutefois de se rendre compte d'un certain nombre de phénomènes qui échappent à l'observation physique (comme la réflexion causée par le changement brusque des forces de frottement aux deux extrémités du massif). Elle pourrait être améliorée en traitant le cas où les coefficients D et ε sont différents de l'unité, mais ceci nécessite un tel appareillage mathématique que les équations ainsi obtenues sont trop lourdes pour être d'une quelconque utilité pratique. Pour établir une formule valable de la transmission des ondes à travers le massif, il nous faut essayer de représenter tous les phénomènes en jeu (bien que ceux-ci dépassent parfois les possibilités de la théorie) et établir des formules suffisamment simples pour être appliquées d'une façon courante.

Pour combler les défaillances de la théorie, nous nous laisserons guider par nos observations et nos résultats expérimentaux. Comment se présente donc le phénomène?

Tout d'abord, le phénomène de réflexion sur une paroi en enrochements est essentiellement superficiel : on constate que le coefficient de réflexion est sensiblement constant, quelles que soient la période et l'amplitude de l'onde incidente, dès que le massif a une largeur supérieure à quelques diamètres caractéristiques des matériaux constituant le massif. De plus, on voit très nettement que le ventre du clapotis partiel devant le massif se situe au droit du plan imaginaire séparant les deux milieux. En conséquence, le déphasage à la réflexion est très faible et c'est bien ce que l'on constate dans le canal d'essais. Sans doute, comme nous l'avons démontré dans la première partie, il existe une composante de l'onde réfléchie due à la variation de la force de frottement et déphasée de $\pi/2$ par rapport à l'onde incidente, mais son amplitude reste très faible devant la composante due à l'obstruction créée par les enrochements. S'il n'y avait pas d'absorption d'énergie à la paroi, on pourrait admettre que l'énergie réfléchie serait proportionnelle à cette obstruction, c'est-à-dire à $1 - \varepsilon$. L'onde réfléchie serait donc la somme de deux termes, le premier calculé dans la première partie de cet ouvrage (chapitres 3 et 4) et déphasé de $\pi/2$ en avant, et le deuxième dû à l'obstruction, sans changement de phase et dont l'amplitude serait grossièrement proportionnelle à $\sqrt{1 - \varepsilon}$ (puisque les énergies sont proportionnelles au carré des amplitudes).

On en déduit que le potentiel complexe dans le milieu (1) s'écrit, dans le cas général où D et ε sont différents de 1 (avec $\alpha < 1$) :

$$\varphi_c = A \sin(\omega t - mZ) + Ar \sin[\omega t + mZ + (\pi/2)] \\ + A\alpha\sqrt{1 - \varepsilon} \sin(\omega t + mZ)$$

En fait, le phénomène est très différent dès que l'amplitude atteint une certaine valeur. Notre théorie est basée en effet sur la faible importance des termes quadratiques devant les termes linéaires. Or, ceci est certainement faux à la paroi côté large, où la composante verticale de la vitesse introduit une turbulence qui n'est pas prise en ligne de compte par les théories linéaires. D'autre part, l'inertie dans le massif est telle qu'elle conduit à un déphasage entre l'amplitude du clapotis partiel dans le milieu (1) d'une part et l'onde transmise dans le milieu (2) d'autre part. Ce déphasage provoque périodiquement un suintement important le long du massif, entraînant une turbulence active au voisinage de la surface libre, et la montée sur une paroi verticale de l'onde incidente présente parfois, en raison de ce suintement, l'aspect d'un véritable déferlement.

Indépendamment de ces phénomènes, le passage de l'eau dans le sens massif-milieu libre, ayant la forme d'un élargissement brusque, s'accompagne d'une perte partielle de l'énergie représentée par le terme $\overrightarrow{\text{grad}} U^2/2$ négligé jusqu'alors.

Or, l'amplitude de l'onde transmise à l'extrémité large du massif semble avoir grossièrement l'amplitude au ventre du clapotis partiel incident. Cette augmentation d'amplitude ne doit pas nous surprendre; en effet, comme la longueur d'onde diminue, l'énergie transmise se concentre. D'autre part, cette énergie s'exerce dans un milieu réduit aux dimensions de l'indice de vide et l'énergie transmise dans le massif prend la forme :

$$\varepsilon \times \frac{1}{2} \rho g a^2 \frac{C'}{2} \left(1 + \frac{2 m'h}{\text{sh } 2 m'h} \right)$$

Il ne faut donc pas être surpris de l'augmentation locale de la cambrure dans le massif. Du côté port, le phénomène inverse se produit. L'amplitude à la limite du massif est, dans les enrochements, supérieure à celle du milieu libre. L'eau, alternativement, se déverse dans le milieu (3) ou s'engouffre dans le milieu (2). Bien sûr, cette diminution d'amplitude est peut-être due à une réflexion partielle vers le massif, mais ce phénomène a sans doute un effet moindre que la répartition de l'énergie dans un milieu réduit entraînant une diminution de sa propre vitesse de propagation.

La perte d'énergie à la paroi du côté port est

généralement faible, car les vitesses sont réduites et les pertes dues à l'élargissement brusque négligeables.

Finalement, nous nous proposons d'adopter une formule empirique que l'expérience semble vérifier et qui respecte grossièrement tous les phénomènes décrits ci-dessus. Cette formule s'écrit :

$$t \cong \sqrt{\varepsilon} e^{-\beta m' l}$$

L'énergie absorbée E_a est égale à : $1 - (r^2 + t^2)$. Ainsi que nous l'avons démontré par ailleurs, le maximum d'énergie que l'on puisse absorber par effet de paroi est égal à $1/2$ (Cf. [16]) avec : $r=t=1/2$.

$$E_a = 1 - [(1/2)^2 + (1/2)^2] = 1/2$$

Compte tenu de la valeur de β , le coefficient de transmission t devient :

$$t \cong \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{R \varepsilon m' l}{D \omega [1 + (2 m' h) / (\text{sh } 2 m' h)]}}$$

Remarquons que :

$$\frac{\omega}{m'} = \frac{L'}{T} = C'$$

Or :

$$C' \left[1 + \frac{2 m' h}{\text{sh } 2 m' h} \right]$$

n'est autre que la vitesse de groupe G dans le massif, c'est-à-dire la vitesse de propagation de l'énergie. En définitive, nous adopterons, pour la valeur du coefficient de transmission, une formule simple :

$$t \cong \sqrt{\varepsilon} e^{-R \varepsilon l / D G}$$

Il est intéressant de comparer les diverses théories données dans la première partie de cet ouvrage. Toutefois, ceci n'est pas sans difficulté ; en effet, nous avons introduit les facteurs D et R qui sont inconnus en première analyse.

Nous savons seulement que D est une fonction complexe de Ud/v et de ε pour les mouvements amples, et de d^2/Tv et de ε pour les mouvements d'amplitude faible et rapide. Quant à la valeur de R , on peut préciser sa forme en introduisant la notion de charge efficace H_e , déjà utilisée dans l'établissement de règles de similitude. Toutefois, nous formulerons les mêmes réserves sur les limites d'application de cette notion.

Nous avons vu que R était donné par la relation équivalente :

$$g \frac{\Delta H}{\Delta l} = R U$$

avec :

$$g \frac{\Delta H}{\Delta l} = \frac{C (Ud/v)}{\varepsilon^5} \frac{U^2}{2 d}$$

L'élimination de U entre ces deux fonctions donne la valeur de R à partir des variables H , l , d et ε . En effet, on a successivement :

$$\frac{2 d^2 \varepsilon^5 R}{v} = \frac{Ud}{v} C \left(\frac{Ud}{v} \right)$$

avec :

$$\frac{Ud}{v} = \frac{g \Delta H}{R \Delta l} \frac{d}{v}$$

Il est pratique de remplacer la fonction $C(Ud/v)$ par l'équation sensiblement équivalente :

$$C(Ud/v) = 28/(Ud/v) + 0,20$$

ce qui donne finalement :

$$(d^2 \varepsilon^5) R^2 - (14 v) R - 0,1 g d \frac{\Delta H}{\Delta l} = 0$$

d'où la valeur de R qui est forcément positive ($v=0,01$) :

$$R_{CGS} = 0,007 + \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-3}}{d^4 \varepsilon^{10}} + \frac{100}{d \varepsilon^5} \frac{\Delta H}{\Delta l}}$$

Pratiquement, pour les massifs de forte granulométrie (cas de digue en enrochements), R égale :

$$R_{CGS} = 10 \sqrt{\frac{\Delta H}{\Delta l} \times \frac{1}{d \varepsilon^5}}$$

Cette valeur correspond au cas où la fonction C est constante et égale à $0,20$. Lorsque le régime est laminaire, R est indépendant de la charge ΔH :

$$R_{CGS} = \frac{0,14}{d^2 \varepsilon^5}$$

Hormis ce dernier cas, il reste à établir la relation entre la charge efficace ΔH et l'amplitude des ondes périodiques incidentes $2a$.

Notons de suite que cette façon de procéder ne saurait être valable qu'en présence d'ondes longues. En effet, rappelons que :

1) Le coefficient R est un coefficient de frottement global pour tout le massif. Il faut donc que l'amplitude locale du mouvement soit sensiblement la même en tous les points, ce qui ne peut être que le cas des ondes longues pour lesquelles la composante horizontale de la vitesse est indépendante de la profondeur ;

2) Les phénomènes à la paroi prennent vite une certaine importance quand la cambrure de l'onde augmente. En effet, nous avons vu que le mouvement à la paroi s'accompagnait d'une perte

FIG. 14. — Interprétation des résultats d'essais.
Comparaison avec nos théories (massifs courts).

FIG. 15. — Interprétation des résultats d'essais. — Comparaison avec nos théories (massifs longs). — Granulométrie uniforme : d . — Largeur constante : l . — Amplitude incidente : $2a$, en mm. — Amplitude transmise : $2a_t$. — Coefficient de transmission : $t = 2a_t/2a$. — Période : T en s. — Coefficient de frottement : R .

d'énergie non négligeable et dont nous ne tenons pas compte dans la valeur globale de R ;

3) Lorsque le mouvement a une amplitude faible, au critère de turbulence Ud/ν se substitue le nombre $d^2/T\nu$. Peut-être pouvons-nous attribuer à ce fait la chute brutale de certains coefficients de transmission pour les amplitudes les plus faibles. Toutefois, nous n'en avons pas tenu compte dans le tracé des courbes expérimentales, car cette discontinuité peut être due à des erreurs de mesures, celles-ci étant d'autant plus difficiles que l'amplitude est faible. Il est possible que ces phénomènes soient dus aux effets capillaires dans le massif ou sur les appareils de mesures utilisés.

Si nous considérons seulement les cas où la relation entre le coefficient R et la charge efficace H_e (ou l'amplitude des ondes périodiques $2a$) est valable, on peut vérifier la relation que nous avons établie dans les chapitres précédents.

Tout d'abord, si nous transformons les résultats expérimentaux obtenus dans un système d'axes coefficient de transmission-période, l'amplitude étant cette fois constante (fig. 14 et 15), on peut facilement comparer nos théories aux courbes expérimentales correspondantes.

Nous avons tracé les courbes théoriques respectivement données par les formules :

$$t = \frac{1}{1 + (R/2V)} \quad (1)$$

$$t = \frac{1}{1 + (l/2V) \sqrt{(D\omega/\varepsilon)^2 + R^2}} \quad (2)$$

$$t \cong \sqrt{\varepsilon} e^{-R\varepsilon/DG} \quad (3)$$

pour différentes valeurs du coefficient de frottement R et avec $D=1,4$ et $\varepsilon=0,4$. Un simple regard sur ces courbes met en évidence la relation $R=F(2a)$ et par conséquent $H_e=F'(2a)$. Les différences entre les courbes expérimentales et théoriques sont dues uniquement aux approximations faites sur la largeur relative des massifs.

Etant donné les phénomènes à la paroi et l'incertitude sur le coefficient D que nous avons posé égal à 1,40, il est difficile de se faire une idée quantitative de la relation entre H_e et $2a$. Cependant, il est permis de conclure, en première analyse, que la période (donc $d^2/T\nu$) influe peu sur la valeur de R et, par suite, sur la valeur de la charge équivalente H_e . Il serait illusoire de vouloir établir une relation plus précise entre ces différents facteurs, pour les houles très cambrées et de période plus rapide.

Nous devons donc être très prudents dans l'interprétation quantitative des résultats qui

cherche à lier la charge continue équivalente H_e à l'amplitude $2a$. Toutefois, la comparaison des théories avec les résultats expérimentaux montre que la relation que nous avons établie :

$$H_e = \frac{a(1+r)}{\sqrt{2}} \# a$$

est valable en première analyse. Nous pouvons donc écrire que le coefficient de frottement R est égal à :

$$R_{CGS} = 0,007 + \sqrt{\frac{0,005}{d^4 \varepsilon^{10}} + \frac{100 a (1+r)}{\sqrt{2} l d \varepsilon^5}}$$

et pour les digues en enrochements, de granulométrie suffisamment grosse pour que l'écoulement soit toujours turbulent :

$$R_{CGS} = 10 \sqrt{\frac{a(1+r)}{\sqrt{2} l d \varepsilon^5}}$$

On peut conclure :

1. La formule (1), négligeant totalement les forces d'inertie, n'est valable que pour les massifs très courts (d'une largeur égale à quelques diamètres d'enrochements). Elle est avantageusement remplacée par la formule (2) ci-dessus, quand on veut étudier la transmission d'ondes longues à travers un massif en enrochements. Cette dernière formule tient compte, en effet, des forces d'inertie et, grossièrement, des pertes d'énergie à la paroi.
2. La formule (3) est certes plus valable pour les houles courtes traversant un massif en enrochements, mais l'imprécision sur les phénomènes à la paroi rend son application plus douteuse, malgré une analyse plus poussée des phénomènes dans le massif.
3. Enfin, ajoutons que pour les massifs très courts, la relation :

$$r+t=1$$

se vérifie avec une bonne approximation.

Par contre, dès que le massif atteint une largeur supérieure à quelques diamètres d'enrochements, le coefficient de réflexion est sensiblement indépendant de l'amplitude et de la période, et la formule :

$$r = \frac{1}{r + (2V/l) \sqrt{1/[(D\omega/\varepsilon)^2 + R^2]}}$$

donnant la valeur de r établie au chapitre IV de la première partie, ne semble pas traduire le phénomène exact.

FIG. 16. — Vérification des lois de similitude.

CHAPITRE IV

VÉRIFICATION DES LOIS DE SIMILITUDE

Notre vérification des lois de similitude a porté sur la détermination du coefficient de transmission et accessoirement du coefficient de réflexion d'un massif de largeur constante. Nous utiliserons donc les résultats donnés dans le chapitre II et nous comparerons ceux-ci aux résultats obtenus sur des massifs équivalents, à l'échelle du $1/10^e$.

Nos essais au $1/10^e$ ont été effectués avec les deux granulométries $d=1,2$ cm et $1,8$ cm correspondant aux cas où, sur le grand massif la granulométrie étant égale à $5,9$ cm, les coefficients de grossissement K sont respectivement 2 et 3.

En nous reportant à l'abaque 6 donné dans la deuxième partie, nous pouvons voir qu'à l'échelle du $1/10^e$ ce grossissement correspond à des valeurs du groupement :

$$\frac{H_e d^3 \varepsilon^5}{l}$$

respectivement égales à :

$$K=2 \quad \frac{H_e d^3 \varepsilon^5}{l} = 1$$

$$K=3 \quad \frac{H_e d^3 \varepsilon^5}{l} = 0,05$$

soit, avec :

$$d^3 \varepsilon^5 = (5,9)^3 \times (0,4)^5 = 2,06$$

$$K=2 \quad \frac{H_e}{l} = 0,4860$$

$$K=3 \quad \frac{H_e}{l} = 0,0243$$

d'où la valeur de l'amplitude en cm, en fonction de la largeur des massifs essayés, et pour laquelle la similitude est respectée.

l cm	44	84	124
$K=2$	42,8	81,4	120,6
$K=3$	2,14	4,08	6

Nous avons porté sur le graphique ci-joint (fig. 16) les résultats expérimentaux pour ces différentes largeurs en soulignant la valeur théorique pour laquelle la similitude doit être respectée.

La comparaison doit être faite suivant le schéma de principe ci-joint (fig. 17). En abscisses nous portons tout d'abord l'amplitude $2a$

FIG. 17

Principe de la vérification des lois de similitude.

du modèle à l'échelle 1, ou l'amplitude $2a'/E$, et en ordonnées la valeur des coefficients de transmission obtenus. Nous devons comparer les courbes $T=C^{te}$ avec les courbes $T'\sqrt{E}=C^{te}$. Pour les deux valeurs des coefficients de grossissement $K=2$ et $K=3$, nous obtenons deux valeurs $2a_2, 2a_3$ pour lesquelles la similitude est respectée.

Si maintenant nous portons en abscisses la période T d'une part et $T'/\sqrt{E}$ d'autre part, et en ordonnées la valeur des coefficients de transmission t et t' correspondants, les courbes tracées pour $2a=C^{\text{te}}$ doivent se superposer avec les courbes $2a'/E=C^{\text{te}}$ pour les deux cas considérés. Il est regrettable que les valeurs obtenues sur le modèle au $1/10^{\text{e}}$ n'atteignent pas la même précision que celles obtenues à l'échelle 1, ce qui limite la validité des comparaisons. Ces mesures sont en effet très difficiles à faire, étant donné les faibles valeurs des amplitudes reproduites sur le petit modèle.

On peut conclure, à cette précision près, que les lois sur la similitude se vérifient parfaitement et ces essais justifient donc l'adoption de la notion de valeur efficace en régime périodique. Cependant, il ne faut pas utiliser sur le modèle des granulométries trop petites, car les forces capillaires faussent alors complètement la valeur du coefficient de transmission.

Nous terminerons ce chapitre en remarquant que les valeurs des coefficients de réflexion sont, elles aussi, en similitude, c'est-à-dire qu'elles sont sensiblement constantes et voisines de 0,6.

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

1. K. TERZAGHI. — *Eng. News Record* 95, 1925, p. 382.
2. H. E. ROSE. — Fluid Flow through beds of granular materials Some aspects of fluid flow. *Edward Arnold and Co.*, London, 1951, p. 136.
3. H. LAFERRERE. — *Annales du Ministère de l'Agriculture*, 1938, fas. 67, p. 51.
4. L. ESCANDE. — *Proceedings Minnesota International Hydraulics Convention*, A.I.R.H., sept. 1953, p. 547.
5. M. MUSKAT. — The flow of homogeneous fluids through porous media *McGraw Hill*, 1937, p. 763.
6. G. COHEN DE LARA. — *La Houille Blanche*, n° 2, mai 1953, p. 167.
7. G. SCHNEEBELI. — *La Houille Blanche*, mars-avril 1955, p. 111.
8. J. VALENSI ET G. CLARION. — *Bulletin de la Société Française des Mécaniciens*, n° 8, 2 trimestres 1953.
9. J. VALENSI ET G. CLARION. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1953, t. 237, n° 19, p. 1138.
10. J. VALENBOIS. — Contribution à l'étude de la mesure des pressions variables. *Herman et C°*, 1948.
11. F. CRAUSSE. — *Publications Serv. Tech. du Ministère de l'Air*, 95, p. 42.
12. F. BIESEL. — *La Houille Blanche*, n° 2, mars-avril 1950, p. 157.
13. T. H. HAVELOCK. — Forced surface waves on water, *Philosophical Magazine*, série 7, XVIII, 1929, p. 569.
14. F. BIESEL. — *La Houille Blanche*, 1951, p. 975.
15. J. KRAVTCHENKO. — *Proceedings of the fifth conference on Coastal Engineering*, sept. 1954, p. 50.
16. F. BIESEL ET B. LE MÉHAUTÉ. — *La Houille Blanche*, mars-avril 1955, p. 130.
17. L. GRESLOU ET Y. MAHÉ. — *Proceedings of the fifth conference on Coastal Engineering*, sept. 1954, p. 68.
18. A. WALLET. — Communication à la Société Hydrotechnique de France, juin 1951.
19. B. LE MÉHAUTÉ. — Le filtre à houle progressif, *La Houille Blanche*, n° 3, 1955, p. 4.
20. J. BOUDAN. — *La Houille Blanche*, n° 4, août-sept. 1953, p. 526.
21. J. VALENBOIS. — Communication à la Société Hydrotechnique de France, 19-5-1952, p. 1.
22. B. LE MÉHAUTÉ. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, juillet 1957, p. 276.
23. B. LE MÉHAUTÉ. — Communication à la Société Hydrotechnique de France. *IV^{es} Journées de l'Hydraulique*, Paris, 1956, Question III, Rapport n° 4.
24. COHEN DE LARA. — Communication à la Société Hydrotechnique de France. *IV^{es} Journées de l'Hydraulique*, Paris, juin 1956, Question IV, Rapport n° 7.
25. E. O. MACAGNO. — *La Houille Blanche*, n° 1, janv.-fév. 1954, p. 10.